INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO Y AL ANÁLISIS MATEMÁTICO Vol. 2

RICHARD COURANT y FRITZ JOHN
Instituto Courant de Ciencias Matemáticas
Universidad de Nueva York

Con la asistencia de
ALBERT A. BLANK
Profesor de Matemáticas
Universidad Carnegie-Mellon
Pittsburgh, Pennsylvania
ALAN SOLOMON
Profesor de Matemáticas
Universidad del Negev
Beer-Sheva, Israel



LIMUSA
NORIEGA EDITORES
MÉXICO • España • Venezuela • Colombia

Versión autorizada en español de la obra publicada en inglés con el título:
INTRODUCTION TO CALCULUS AND ANALYSIS. Volume II

Colaborador en la traducción:
HERNÁN PÉREZ CASTELLANOS
Ingeniero industrial. Profesor titular de matemáticas en la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional, México.

Revisión:
SAÚL HAHN GOLDBERG
Doctor en matemáticas del Instituto Courant de la Universidad de Nueva York. Profesor asociado del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

ROLANDO V. JIMÉNEZ DOMÍNGUEZ
Doctor en física. Profesor e investigador de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, México.

GRUPO NORIEGA EDITORES
Balderas 95, México, D.F.
C.P. 06040
☎ (5)521-21-05
01(800) 7-06-91-00
(5)512-29-03
limusa@noriega.com.mx
www.noriega.com.mx

CANIEM Núm. 121

Novena reimpresión

Impreso en México
ISBN 968-18-0640-9

Prólogo

La obra **Differential and Integral** Calculus. Vols. I y II, de Richard Courant, ha tenido mucho éxito al iniciar a varias generaciones de estudiantes en las matemáticas superiores. En su contexto, esos volúmenes se basaron en el hecho de que las matemáticas se originan de la unión de la imaginación intuitiva y el razonamiento deductivo. Al preparar esta revisión, los autores se esforzaron en mantener el equilibrio entre estos dos criterios que caracterizaron a la obra original. Aunque Richard Courant falleció antes ver la publicación de esta revisión del Volumen II, todos los cambios principales fueron acordados y redactados por los autores antes de que el Dr. Courant muriera.

Desde el principio, los autores se dieron cuenta de que el Volumen II, que trata de las funciones de varias variables, se tendría que revisar más a fondo que el Volumen I. En particular, parecía conveniente estudiar los teoremas fundamentales de la integración en dimensiones superiores con el mismo rigor y generalidad que se aplicó a la integración en una sola dimensión. Además, había gran número de conceptos nuevos y temas de primordial importancia, los cuales, en opinión de los autores, constituyen una introducción al análisis.

En los capítulos 6, 7 y 8 que tratan, respectivamente, de Ecuaciones Diferenciales, Cálculos de Variaciones y Funciones de una Variable Compleja, sólo se hicieron pequeños cambios. En la parte más importante del libro, capítulos 1 al 5, se conservó lo más posible el esquema original de dos desarrollos más o menos paralelos de cada tema a niveles diferentes: una introducción informal basada en argumentos más intuitivos, y un estudio de las aplicaciones que proporcionan los fundamentos para las demostraciones subsecuentes.

El material de álgebra lineal, contenido en el capítulo I original, parecía inadecuado como fundamento para la estructura ampliada del cálculo. Por tanto, todo este capítulo (que ahora es el capítulo 2) se reescribió completamente y ahora incluye todas las propiedades básicas de los determinantes y las matrices de n-ésimo orden, las for-

mas multilineales, los determinantes de Gram y las variedades lineales.

En el nuevo capítulo 1 se analizan todas las propiedades fundamentales de las formas diferenciales lineales y sus integrales. Con esto el lector ya está preparado para empezar con el estudio de las formas diferenciales exteriores de orden superior agregadas al capítulo 3. También, en el capítulo 3, se encuentra una nueva demostración del teorema de la función implícita por medio de aproximaciones sucesivas y un estudio de los puntos críticos y los índices de los campos vectoriales en dos dimensiones.

En los capítulos 4 y 5 se agregó bastante material sobre las propiedades fundamentales de las integrales múltiples. Aquí nos enfrentamos a una conocida dificultad: se debía demostrar que las integrales sobre una variedad *M*, definidas con bastante facilidad subdividiendo *M* en partes convenientes, son independientes de la subdivisión particular. Esto se resolvió mediante el uso sistemático de la familia de conjuntos mensurables de Jordan con su propiedad de intersección finita y de particiones de la unidad. Con el fin de minimizar las complicaciones topológicas, sólo se consideraron variedades que encajaban suavemente en el espacio euclidiano. Se estudió la noción de "orientación" de una variedad con el detalle necesario para el estudio de las integrales de las formas diferenciales exteriores y sus propiedades de aditividad. Con estas bases, se dan las demostraciones para el teorema de la divergencia y para el teorema de Stokes en n dimensiones. A la sección sobre las integrales de Fourier en el capítulo 4 se le agregó un análisis de la identidad de Parseval y las integrales múltiples de Fourier.

Para la preparación de este libro fue inapreciable la ayuda generosa e ininterrumpida, proporcionada por los dos amigos de los autores, los profesores Albert A. Blank de la Universidad Carnegie-Mellon y Alan Solomon de la Universidad del Negev. Casi en todas las páginas se advierte la influencia de sus críticas, correcciones y sugerencias. Además, ellos prepararon los problemas y ejercicios para este volumen.[1]

También debemos dar las gracias a nuestros colegas, los Profesores K. O. Friedrichs y Donald Ludwig, por sus valiosas y constructivas sugerencias, así como a John Wiley and Sons y su departamento editorial por el continuo estímulo y ayuda que nos brindaron.

FRITZ JOHN
Nueva York

[1]En contraste con el volumen I, éstos se han incorporado por completo en el texto; se pueden encontrar sus soluciones al final del volumen.

Contenido

Capítulo 2 Vectores, matrices, transformaciones lineales

Capítulo 8 Funciones complejas representadas por series de potencias

INTRODUCCION AL CALCULO Y AL ANALISIS MATEMATICO

VOLUMEN II

CAPITULO 1

Funciones de varias variables y sus derivadas

Los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral, como se desarrollaron en el Volumen I, también son básicos en dos o más variables independientes. No obstante, en dimensiones superiores debe tratarse con muchos fenómenos nuevos que no tienen contraparte en lo absoluto en la teoría de las funciones de una sola variable. Por regla general, un teorema que puede probarse para funciones de *dos* variables, puede aplicarse con facilidad a funciones de más de dos variables sin cambio esencial alguno en la demostración. Por lo tanto, en lo que sigue, a menudo nos restringiremos a funciones de dos variables, en donde las relaciones pueden concebirse geométricamente con mayor facilidad, y estudiaremos las funciones de tres o más variables sólo cuando con ello se pueda entender mejor este tema; ésto también conduce a interpretaciones geométricas más simples de nuestros resultados.

1.1 Puntos y conjuntos de puntos en el plano y en el espacio

a. Sucesiones de puntos: Convergencia

Una pareja ordenada de valores (x, y) puede representarse geométricamente por el punto P que tiene a x y y como coordenadas en algún sistema coordenado cartesiano. La distancia entre dos puntos $P = (x, y)$ y $P' = (x', y')$ está dada por la fórmula

$$\overline{PP'} = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2},$$

la cual es básica para la geometría euclidiana. Se usa la noción de distancia para definir las vecindades de un punto. La *vecindad* ε de

un punto $C = (\alpha, \beta)$ consiste de todos los puntos $P = (x, y)$ cuya distancia desde C es menor que ε; geométricamente éste es el disco[1] circular con centro en C y radio ε que se describe mediante la desigualdad

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < \varepsilon^2.$$

Consideraremos *sucesiones infinitas* de puntos

$$P_1 = (x_1, y_1), \; P_2 = (x_2, y_2), \; . \; . \; . \; , \qquad P_n = (x_n, y_n), \; . \; . \; .$$

Por ejemplo, $P_n = (n, n^2)$ define una sucesión cuyos puntos se encuentran sobre la parábola $y = x^2$. No todos los puntos en una sucesión tienen que ser distintos. Por ejemplo, la sucesión infinita $P_n = (2, (-1)^n)$ sólo tiene dos elementos distintos.

La sucesión $P_1, P_2, . . .$, es *acotada* si puede hallarse un disco que contenga a todos los P_n, ésto es, si existen un punto Q y un número M tal que $\overline{P_nQ} < M$ para todo n. Así, la sucesión $P_n = (1/n, 1/n^2)$ es acotada y la sucesión (n, n^2), no acotada.

El concepto más importante relacionado con las sucesiones es el de *convergencia*. Se dice que una sucesión de puntos $P_1, P_2, . . .$ converge a un punto Q, o que

$$\lim_{n \to \infty} P_n = Q,$$

si las distancias $\overline{P_nQ}$ convergen a 0. Por tanto, $\lim_{n \to \infty} P_n = Q$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que P_n se encuentra en la vecindad ε de Q para todo $n > N$.[2]

Por ejemplo, para la sucesión de puntos definida por $P_n = (e^{-n/4} \cos n, e^{-n/4} \operatorname{sen} n)$, se tiene $\lim_{n \to \infty} P_n = (0, 0) = Q$, dado que aquí

$$\overline{P_nQ} = e^{-n/4} \longrightarrow 0 \qquad \text{para} \qquad n \longrightarrow \infty$$

Se observa que los P_n se aproximan al origen Q a lo largo de la es-

---

[1] La palabra "círculo", como se usa comúnmente, es ambigua, refiriéndose ya sea a la curva o a la región limitada por ella. Seguiremos la práctica corriente de reservar el término "círculo" sólo para la curva y el término "región circular" o "disco" para la región bidimensional. De modo semejante, en el espacio distinguimos la "esfera" (es decir, la superficie esférica) del sólido tridimensional "bola" que limita.

*De modo equivalente, cualquier disco con centro en q contiene a todos menos a un número finito de los P_n. También se usará la notación $P_n \to Q$ cuando $n \to \infty$

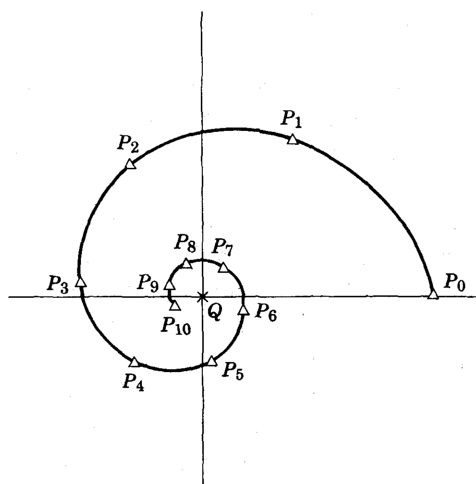


Figura 1.1 Sucesión convergente P_n.

piral logarítmica con ecuación $r = e^{-\theta/4}$ en las coordenadas polares r, θ (ver la Fig. 1.1).

La convergencia de la sucesión de puntos $P_n = (x_n, y_n)$ hacia el punto $Q = (a, b)$ significa que las dos sucesiones de números x_n y y_n *convergen por separado* y que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

En efecto, la pequeñez de P_nQ implica que tanto $x_n - a$ como $y_n - b$ son pequeñas, ya que $|x_n - a| \leqq P_nQ$, $|y_n - b| \leqq P_nQ$; inversamente,

$$\overline{P_nQ} = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \leqq |x_n - a| + |y_n - b|,$$

de modo que $P_nQ \longrightarrow 0$ cuando tanto $x_n \longrightarrow a$ como $y_n \longrightarrow b$.

Precisamente como en el caso de las sucesiones de números, puede probarse que converge una sucesión de puntos, sin conocer el límite, aplicando el *criterio intrínseco de Cauchy para la convergencia*. En dos dimensiones, este criterio afirma que: Para la convergencia de una sucesión de puntos $P_n = (x_n, y_n)$ es necesario y suficiente que, para cada $\varepsilon > 0$, se cumpla la desigualdad $\overline{P_nP_m} < \varepsilon$ para toda n, m que sean mayores que un valor apropiado $N = N(\varepsilon)$. La demostración se deduce inmediatamente aplicando el criterio de Cauchy para las sucesiones de números a cada una de las sucesiones x_n y y_n.

b. Conjuntos de puntos en el plano

En el estudio de las funciones de una sola variable x, generalmente se permite que x varíe sobre un "intervalo", el cual podría ser cerrado o abierto, acotado o no acotado. Como posibles dominios de funciones en dimensiones superiores, se tiene que considerar una gran variedad de conjuntos y se tienen que introducir términos que describan las propiedades más sencillas de tales conjuntos. Por lo común se considerarán curvas o regiones bidimensionales en el plano. En el Volumen I (Capítulo 4), se han estudiado con amplitud las curvas planas. Normalmente se dan en la forma "no paramétrica" $y = f(x)$, o bien, en la "paramétrica" por medio de una pareja de funciones $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, o bien, en la forma "implícita" mediante una ecuación $F(x, y) = 0$ (en el Capítulo 3 se tratará más acerca de las representaciones implícitas).

Además de las curvas, se tienen conjuntos *bidimensionales* de puntos, formando una *región*. Una región puede ser el plano xy completo o una porción del plano limitada por una curva simple cerrada

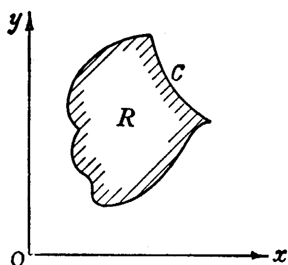


Figura 1.2 Una región simplemente conexa.

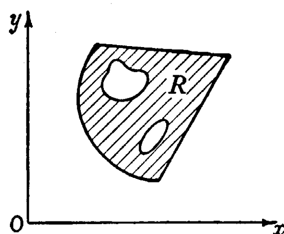


Figura 1.3 Una región triplemente conexa.

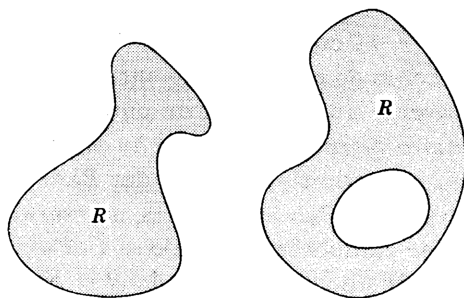


Figura 1.4 Una región R no conexa.

(formando, en este caso, una región *simplemente conexa* como se muestra en la Fig. 1.2) o por varias de esas curvas. En el último caso se dice que es una región *múltiplemente conexa,* y el número de curvas frontera da lo que se conoce como *conectividad;* por ejemplo, la Fig. 1.3, muestra una región triplemente conexa. Un conjunto plano puede no ser conexo [1] en lo absoluto, y consistir de varias porciones separadas (Fig. 1.4).

Generalmente, las curvas frontera de las regiones que van a considerarse son *seccionalmente suaves.* Es decir, cada una de esas curvas consiste de un número finito de arcos, y cada arco tiene una tangente que gira de manera continua en todos sus puntos, incluyendo los puntos extremos. Por lo tanto, tales curvas pueden tener cuando más un número finito de esquinas.

En la mayoría de los casos se describirá una región por medio de una o más desigualdades, donde la igualdad se cumple sobre alguna porción de la frontera. Los dos tipos más importantes de regiones, a las cuales recurriremos a cada momento, son las regiones rectangulares (con lados paralelos a los ejes coordenados) y los discos circulares. Una *región rectangular* (Fig. 1.5) consiste de los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen desigualdades de la forma

$$a < x < b, \qquad c < y < d;$$

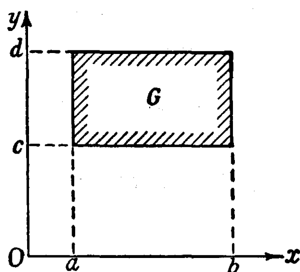


Figura 1.5 Una región rectangular

cada coordenada se restringe a un intervalo definido y el punto (x, y) varía sobre el interior del rectángulo. Como se define aquí, la región rectangular es *abierta;* es decir, no contiene a su frontera. Las curvas frontera se obtienen remplazando una o más de las desigualdades que definen la región por la igualdad, y permitiendo (pero no requiriendo) el signo igual en las otras. Por ejemplo,

[1] Véase la p. 133 respecto a una definición precisa de "conexa".

$$x = a, \qquad c \leqq y \leqq d$$

define uno de los lados del rectángulo. El rectángulo *cerrado* que se obtiene agregando todos los puntos frontera al conjunto, se describe mediante las desigualdades

$$a \leqq x \leqq b, \qquad c \leqq y \leqq d.$$

El *disco circular* con centro en (α, β) y radio r (Fig. 1.6) se da, como se vió anteriormente, por la desigualdad

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < r^2.$$

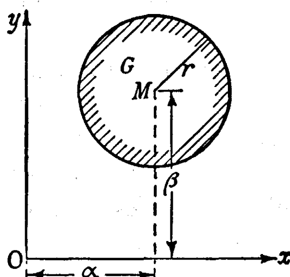


Figura 1.6 Un disco circular.

Agregando el círculo frontera a este disco "abierto", se obtiene el "disco cerrado" que se describe por

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \leqq r^2$$

c. *La frontera de un conjunto. Conjuntos cerrados y conjuntos abiertos*

Podría imaginarse la frontera de una región como si se tratara de una membrana que separa los puntos que pertenecen a la región de aquellos que no pertenecen a ella. Como se verá, esta noción intuitiva de la frontera no siempre tiene un significado. No obstante, resulta interesante resaltar el hecho de que existe una manera de definir con bastante generalidad la *frontera* de cualquier conjunto de puntos, en tal forma que, al menos, es consistente con esa noción intuitiva. Se dice que *un punto P es un punto frontera de un conjunto S de puntos si cada vecindad de P contiene tanto puntos que pertenecen a S como puntos que no pertenecen a S.* Como consecuencia, si P no es punto

frontera, existe una vecindad de P que contiene sólo un tipo de puntos; es decir, puede hallarse una vecindad de P que consista completamente de puntos de S, en cuyo caso P recibirá el nombre de *punto interior* de S, o bien, puede hallarse una vecindad de P que esté completamente libre de puntos de S, en cuyo caso P será un *punto exterior* de S. Así entonces, *para un conjunto dado S de puntos, cada punto en el plano es punto frontera o punto interior o punto exterior de S y sólo pertenece a una de estas clases.* El conjunto de puntos frontera de S forma la *frontera* de S, la que se denota mediante el símbolo ∂S.

Por ejemplo, sea S la región rectangular

$$a < x < b, \qquad c < y < d$$

Obviamente, para cualquier punto P de S puede hallarse un pequeño disco circular con centro en $P = (\alpha, \beta)$ que esté completamente contenido en S; sólo tiene que tomarse una vecindad ε de P en la cual ε sea positivo y tan pequeño que

$$a < \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon < b, \qquad c < \beta - \varepsilon < \beta + \varepsilon < d.$$

Esto demuestra que aquí cada punto de S es un punto interior. Los puntos frontera P de S son precisamente los puntos que se encuentran en cualquiera de los lados o los vértices del rectángulo; en el primer caso, la mitad de toda vecindad lo suficientemente pequeña de P pertenecerá a S y la otra mitad no. En el segundo caso, una cuarta parte de toda vecindad pertenece a S y tres cuartas partes no (Fig. 1.7).

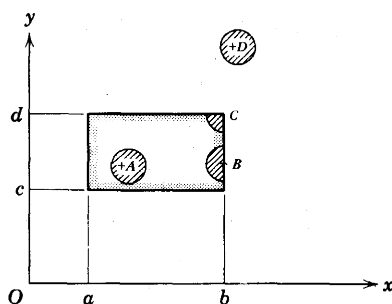


Figura 1.7. Punto interior *A*, punto exterior *D*, puntos frontera *B*, *C* de la región rectangular.

Por definición, todo punto interior P del conjunto S es necesariamente un punto de S, porque hay una vecindad de P que consiste completamente de puntos de S, y P pertenece a esa vecindad. De modo semejante, cualquier punto exterior de S definitivamente no pertenece a S. Por otra parte, los puntos frontera de un conjunto a veces pertenecen al conjunto y a veces no.[1] El rectángulo abierto

$$a < x < b, \qquad c < y < d.$$

no contiene a sus puntos frontera, mientras que el rectángulo cerrado

$$a \leqq x \leqq b, \qquad c \leqq y \leqq d$$

sí los contiene.

Por lo general, se dice que un conjunto S de puntos es *abierto* si ningún punto frontera de S pertenece a S (es decir, si S solamente consiste de puntos interiores). S recibe el nombre de *cerrado* si contiene a su frontera. A partir de cualquier conjunto S siempre se puede obtener un conjunto cerrado, agregando a S todos sus puntos frontera que no pertenezcan ya a S. Entonces se obtiene un nuevo conjunto, la *cerradura* $\bar{S}$ de S. El lector puede verificar con facilidad que la cerradura de S es un conjunto cerrado. Los puntos exteriores son exactamente aquéllos que no pertenecen a la cerradura de S. De modo semejante, se define el *interior* S^0 de S como el conjunto de puntos interiores de S, ésto es, el conjunto que se obtiene eliminando los puntos frontera de S. El interior de S es abierto.

Debe observarse que los conjuntos no tienen que ser abiertos o cerrados. Se puede construir con facilidad un conjunto S que sólo contenga parte de su frontera, tal como el rectángulo semiabierto

$$a \leqq x < b, \qquad c \leqq y < d.$$

También es importante darse cuenta que nuestra noción de frontera se aplica a conjuntos bastante generales y proporciona resultados bastante alejados de la intuición. Un ejemplo de un conjunto que en ningún sentido es una "curva" o una "región" es el conjunto S que consiste de los "puntos racionales" del plano, es decir, de aquellos puntos $P = (x, y)$ para los cuales ambas coordenadas x y y son números racionales. Evidentemente, todo disco en el plano contiene tanto puntos racionales como no racionales. Por tanto, aquí no hay

[1] Obsérvese la diferencia entre "no pertenece a S" y "exterior a S". Un punto frontera de S nunca es exterior, incluso cuando no pertenece a S.

"curva" frontera; la frontera ∂S consiste del plano completo. No existen puntos interiores ni exteriores.

Incluso en casos donde la frontera es unidimensional, no toda ella sirve para *separar* puntos interiores de exteriores. Por ejemplo, las desigualdades

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < r^2, \qquad y \neq \beta$$

describen un disco con un diámetro eliminado; aquí la frontera consiste del círculo $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ y del diámetro

$$y = \beta, \qquad |x - \alpha| < r.$$

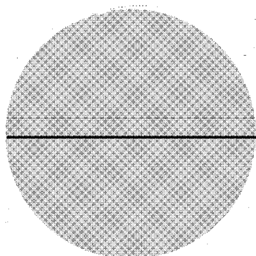


Figura 1.8 Disco con un diámetro eliminado.

Cualquier vecindad lo suficientemente pequeña de un punto en ese diámetro no contiene puntos exteriores en lo absoluto (Fig. 1.8).

d. La cerradura como conjunto de puntos límite

Las nociones de "interior", "frontera" y "exterior" de un conjunto S tienen importancia cuando se consideran los límites de sucesiones de puntos $P_1, P_2, \ldots$, de los cuales todos pertenecen al conjunto S.[1] Evidentemente, un punto Q exterior a S no puede ser el límite de la sucesión, ya que existe una vecindad de Q libre de puntos de S, lo cual evita que los P_k puedan aproximarse arbitrariamente a Q. De aquí que el límite de una sucesión de puntos en S debe ser un punto frontera o un punto interior de S. Como los puntos interiores y frontera de S forman la cerradura de S, se concluye que los *límites de sucesiones en S pertenecen a la cerradura de S.*

Inversamente, todo punto Q de la cerradura de S es en realidad el

[1] Los puntos P_k no tienen que ser *distintos* entre sí.

límite de alguna sucesión $P_1, P_2, \ldots$ de puntos de S, porque si Q es un punto de la cerradura, entonces Q pertenece a S, o bien, a su frontera. En el primer caso, se tiene trivialmente en $Q, Q, Q, \ldots$ una sucesión de puntos de S que convergen a Q. En el segundo caso, para cualquier $\varepsilon > 0$, la vecindad ε de Q contiene al menos un punto de S. Para todo número natural n es posible elegir un punto P_n de S que pertenece a la vecindad ε de Q, con $\varepsilon = 1/n$. Evidentemente, los P_n convergen a Q.

e. Puntos y conjuntos de puntos en el espacio

Una terna ordenada de números (x, y, z) puede representarse en la manera usual mediante un punto P en el espacio. Aquí, los números x, y, z, las coordenadas cartesianas de P, son las distancias (con signo) de P desde tres planos mutuamente perpendiculares. La distancia $\overline{PP'}$ entre los dos puntos $P = (x, y, z)$ y $P' = (x', y', z')$ está dada por

$$\overline{PP'} = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

La vecindad ε del punto $Q = (a, b, c)$ consiste de los puntos $P = (x, y, z)$ para los cuales $\overline{PQ} < \varepsilon$; estos puntos forman la *bola* dada por la desigualdad

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 < \varepsilon^2.$$

Las análogas a las regiones planas rectangulares son los paralelepípedos[1] rectangulares descritos por medio de un sistema de desigualdades de la forma

$$a < x < b, \qquad c < y < d, \qquad e < z < f.$$

Todas las nociones desarrolladas para los conjuntos planos —frontera, cerradura, etc.— se extienden a los conjuntos en tres dimensiones, en una manera obvia.

Cuando se trata con cuaternas ordenadas como x, y, z, w, nuestra intuición visual no puede proporcionar una interpretación geométrica. Aún así, resulta conveniente usar terminología geométrica, atribuyendo a (x, y, z, w) un "punto en el espacio tetradimensional". Las cuaternas (x, y, z, w) que satisfacen una desigualdad de la forma

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + (w - d)^2 < \varepsilon^2$$

[1]Paralelepípedo (del griego, *parallelepípedon*, de *parállelos*, paralelo, y *epípedon*, plano).

constituyen, por definición, la vecindad ε del punto (a, b, c, d). Una región rectangular[2] se describe por un sistema de desigualdades de la forma

$$a < x < b, \qquad c < y < d, \qquad e < z < f, \qquad g < w < h.$$

Por supuesto, nada existe de misterioso en esta idea de "puntos" en cuatro dimensiones; sólo es una terminología conveniente y no implica nada respecto a la realidad física del espacio tetradimensional. De hecho, no hay impedimento alguno para darle el nombre de "punto" en el espacio n-dimensional a una "n-ada" $(x_1, \ldots, x_n)$, donde n puede ser cualquier número natural. Para muchas aplicaciones es bastante útil y sugerente representar un sistema descrito por n cantidades en esta forma, o sea, por medio de un solo punto en algún espacio de dimensión superior.[3] A menudo, las analogías con interpretaciones geométricas en el espacio tridimensional proporcionan las bases para poder hacer operaciones en más de tres dimensiones.

Ejercicios 1.1

1. Es posible representar un punto (x, y) del plano por medio de un número complejo (Volumen I, p. 103) en la forma $z = x + iy$. Investigar la convergencia, para diferentes valores de z, de las sucesiones
   (a) z^n
   (b) $z^{1/n}$, donde $z^{1/n}$ se define como la *raíz n-ésima primitiva de z*, es decir, como la raíz con la amplitud positiva mínima.
2. Probar para $P_n = (x_n + \xi_n, y_n + \eta_n)$ que $\lim_{n\to\infty} P_n = (x + \xi, y + \eta)$, donde se supone que los límites $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, $\eta = \lim_{n\to\infty} \eta_n$ existen.
3. Demostrar que todo punto del disco $x^2 + y^2 < 1$ es un punto interior. ¿Se cumple también ésto para $x^2 + y^2 \leq 1$? Dar las razones.
4. Demostrar que el conjunto S de puntos (x, y) con $y > x^2$ es abierto.
5. ¿Cuál es la frontera de un segmento lineal considerado como un subconjunto del plano x, y?

---

[2]También se usan los términos "celda" e "intervalo" para describir regiones rectangulares de este tipo, en dimensiones superiores.

[3]Así, el sistema de moléculas de un gas en un recipiente puede describirse por la posición de un solo punto en un "espacio fase" con un número muy grande de dimensiones.
Yendo incluso más adelante, en algunas partes del análisis se acostumbra representar una sucesión infinita de números $x_1, x_2, \ldots$ por un punto $(x_1, x_2, \ldots)$ en un espacio con un *número infinito de dimensiones.*

Problemas 1.1

1. Sea P un punto frontera del conjunto S que no pertenece a S. Probar que existe una sucesión de puntos *distintos* $P_1, P_2, \ldots$ en S que tiene a P como límite.
2. Probar que la cerradura de un conjunto es cerrada
3. Sea P cualquier punto de un conjunto S y Q cualquier punto fuera del conjunto. Probar que el segmento rectilíneo PQ contiene un punto frontera de S.
4. Sea G el conjunto de puntos (x, y) para el cual $x < 1$, $y < 1/2$ y $y < 0$ si $x = 1/2$. ¿Contiene G sólo puntos interiores? Proporcionar la evidencia necesaria.

1.2 Funciones de varias variables independientes

a. Funciones y sus dominios

Las ecuaciones de la forma

$$u = x + y, \qquad u = x^2y^2, \qquad \text{o} \qquad u = \log(1 - x^2 - y^2)$$

asignan un *valor funcional* u a una pareja de valores (x, y). En los primeros dos ejemplos se asigna un valor de u a *cada* pareja de valores (x, y), mientras que en el tercero la correspondencia tiene significado sólo para aquellas parejas de valores (x, y) para las que se cumple la desigualdad $x^2 + y^2 < 1$.

En general, se dice que u es una *función* de las *variables independientes* x y y siempre que alguna ley f asigna un valor único de u o sea, la *variable dependiente*) a cada pareja de valores (x, y) que pertenecen a un cierto conjunto especificado, o sea, el *dominio* de la función. Así, una función $u = f(x, y)$ define una *aplicación* de un conjunto de puntos en el plano x, y —el dominio de f— sobre un cierto conjunto de puntos del eje u, el *recorrido* de f. De modo semejante, se dice que u es una función de las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si para cada conjunto de valores $(x_1, \ldots, x_n)$ que pertenecen a cierto conjunto especificado, se asigna un valor único correspondiente de u.[1]

[1] A menudo se piensa en las funciones f como si asignaran un valor a un *punto* P, en lugar de a la pareja (x,y) de coordenadas que describen a P. Entonces se escribe $f(P)$ en lugar de $f(x,y)$. Esta notación es particularmente útil cuando se define geométricamente la relación funcional entre los puntos P y los valores $f(P)$, sin hacer referencia a un sistema coordenado x, y específico.

Así, por ejemplo, el volumen $u = xyz$ de un paralelepípedo rectangular es una función de la longitud de los tres lados x, y, z; la declinación magnética es una función de la latitud, la longitud y el tiempo; la suma $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ es una función de los n términos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Se debe observar que el dominio de una función es una parte indispensable de su descripción. En los casos en donde $u = f(x, y)$ se da mediante una expresión explícita, resulta natural tomar como dominio de f todas las (x, y) para las que esta expresión tiene sentido. No obstante, se puede definir por "restricción" las funciones dadas por la misma expresión, pero que tengan dominios menores. Así, se puede usar la fórmula $u = x^2 + y^2$ para definir una función con dominio $x^2 + y^2 < 1/2$.

Precisamente como en el caso de funciones de una variable, una correspondencia funcional $u = f(x, y)$ asocia un valor *único* de u con el sistema de variables independientes x, y. De esta manera, ningún valor funcional es asignado por una expresión analítica que sea multiforme, tal como arc tan y/x, a menos que se especifique, por ejemplo, que el "arc tangente" es válido para la *rama principal* con valores que se encuentren entre $-\pi/2$ y $+\pi/2$ (ver el Volumen I, p. 214); además, tiene que excluirse la recta $x = 0$.[2]

b. Los tipos más sencillos de funciones

Precisamente como en el caso de una variable independiente, las funciones más sencillas de más de una variable son las funciones *enteras racionales* o *polinomios*. El polinomio más general del primer grado, o función *lineal*, tiene la forma

$$u = ax + by + c,$$

donde a, b y c son constantes. El polinomio general de segundo grado tiene la forma

[2]Tomando el valor principal, se ve que $u = \text{arc tan}\, y/x$ para $x > 0$ no es otra cosa sino el ángulo polar del punto (x, y) medido a partir del eje x positivo. Este ángulo polar puede aún definirse geométricamente de una manera obvia como una función univaluada con valores entre $-\pi$ y π si se excluye precisamente el origen y los puntos sobre el eje x negativo, pero entonces el ángulo polar ya no está dado por arc tan y/x en la región extendida, si se entiende que el arco tangente se refiere a la rama principal.

$$u = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

Su dominio es el plano x, y completo. El polinomio general de cualquier grado es una suma de un número finito de términos $a_{mn}x^m y^n$ (llamados *monomios*), donde m y n son enteros no negativos y los coeficientes a_{mn} son arbitrarios.

El *grado* del monomio $a_{mn}x^m y^n$ es la suma $m + n$ de los exponentes de x y y, siempre que el coeficiente a_{mn} no se anule. El grado de un polinomio se determina por el grado mayor de cualquiera de los monomios con que tenga un coeficiente no anulable (después de combinar los términos con las mismas potencias de x y y). Un polinomio que consiste de monomios que tienen el mismo grado N se llama *polinomio homogéneo* o *forma* de grado N. Así, $x^2 + 2xy$, o bien, $3x^3 + (7/5)\, x^2y + 2y^3$ son formas.

Extrayendo las raíces de las funciones racionales, se obtienen ciertas funciones *algebraicas*[1], por ejemplo,

$$u = \sqrt{\frac{x - y}{x + y}} + \sqrt[3]{\frac{(x + y)^2}{x^3 + xy}}\,.$$

La mayoría de las funciones más complicadas de varias variables que se usarán aquí se pueden describir en términos de las funciones bien conocidas de una variable, tal como

$$u = \operatorname{sen}\,(x \operatorname{arc\,cos} y) \quad \text{o bien} \quad u = \log_x y.$$

c. *Representación geométrica de las funciones*

Tal como se representan las funciones de una variable mediante curvas, se pueden representar las funciones de dos variables, geométricamente, por medio de superficies. Con este fin, considérese un sistema coordenado rectangular x, y, u en el espacio y márquese por encima de cada punto (x, y) del dominio R de la función en el plano x, y, el punto P con la tercera coordenada $u = f(x, y)$. Conforme el punto (x, y) varía sobre la región R, el punto P describe una superficie en el espacio. Se toma esta superficie como la representación geométrica de la función.

Inversamente, en la geometría analítica, las superficies en el espacio se representan por funciones de dos variables, de modo que en-

[1] Véase la p. 275 respecto a una definición general del término "función algebraica".

tre tales superficies y las funciones de dos variables existe una relación recíproca. Por ejemplo, a la función

$$u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

le corresponde el hemisferio que se encuentra por encima del plano x, y, con radio unitario y centro en el origen. A la función $u = x^2 + y^2$ le corresponde un llamado *paraboloide de revolución*, que se obtiene haciendo girar a la parábola $u = x^2$ alrededor del eje u (Fig. 1.9). A las funciones $u = x^2 - y^2$ y $u = xy$, les corresponden *paraboloides hiperbólicos* (Fig. 1.10). La función lineal $u = ax + by + c$ tiene un plano en el espacio como "gráfica". Si en la función $u = f(x, y)$ no aparece una de las variables independientes, digamos y, de modo que u sólo depende de x, o sea $u = g(x)$ la función se representa en el espacio x, y, u mediante una superficie cilíndrica generada por las perpendiculares al plano u,x en los puntos de la curva $u = g(x)$.

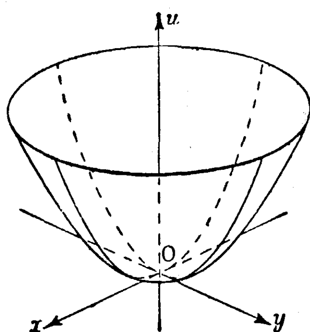


Figura 1.9 $u = x^2 + y^2$.

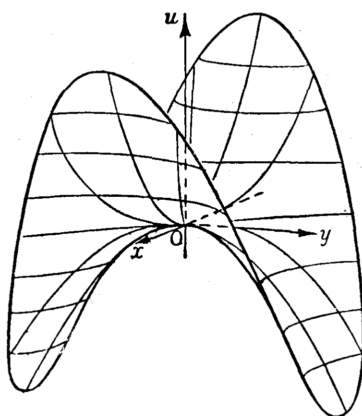


Figura 1.10 $u = x^2 - y^2$.

Sin embargo, esta representación por medio de coordenadas rectangulares tiene dos desventajas. Primero, la imagen geométrica fracasa cuando se trata de tres o más variables independientes. Segundo, incluso para dos variables independientes, a menudo resulta más conveniente limitar la discusión al plano x,y únicamente, ya que en el plano se pueden trazar esquemas y realizar construcciones geométricas sin dificultad. Desde este punto de vista, a veces es preferible otra representación geométrica de una función de dos variables, por medio de líneas de contorno. En el plano x,y se toman

todos los puntos para los cuales $u = f(x, y)$ tiene un valor constante, digamos $u = k$. Por lo común, estos puntos se encontrarán sobre una curva o curvas, la llamada *línea de contorno* o *curva de nivel,* para el valor constante dado k de la función. También pueden obtenerse estas curvas, cortando la superficie $u = f(x, y)$ por medio del plano $u = k$ paralelo al plano x, y y proyectando las curvas de intersección perpendicularmente sobre el plano x, y.

El sistema de estas líneas de contorno, marcadas con los valores correspondientes $k_1, k_2, \ldots$ de la altura k, nos da una representación de la función. En la práctica, se asignan valores en progresión aritmética a k, digamos $k = \nu h$, donde $\nu = 1, 2, \ldots$ Entonces la distancia entre las líneas de contorno proporciona una medida de la inclinación de la superficie $u = f(x, y)$, porque entre dos líneas consecutivas cualesquiera el valor de la función cambia en la misma cantidad. La función sube o baja con rapidez donde las líneas de contorno están muy próximas; en cambio, donde las líneas se separan, la superficie es achatada. Este es el principio con el que se construyen los mapas topográficos como los del U.S. Geological Survey (Servicio Geográfico y Geológico de los E.E.U.U.)

En este método, la función lineal $u = ax + by + c$ se representa por un sistema de rectas paralelas $ax + by + c = k$. La función $u = x^2 + y^2$ se representa por un sistema de círculos concéntricos (ver la Fig. 1.11). La función $u = x^2 - y^2$, cuya superficie tiene "forma de silla de montar" (Fig. 1.10), se representa por el sistema de hipérbolas que se muestra en la Fig. 1.12.

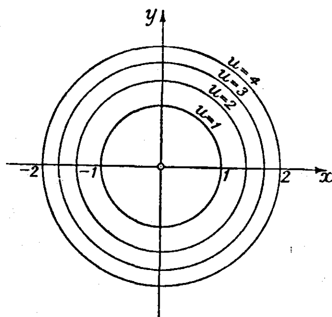


Figura 1.11 Líneas de contorno de $u = x^2 + y^2$.

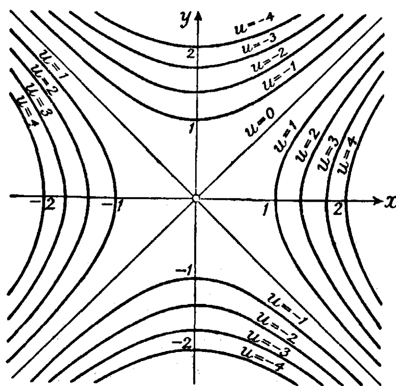


Figura 1.12 Líneas de contorno de $u = x^2 - y^2$.

El método de representar la función $u = f(x, y)$ mediante líneas de contorno tiene la ventaja de poder extenderse hacia funciones de tres variables independientes. Entonces, en lugar de las líneas de contorno, se tienen las *superficies de nivel* $f(x, y, z) = k$, donde k es una constante a la cual se le pueden asignar cualquier sucesión apropiada de valores. Por ejemplo, las superficies de nivel para la función $u = x^2 + y^2 + z^2$ son esferas concéntricas alrededor del origen del sistema coordenado x, y, z

Ejercicios 1.2

1. Evaluar las siguientes funciones en los puntos indicados:

(a) $z = \left(\dfrac{\cot \operatorname{arc} (x + y)}{\tan \operatorname{arc} (x - y)}\right)^3$ para $x = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$, $y = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$

(b) $w = e^{\cos z(x+y)}$, para $x = y = \dfrac{\pi}{2}, z = -1$

(c) $z = y^{x \cos xy}$, $x = e$, $y = \log \pi$

(d) $z = \cosh (x + y)$, $x = \log \pi$, $y = \log \dfrac{1}{2}$

(e) $z = \dfrac{x + y}{x - y}$, $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{3}$.

2. Al igual que en el Volumen I, a menos que se haga una excepción explícita, se considera el dominio de una función definida mediante una expresión formal como el conjunto de todos los puntos para los cuales la expresión tiene significado. Dar el dominio y el recorrido de cada una de las siguientes funciones:

(a) $z = \sqrt{x + y}$

(b) $z = \sqrt{2x - y^2}$

(c) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x + y}}$

(d) $z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$

(e) $z = \log (x + 5y)$

(f) $z = \sqrt{x \operatorname{sen} y}$

(g) $w = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$

(h) $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x + y}$

(i) $z = \sqrt{3 - x^2 - 2y^2}$

(j) $z = \sqrt{-x^2 - y^2}$

(k) $z = \log (x^2 - y^2)$

(l) $z = \tan \operatorname{arc} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$

(m) $z = \tan \operatorname{arc} \dfrac{x}{x + y}$

(n) $z = \cos \operatorname{arc} \tan \dfrac{y}{x}$

(o) $z = \operatorname{arc} \cos \log (x + y)$

(p) $z = \sqrt{y \cos x}$.

3. ¿Cuál es el número de coeficientes de un polinomio de grado n en dos variables ? ¿En tres variables? ¿En k variables?

4. Para cada una de las funciones siguientes, hacer un esquema de las líneas de contorno correspondientes a $z = -2, -1, 0, 1, 2, 3$:

   (a) $z = x^2y$
   (b) $z = x^2 + y^2 - 1$
   (c) $z = x^2 - y^2$
   (d) $z = y^2$
   (e) $z = y\left(1 - \dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)$.

5. Trazar las líneas de contorno para $z = \cos(2x + y)$ correspondientes a $z = 0, \pm 1, \pm 1/2$.
6. Hacer un esquema de las superficies definidas por

   (a) $z = 2xy$
   (b) $z = x^2 + y^2$
   (c) $z = x - y$.
   (d) $z = x^2$
   (e) $z = \operatorname{sen}(x + y)$.

7. Encontrar las curvas de nivel de la función

$$z = \log \frac{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

8. Hallar las superficies sobre las cuales la función $u = 2(x^2 + y^2)/z$ es constante.

1.3 Continuidad

a. Definición

Como en la teoría de las funciones de una sola variable, el concepto de continuidad figura de modo prominente cuando se consideran funciones de varias variables. La proposición de que la función $u = f(x, y)$ es continua en el punto (ξ, η) debe significar, hablando en términos generales, que para todos los puntos (x, y) cercanos a (ξ, η), el valor de $f(x, y)$ sólo difiere un poco del valor $f(\xi, \eta)$. Esta idea se expresa de manera más precisa como sigue: *Si f tiene el dominio R y $Q = (\xi, \eta)$ es un punto de R, entonces f es continua en Q si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que*

(1) $$|f(P) - f(Q)| = |f(x, y) - f(\xi, \eta)| < \varepsilon$$

para todo $P = (x, y)$ *en* R *para el cual**

$$(2) \qquad \overline{PQ} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} < \delta.$$

Si una función es continua en cada uno de los puntos de un conjunto D de puntos, se dice que es continua en D.

Los hechos siguientes son casi obvios: La suma, diferencia y producto de funciones continuas también son continuos. El cociente de funciones continuas define una función continua en los puntos donde el denominador no se anula (para la demostración ver la siguiente, sección, p. 47). En particular, todos los polinomios son continuos y todas las funciones racionales son continuas en los puntos donde el denominador no se anula. Funciones continuas de funciones continuas son a su vez continuas (ver p. 47).

Una función de varias variables puede tener discontinuidades de tipo mucho más complicado que una función de una sola variable. Por ejemplo, las discontinuidades pueden ocurrir a lo largo de arcos completos de curvas, no sólo en puntos aislados. Este es el caso para la función definida por

$$u = y/x \quad \text{para} \quad x \neq 0; \qquad u = 0 \quad \text{para} \quad x = 0,$$

la cual es discontinua a lo largo de toda la recta $x = 0$. Es más, una función $f(x, y)$ puede ser continua en x para cada valor fijo de y y continua en y para cada valor fijo de x, y, sin embargo, ser discontinua como una función del punto (x, y). Esto puede ejemplificarse mediante

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad \text{para} \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Para cualquier $y \neq 0$, fija, es obvio que esta función es continua como una función de x, ya que el denominador no puede anularse. Para $y = 0$, se tiene $f(x, 0) = 0$, que también es continua como una función de x. De modo semejante, $f(x, y)$ es continua como una función de y para cualquier x fija. Pero en cada punto de la recta $y = x$, excepto en el punto $x = y = 0$ se tiene $f(x, y) = 1$ y se tienen pun-

*En lugar de confinar a (x, y) en un pequeño disco con centro en (ξ, η) podría usarse un pequeño cuadrado. Así, la condición (2) en la definición de continuidad puede remplazarse por

$$(2') \qquad |x - \xi| < \delta \quad \text{y} \quad |y - \eta| < \delta.$$

tos de esta recta arbitrariamente próximos al origen. De aquí que $f(x, y)$ es discontinua en el punto (0, 0).

Precisamente como en el caso de funciones de una sola variable, se dice que una función $f(P) = f(x, y)$ es *uniformemente continua* en el conjunto R del plano x, y si f está definida en los puntos de R y si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon)$ positivo tal que $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$ para dos puntos cualesquiera P, Q en R de distancia $< \delta$.[1] La cantidad $\delta = \delta(\varepsilon)$ se llama *módulo de continuidad* para f. Se tiene el teorema básico:

Una función f que está definida y es continua en un conjunto cerrado y acotado R es uniformemente continua en R. (La demostración se encuentra en el Apéndice de este capítulo.)

El caso en el que puede hallarse un módulo de continuidad proporcional a ε (ver el Volumen I, p. 43) es de suma importancia. Se dice que una función $f(P)$ definida en R es *continúa según Lipschitz* si existe una constante L tal que

$$(3) \qquad |f(P) - f(Q)| \leqq L\,\overline{PQ} \qquad \text{para todos los puntos } P, Q \text{ en } R.$$

(L se llama "constante de Lipschitz"; la relación (3) es la condición de Lipschitz".) Es evidente que una función f continua según Lipschitz es uniformemente continua y tiene a $\delta = \varepsilon/L$ como módulo de continuidad.[2]

b. El concepto de límite de una función de varias variables

La noción de límite de una función está íntimamente relacionada con la noción de continuidad. Supongamos que $f(x, y)$ es una función con dominio R. *Sea* $Q = (\xi, \eta)$ un punto de la cerradura de R. Se dice que *f tiene el límite L cuando (x, y) tiende hacia* (ξ, η) *y se escribe*

[1] El requerimiento esencial que hace *uniforme* a la continuidad es que δ dependa de ε pero no de P o de Q.

[2] La clase aún más amplia de funciones f "continuas según Hölder" se obtiene cuando se remplaza la condición de Lipschitz (3) por la condición de Hölder

$$|f(P) - f(Q)| \leqq L\,\overline{PQ}^{\alpha} \qquad \text{para todo } P, Q \text{ en R}.$$

L y α son constantes y $0 < \alpha \leqq 1$ (véase el Volumen I, p 44). Estas funciones también son uniformemente continuas y puede elegirse como módulo de continuidad a la cantidad

$$\delta = (\varepsilon/L)^{1/\alpha}$$

(4) $$\lim_{(x,y)\to(\xi,\eta)} f(x, y) = L \quad \text{o bien} \quad \lim_{P\to Q} f(P) = L,$$ [1]

si para cada $\varepsilon > 0$ puede hallarse una vecindad

(5) $$\overline{PQ} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} < \delta$$

de (ξ, η) tal que

$$|f(P) - L| = |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

para todo $P = (x, y)$ que pertenezca a R en esa vecindad.[2]

En el caso de que el punto (ξ, η) pertenezca al dominio de f, se tiene en $(x, y) = (\xi, \eta)$ un punto de R que satisface (5) para todo $\delta > 0$. Entonces, en particular, (4) implica que

$$|f(\xi, \eta) - L| < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$ y de aquí que $L = f(\xi, \eta)$. Pero entonces, por definición, la relación

$$\lim_{(x,y)\to(\xi,\eta)} f(x, y) = f(\xi, \eta)$$

es idéntica a la condición para la continuidad de f en (ξ, η). De aquí que *la continuidad de la función f en el punto (ξ, η) es equivalente a la proposición de que f está definida en (ξ, η) y que $f(x, y)$ tiene el límite $f(\xi, \eta)$ cuando (x, y) tiende a (ξ, η).*

Si f no está definida en el punto frontera (ξ, η) de su dominio pero tiene un límite L cuando $(x, y) \to (\xi, \eta)$, puede extenderse naturalmente la definición de f al punto (ξ, η), poniendo $f(\xi, \eta) = L$; entonces la función f extendida en esta forma será continua en (ξ, η). Si $f(x, y)$ es continua en su dominio R, puede extenderse la definición de f como límite no únicamente a un solo punto frontera (ξ, η) sino simultáneamente a todos los puntos frontera de R para los cuales f tiene un límite. Una vez más, la función extendida que resulta es continua, como el lector puede verificar como un ejercicio. Tómese, por ejemplo la función

[1] O bien, $\lim f(x, y) = L$ para $(x, y) \to (\xi, \eta)$ o también $\lim_{\substack{x\to\xi \\ y\to\eta}} f(x, y) = L$.

[2] La noción no tiene sentido para puntos (ξ, η) *exteriores* a R, ya que entonces existen puntos arbitrariamente próximos a (ξ, η) en los que f esté definida, y podría considerarse como límite a todo L.

$$f(x, y) = e^{-x^2/y}$$

definida para toda (x, y) con $y > 0$. Obviamente, esta función es continua en todos los puntos de su dominio R, el semiplano superior. Considérese un punto frontera $(\xi, 0)$. Para $\xi \neq 0$, evidentemente se tiene

$$\lim_{(x, y)\to(\xi, \eta)} f(x, y) = \lim_{s\to\infty} e^{-s} = 0$$

cuando se restringe y a valores positivos. Si, entonces, se define la función extendida $f^*(x, y)$ por

$$f^*(x, y) = f(x, y) = e^{-x^2/y}$$

para $y > 0$ y toda x, y por

$$f^*(x, 0) = 0$$

para $x \neq 0$, la función f^* será continua en su dominio R^*, donde R^* es el semiplano superior cerrado $y \geqq 0$ con la excepción del punto $(0, 0)$. En el origen f^* no tiene límite, y de aquí que no es posible definir $f^*(0, 0)$ en tal forma que la extensión sea continua en el origen. En efecto, para (x, y) sobre la parábola $y = kx^2$, se tiene

$$f(x, y) = e^{-1/k}.$$

Tendiendo al origen a lo largo de parábolas diferentes se obtienen valores límite diferentes, de modo que no existe un límite único de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to 0$.

También puede relacionarse el concepto de *límite de una función* $f(x, y)$ con el de *límite de una sucesión* (ver el Volumen I, p. 82). Supóngase que f tiene el dominio R y

$$\lim_{(x, y)\to(\xi, \eta)} f(x, y) = L.$$

Sea $P_n = (x_n, y_n)$ para $n = 1, 2, \ldots$, cualquier sucesión de puntos en R para la cual $\lim_{n\to\infty} P_n = (\xi, \eta)$. Entonces la sucesión de números $f(x_n, y_n)$ tiene el límite L. Porque $f(x, y)$ diferirá arbitrariamente poco de L para toda (x, y) en R suficientemente próxima a (ξ, η), y (x_n, y_n) estará suficientemente próxima a (ξ, η) tan sólo haciendo n lo suficientemente grande. Recíprocamente, $\lim_{n\to\infty} f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (\xi, \eta)$ existe y tiene el valor L si para cada sucesión de puntos (x_n, y_n) en R

con límite (ξ, η) se tiene $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = L$. La demostración puede ser proporcionada fácilmente por el lector. Si nos restringimos a los puntos (ξ, η) en el dominio de f, se obtiene la proposición de que *la continuidad de f en su dominio R significa precisamente que*

(6) $$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(\xi, \eta)$$

siempre que $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (\xi, \eta)$ *o bien que*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n),$$

donde sólo se consideran las sucesiones (x_n, y_n) en R que convergen y tienen sus límites en R. Entonces, en esencia, la continuidad de una función f nos permite el intercambio del símbolo para f con el de límite.

Es evidente que las nociones de límite y de continuidad de una función se aplican con igual propiedad cuando el dominio de f no es una región bidimensional sino una curva o cualquier otro conjunto de puntos. Por ejemplo, la función

$$f(x + y) = (x + y)!$$

está definida en el conjunto R que consiste de todas las rectas $x + y = \text{const.} = n$, donde n es un entero positivo. Es obvio que f es continua en su dominio R.

Se mencionó con anterioridad (p. 42) que cuando $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son continuas en un punto (ξ, η), entonces $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, y, para $g(\xi, \eta) \neq 0$, también f/g son continuas en (ξ, η). Estas reglas se deducen inmediatamente a partir del enunciado de la continuidad en términos de la convergencia de sucesiones. Para cualquier sucesión (x_n, y_n) de puntos que pertenecen a los dominos a f y g y que converge a (ξ, η), por (6) se tiene

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(\xi, \eta), \qquad \lim_{n\to\infty} g(x_n, y_n) = g(\xi, \eta).$$

Entonces, se concluye la convergencia de $f(x_n, y_n) + g(x_n, y_n)$, etc., a partir de las reglas para operar con sucesiones (Volumen I, p. 72).

c. *El orden de anulación de una función*

Si la función $f(x, y)$ es continua en el punto (ξ, η), la diferencia $f(x, y) - f(\xi, \eta)$ tiende a 0 conforme x tiende a ξ y y tiende a η. In-

troduciendo las nuevas variables $h = x - \xi$ y $k = y - \eta$, se puede expresar ésto como sigue: La función $\phi(h, k) = f(\xi + h, \eta + k) - f(\xi, \eta)$ de las variables h y k tiende a 0 a medida que h y k tienden hacia 0.

Con frecuencia encontraremos funciones $\phi(h, k)$ que tienden hacia cero conforme h y k lo hacen. Como en el caso de una variable independiente, para muchos fines resulta útil describir el comportamiento de $\phi(h, k)$ cuando $h \to 0$ y $k \to 0$ con más precisión, distinguiendo entre diferentes "órdenes de anulación" y "órdenes de magnitud" de $\phi(h, k)$. Con este fin, se basan las comparaciones en la distancia

$$\rho = \sqrt{h^2 + k^2} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

del punto con coordenadas $x = \xi + h$ y $y = \eta + k$ desde el punto con coordenadas ξ y η y se hace uso de la definición siguiente:

Una función $\phi(h, k)$ se anula conforme $\rho \to 0$ por lo menos en el mismo orden que $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$, siempre que exista una constante C independiente de h y k tal que se cumpla la desigualdad

$$\left|\frac{\phi(h, k)}{\rho}\right| \leqq C$$

para todos los valores lo suficientemente pequeños de ρ; es decir, siempre que exista un $\delta > 0$ tal que se cumpla la desigualdad para todos los valores de h y k tales que $0 < \sqrt{h^2 + k^2} < \delta$. Entonces se escribe simbólicamente: $\phi(h,k) = O(\rho)$. Es más, se dice que $\phi(h, k)$ *se anula para un orden superior*[1] *a* ρ *si el cociente* $\phi(h, k)/\rho$ *tiende a 0* conforme $\rho \to 0$. Esto se expresará mediante la notación simbólica $\phi(h\ k) = o(\rho)$ cuando $(h, k) \to 0$ (ver el Volumen I, p. 253, donde se explican los símbolos "o" y "O" para las funciones de una sola variable).

Consideremos algunos ejemplos. Como

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leqq 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leqq 1,$$

las componentes h y k de la distancia ρ en la dirección de los ejes x y y se anulan por lo menos en el mismo orden que la propia distancia.

[1] Con el fin de evitar confusiones, señalaremos expresamente que un orden *superior* de anulación cuando $\rho \to 0$ implica valores *menores* en la vecindad de $\rho = 0$; por ejemplo, ρ^2 se anula en un orden superior a ρ y ρ^2 es menor que ρ cuando ρ está próximo a 0.

Lo mismo es cierto para una función lineal homogénea $ah + bk$ con constantes a y b o para la función ρ sen Para valores fijos α mayores que 1, la potencia ρ^α de la distancia se anula en un orden superior a ρ; simbólicamente, $\rho^\alpha = o(\rho)$ para $\alpha > 1$. De modo semejante, un polinomio cuadrático homogéneo $ah^2 + bhk + ck^2$, en las variables h y k, se anula en un orden superior a ρ conforme $\rho \to 0$

$$ah^2 + bhk + ck^2 = o(\rho).$$

En forma más general, se usa la definición siguiente. Si se define la función de comparación $\omega(h, k)$ para todos los valores diferentes de cero de (h, k) en un círculo suficientemente pequeño alrededor del origen, y que no sea igual a cero, entonces $\phi(h, k)$ *se anula por lo menos en el mismo orden que* $\omega(h, k)$ conforme $\rho \to 0$ si para alguna constante C elegida apropiadamente, se cumple la relación

$$\frac{\phi(h, k)}{\omega(h, k)} \leqq C$$

en una vecindad del punto $(h, k) = (0, 0)$. Esto se indica por medio de la ecuación simbólica $\phi(h, k) = O(\omega(h, k))$. De modo semejante, $\phi(h$ $k)$ *se anula en un orden superior a* $\omega(h, k)$, o bien, $\phi(h, k) = o(\omega(h, k))$, si $\dfrac{\phi(h, k)}{\omega(h, k)} \to 0$ cuando $\rho \to 0$.

Por ejemplo, el polinomio homogéneo $ah^2 + bhk + ck^2$ por lo menos es del mismo orden que ρ^2, ya que

$$|ah^2 + bhk + ck^2| \leqq \left(|a| + \frac{1}{2}|b| + |c|\right)(h^2 + k^2)$$

También $\rho = o(1/|\log \rho|)$, ya que $\lim_{\rho\to 0} (\rho \log \rho) = 0$ (Volumen I, p. 252).

Ejercicios 1.3

1. La función $z = (x - y)/(x + y)$ es discontinua a lo largo de $y = -x$. Hacer un esquema de las curvas de nivel de su superficie para $z = 0, \pm 1, \pm 2$. ¿Cómo se ven las curvas de nivel para $z = \pm m$, y m grande?
2. Examinar la continuidad de la función $z = (x^2 + y) - \sqrt{x^2 + y^2}$, donde $z = 0$ para $x = y = 0$. Hacer un esquema de las curvas de nivel $z = k$ ($k = -4, -2, 0, 2, 4$). Presentar (en una gráfica) el comportamiento de z como una función de x únicamente, para $y = -2, -1, 0, 1, 2$. De modo

semejante, presentar el comportamiento de z como una función de y únicamente, para $x = 0, \pm 1, \pm 2$. Por último, presentar el comportamiento de z como una función de ρ únicamente, cuando θ es constante (siendo ρ, θ coordenadas polares).

3. Verificar que las funciones

   (a) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$
   (b) $g(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

   son continuas en el origen, determinando el módulo de continuidad $\delta(\varepsilon)$. ¿En qué orden se anula cada función en el origen?

4. Demostrar que las funciones siguientes son continuas:

   (a) $\operatorname{sen}(x^2 + y)$

   (b) $\dfrac{\operatorname{sen} xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

   (c) $\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

   (d) $x^2 \log (x^2 + y^2)$

   donde, en cada caso, la función se define en $(0, 0)$ como igual al límite de la expresión dada.

5. Hallar un módulo de continuidad, $\delta = \delta(\varepsilon, x, y)$, para las funciones continuas

   (a) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + 2y^2}$

   (b) $f(x, y) = \sqrt{1 + e^{xy}}$.

6. ¿Dónde es discontinua la función $z = 1/(x^2 - y^2)$?
7. ¿Dónde es discontinua la función $z = \tan \pi y / \cos \pi x$?
8. ¿Para qué conjunto de valores (x, y) es continua la función $z = \sqrt{y \cos x}$?
9. Demostrar que la función $z = 1/(1 - x^2 - y^2)$ es continua en el disco unitario $x^2 + y^2 < 1$.
10. Encontrar la condición para que el polinomio

$$P = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

   tenga exactamente el mismo orden que ρ^2 en la vecindad de $x = 0$, $y = 0$ (es decir, que tanto P/ρ^2 como ρ^2/P sean acotados).

11. Determinar si las funciones siguientes son continuas o no, y si no lo son, dónde son discontinuas:

   (a) $\operatorname{sen} \dfrac{y}{x}$

   (b) $\dfrac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$

   (c) $\dfrac{x^3 + y^2}{x^3 + y^3}$

(d) $\dfrac{x^3 + y^2}{x^2 + y}$.

12. Demostrar que las funciones

$$f(x, y) = \frac{x^4y^4}{(x^2 + y^4)^3}, \qquad g(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2 - x}$$

tienden a 0 si (x, y) se aproxima al origen a lo largo de cualquier recta, pero que f y g son discontinuas en el origen.

13. Determinar si las funciones siguientes tienen límite en $x = y = 0$ y dar el límite cuando exista.

(a) $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

(b) $\dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$

(c) $\dfrac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2 + 4xy + y^2}$

(d) $-\dfrac{|x - y|}{x^2 - 2xy + y^2}$

(e) $\exp[-|x - y|/(x^2 - 2xy + y^2)]$

(f) $|x|^y$

(g) $|x|^{|1/y|}$

(h)* $\dfrac{|y|^{|x|}\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} + |y/x|}$

14. Hallar un módulo de continuidad $\delta(\varepsilon)$ para aquellas funciones del Ejercicio 13 que tengan límite en $x = y = 0$, donde las funciones están definidas en el origen por medio de sus valores límite.

15. Demostrar que $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2)/(x^2 + y^2 + z^2)$ no es continua en $(0, 0, 0)$.

16. Probar que si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son, cada uno, polinomios de grado $n > 0$ que se anulan en el origen.

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

no es continua en el origen.

17. Hallar los límites de las expresiones siguientes conforme (x, y) tiende a $(0, 0)$ en una forma arbitraria:

(a) $\dfrac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

(b) $\dfrac{\operatorname{sen}(x^4 + y^4)}{x^2 + y^2}$

(c) $\dfrac{e^{-1/(x^2+y^2)}}{x^4 + y^4}$.

18. Demostrar que la función $z = 3(x - y)/(x + y)$ puede tender hacia cualquier límite conforme (x, y) tiende hacia $(0, 0)$. Dar ejemplos de las variaciones de (x, y) tales que

(a) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} z = 2$

(b) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} z = -1$

(c) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} z$ no existe

19. Si $f(x, y) \to 0$ conforme $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de todas las rectas que pasan por el origen, $f(x, y) \to 0$ conforme $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de cualquier trayectoria?
20. Investigar el comportamiento de $z = y \log x$; en una vecindad del origen (0, 0).
21. Para $z = f(x, y) = (x^2 - y)/2x$, trazar las gráficas de

(a) $z = f(x, x^2)$

(b) $z = f(x, 0)$

(c) $z = f(x, 1)$

(d) $z = f(x, x)$

¿Existe el límite de $f(x, y)$ conforme $(x, y) \to (0, 0)$?

22. Dar una interpretación geométrica de la proposición siguiente: $\phi(h, k)$ se anula con el mismo orden que $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$.

Problemas 1.3

1. Considérese la función continua f extendida a la función f^* definida de modo que $f^* = f$ en el dominio de f y $f^*(Q) = \lim_{P \to Q} f(P)$ para todos los puntos Q sobre la frontera de f donde el límite existe. Probar. que f^* es continua.
2. Probar que lím $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (\xi, \eta)$ existe y tiene el valor L si y sólo si, para cada sucesión de puntos (x_n, y_n) en el dominio de f con límite (ξ, η) se tiene $\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = L$.

1.4 Las derivadas parciales de una función

a. Definición. Representación geométrica

Si en una función de varias variables se asignan valores numericos definidos a todas excepto a una de las variables y sólo se deja variar a esa variable, digamos x, la función se transforma en una función de una sola variable. Considérese una función $u = f(x, y)$ de las dos variables x y y y asígnese a y un valor fijo definido $y = y_0 = c$. La

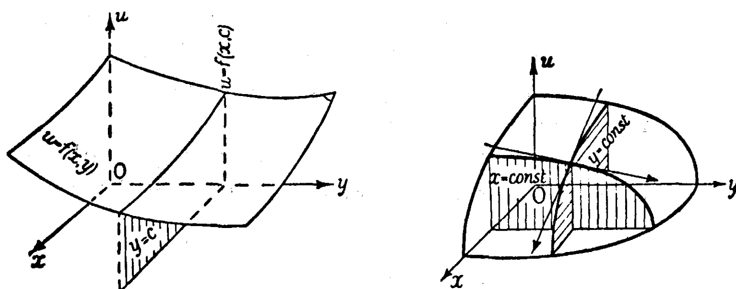


Figura 1.13 y Figura 1.14 Seccciones de $u = f(x, y)$.

función resultante $u = f(x, y_0)$ de la sola variable x puede representarse geométricamente cortando la superficie $u = f(x, y)$ mediante el plano $y = y_0$ (ver las Figs. 1.13 y 1.14). La curva de intersección así formada en el plano se representa por la ecuación $u = f(x, y_0)$. Si se deriva esta función en la manera usual, en el punto $x = x_0$, suponiendo que f está definida en una vecindad de (x_0, y_0) y que la derivada existe,[1] se obtiene la *derivada parcial de* $f(x, y)$ *con respecto a* x *en el punto* (x_0, y_0):

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Geométricamente, esta derivada parcial denota la tangente del ángulo entre una paralela al eje x y la recta tangente a la curva $u = f(x, y_0)$. Por lo tanto, es la *pendiente de la superficie* $u = f(x, y)$ *en la dirección del eje* x.

Se usan varias notaciones diferentes para representar estas derivadas parciales, una de las cuales es la siguiente:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0).$$

Si se desea hacer resaltar que la derivada parcial es el límite de un cociente de diferencias, se la denota por

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{o} \quad \frac{\partial}{\partial x} f.$$

[1] No trataremos de definir una derivada en los puntos frontera del dominio (excepto, en ocasiones, como límite de los valores de las derivadas parciales cuando se aproxima el punto frontera por medio de puntos interiores).

Aquí se usa el símbolo especial ∂ en lugar de la d ordinaria usada en la derivación de funciones de una variable, con el fin de indicar que se trata con una función de varias variables y se está derivando con respecto a una de ellas.

Para algunos fines resulta conveniente usar el símbolo D de Cauchy (mencionado en la p. 158 del Volumen I) y escribir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_x f,$$

pero nosotros rara vez usaremos este símbolo.

Exactamente en la misma forma se define la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a y en el punto (x_0, y_0), por la relación

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = f_y(x_0, y_0) = D_y f(x_0, y_0).$$

Esto representa la pendiente de la curva de intersección de la superficie $u = f(x, y)$ con el plano $x = x_0$ perpendicular al eje x (Fig. 1.14).

Pensemos ahora en el punto (x_0, y_0), — considerado hasta ahora fijo — como variable y, en consecuencia, omitamos los subíndices 0. En otras palabras, pensemos que se lleva a cabo la derivación en cualquier punto (x, y) de la región de definición de $f(x, y)$. Entonces las dos derivadas son ellas mismas funciones de x y y,

$$u_x(x, y) = f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad u_y(x, y) = f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Por ejemplo, la función $u = x^2 + y^2$ tiene las derivadas parciales $u_x = 2x$ (en la derivación con respecto a x, el término y^2 se considera como una constante y, en consecuencia, tiene la derivada 0) y $u_y = 2y$. Las derivadas parciales de $u = x^3 y$ son $u_x = 3x^2 y$ y $u_y = x^3$.

De modo semejante, para una función de cualquier número n de variables independientes, las derivadas parciales se definen por

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h}$$

$$= f_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = D_{x_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

suponiendo que el límite existe.

Por supuesto, también pueden formarse *derivadas parciales superiores* de $f(x, y)$, derivando una vez más las derivadas parciales de "primer orden", $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$, con respecto a una de las variables y repitiendo este proceso. El orden en el que se realizan las derivaciones se indica por el orden de los subíndices o por el orden de los símbolos ∂x y ∂y en el "denominador" de derecha a izquierda* y se usan los símbolos siguientes para las segundas derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = (D_x)^2 f,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = f_{xy} = D_x D_y f,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = f_{yx} = D_y D_x f,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = (D_y)^2 f.$$

De la misma manera, las terceras derivadas parciales se denotan por

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x^2} = f_{yxx},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y} = f_{xxy},$$

y así sucesivamente y, en general, las n-ésimas derivadas por

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\right) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} = f_{x^n},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\right) = \frac{\partial^n f}{\partial y\, \partial x^{n-1}} = f_{yx^{n-1}},$$

y así sucesivamente.

Las diferentes notaciones para las derivadas parciales tienen sus respectivas ventajas. Escribiendo $\partial f(x, y)/\partial x$, o bien, $D_x f(x, y)$ para la derivada parcial de la función $f(x, y)$ con respecto a su primer argumento se hace resaltar que la derivación tiene el carácter de un

*Esto es consistente con la notación general para los productos simbólicos de operadores (ver el Volumen I, p. 53). En realidad, en la mayoría de los casos de interés no importa el orden en el que se llevan a cabo las derivaciones (ver la p. 62).

operador D_x o $\partial/\partial x$ que actúa sobre la función, escrito simbólicamente como un *factor* que multiplica a la función. La notación para las derivadas superiores es consistente con esta idea de un producto:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f\right)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}f=D_yD_xf.$$

Una desventaja de la notación de operador es su incomodidad cuando se va a indicar para qué valores de las variables independientes se toman las derivadas. Por ejemplo, si $f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$, entonces su derivada respecto a x en el punto $x = 1$, $y = 2$ puede escribirse como

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_{\substack{x=1\\y=2}} = f_x(1, 2) = (2x + 2y)_{\substack{x=1\\y=2}} = 6.$$

No debe escribirse simplemente como

$$\frac{\partial f(1, 2)}{\partial x}$$

ya que $f(1, 2)$ tiene el valor constante 21 y, de aquí, que tiene a 0 como su derivada respecto a x.

Tal como en el caso de una variable independiente, el tener derivadas es una propiedad especial de una función, incluso no gozada por todas las funciones continuas.* Con todo, esta propiedad es poseída por todas las funciones de importancia práctica, excepto tal vez en puntos excepcionales aislados o curvas.

Ejercicios 1.4a

1. Encontrar $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ para cada una de las funciones siguientes:

(a) $z = ax^n + by^m$, a, b, m, n constantes

(b) $z = 2xe^{y^2} + 3y$

(c) $z = 2\frac{x}{y} + 3\frac{y}{x}$

(d) $z = \operatorname{arc\,tan} \frac{y}{x^2}$

(e) $z = x^2y^{3/2}$

(h) $z = 3^{x/y}$

(i) $z = \log\left(x + \frac{y}{x^2}\right)$

(j) $z = \cos\,(x^2 + y)$

(k) $z = \tan\,(xy^3 + e^x)$

(l) $z = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} y}$

*Véase las pp. 69 y 70 respecto a una explicación del término "diferenciable", el cual implica más que la existencia de las derivadas parciales con respecto a x y a y.

(f) $z = y^x$

(g) $z = x^{1/2}\,y^{3/4}$

(m) $z = xe^y + ye^x$

(n) $z = x\sqrt{x^2 + y^2}$

2. Hallar las primeras derivadas parciales de las siguientes funciones:

(a) $\sqrt[3]{x^2 + y^2}$

(b) sen $(x^2 - y)$

(c) e^{x-y}

(d) $\dfrac{1}{\sqrt{1 + x + y^2 + z^2}}$

(e) y sen xz

(f) $\log \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

3. Encontrar todas las primeras y segundas derivadas parciales de las siguientes funciones:
   (a) xy
   (b) $\log xy$
   (c) $\tan(\text{arc tan } x + \text{arc tan } y)$
   (d) x^y
   (e) $e^{(x^y)}$
4. Sea $w = f(x, y, z) = (\cos x/\text{sen } y)e^z$. Hallar f_x, f_y, f_z, para $x = \pi$, $y = \pi/2$, $z = \log 3$.
5. Para $f(x, y) = y \cosh x + x \,\text{senh}\, y$ hallar $f_x{}^2 + f_y{}^2$, en $x = 0$, $y = 0$.
6. Demostrar que las funciones $u = e^x \cos y$, $v = e^x$ sen y, satisfacen las condiciones $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.
7. Demostrar que las funciones del Ejercicio 6 satisfacen la ecuación diferencial parcial

$$f_{xx} + f_{yy} = 0.$$

   Hágase lo mismo para las funciones
   (a) $\log \sqrt{x^2 + y^2}$
   (b) arc $\tan \dfrac{y}{x}$
   (c) $\dfrac{y}{x^2 + y^2}$
   (d) $3x^2y - y^3$
   (e) $\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$
8. Para $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, hallar $r_{xx} + r_{yy} + r_{zz}$.
9 Hallar una constante a para la cual, si $z = y^3 + ayx^2$, entonces $z_{xx} + z_{yy} = 0$.
10. Probar que la función

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2)^{(n-2)/2}}$$

   satisface la ecuación

$$f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2} + \cdots + f_{x_nx_n} = 0.$$

Problemas 1.4a

1. ¿Cuántas n-ésimas derivadas tiene una función de tres variables? ¿de k variables?
2. Dar un ejemplo de una función $f(x, y)$ para la cual f_x exista y f_y no.
3. Hallar una función $f(x, y)$ que sea una función de $(x^2 + y^2)$ y que también sea un producto de la forma $\psi(x)\ \psi(y)$; esto es, resolver la ecuación

$$f(x, y) = \phi(x^2 + y^2) = \psi(x)\psi(y)$$

para las funciones desconocidas.

4. Probar que cualquier función de la forma

$$u(x, y, z) = \frac{f(t + r)}{r} + \frac{g(t - r)}{r}$$

(donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$), satisface la ecuación

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{tt}.$$

b. Ejemplos

En la práctica, la derivación parcial sólo incluye conceptos que el estudiante ya domina. Porque, de acuerdo con la definición, todas las variables independientes se mantienen constantes, excepto aquélla con respecto a la cual se está derivando. Por lo tanto, simplemente tienen que considerarse las otras variables como constantes y llevar a cabo la derivación de acuerdo con las reglas mediante las cuales se derivan las funciones de una sola variable independiente. A continuación se dan algunas derivadas parciales de varias funciones sencillas.

1. Función:

$$f(x, y) = xy$$

Primeras derivadas:

$$f_x = y, \qquad f_y = x$$

Segundas derivadas:

$$f_{xx} = 0, \qquad f_{xy} = f_{yx} = 1, \qquad f_{yy} = 0$$

2. Función:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Primeras derivadas:

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

[De donde, para el radiovector $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ desde el origen hasta el punto (x, y), las derivadas parciales con respecto a x y a y están dadas por $\cos\phi = x/r$, y $\operatorname{sen}\phi = y/r$, donde ϕ es el ángulo que el radiovector forma con la dirección positiva del eje x.]

Segundas derivadas:

$$f_{xx} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} = \frac{\operatorname{sen}^2\phi}{r},$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} = -\frac{\operatorname{sen}\phi\cos\phi}{r},$$

$$f_{yy} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} = \frac{\cos^2\phi}{r}.$$

3. Recíproco del radiovector en tres dimensiones:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{r}$$

Primeras derivadas:

$$f_x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = -\frac{x}{r^3},$$

$$f_y = -\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = -\frac{y}{r^3},$$

$$f_z = -\frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = -\frac{z}{r^3};$$

Segundas derivadas:

$$f_{xx} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}, \qquad f_{yy} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \qquad f_{zz} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5},$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{3xy}{r^5}, \qquad f_{yz} = f_{zy} = \frac{3yz}{r^5}, \qquad f_{zx} = f_{xz} = \frac{3zx}{r^5}.$$

De ésto se ve que para la función $f = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, la ecuación

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0$$

se cumple para todos los valores de x, y, z excepto 0, 0, 0; se dice que la función $f(x, y, z) = 1/r$ satisface la *ecuación diferencial parcial* ("ecuación de Laplace")

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0.$$

4. Función:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-(x-a)^2/4y}$$

Primeras derivadas:

$$f_x = \frac{-(x-a)}{2y^{3/2}} e^{-(x-a)^2/4y},$$

$$f_y = \left(\frac{-1}{2y^{3/2}} + \frac{(x-a)^2}{4y^{5/2}}\right) e^{-(x-a)^2/4y}$$

Segundas derivadas:

$$f_{xx} = \left(\frac{-1}{2y^{3/2}} + \frac{(x-a)^2}{4y^{5/2}}\right) e^{-(x-a)^2/4y},$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \left(\frac{3}{4}\frac{x-a}{y^{5/2}} - \frac{(x-a)^3}{8y^{7/2}}\right) e^{-(x-a)^2/4y},$$

$$f_{yy} = \left(\frac{3}{4}\frac{1}{y^{5/2}} - \frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{y^{7/2}} + \frac{(x-a)^4}{16y^{9/2}}\right) e^{-(x-a)^2/4y}.$$

Por lo tanto, se satisface la ecuación diferencial parcial $f_{xx} - f_y = 0$ idénticamente en x y y.

c. *La continuidad y la existencia de las derivadas parciales*

Para una función de una sola variable, la existencia de la derivada en un punto implica la continuidad de la función en ese punto (ver Volumen I, p. 166). En contraste con ésto, la posesión de las derivadas parciales *no* implica la continuidad de una función de dos variables: por ejemplo, la función $u(x, y) = 2xy/(x^2 + y^2)$, con $u(0, 0) = 0$, tiene derivadas parciales en todo punto y, empero, ya se ha visto (p. 43) que es discontinua en el origen. Geométricamente hablando, la existencia de las derivadas parciales restringe el comportamiento de la función en las direcciones de los ejes x y y únicamente, y no en las otras direcciones. Sin embargo, la posesión de derivadas parciales *acotadas* implica la continuidad, como se afirma en el teorema siguiente:

Si una función $f(x,y)$ tiene derivadas parciales f_x y f_y en todo punto en un conjunto abierto R y estas derivadas satisfacen en todo punto las desigualdades

$$|f_x(x, y)| < M, \qquad |f_y(x, y)| < M,$$

donde M es independiente de x y *y, entonces $f(x, y)$ es continua en todo punto en R.* [1]

Para la demostración, considérense dos puntos con coordenadas (x, y) y $(x + h, y + k)$, respectivamente, ambos en la región R. Supóngase además que los dos segmentos rectilíneos que unen estos puntos con el punto $(x + h, y)$ se encuentran por completo en R; evidentemente ésto es cierto si (x, y) es un punto interior a R y el punto $(x + h, y + k)$ se encuentra lo suficientemente próximo a (x, y). Entonces se tiene

$$(7) \qquad f(x + h, y + k) - f(x, y) = \{f(x + h, y + k) - f(x + h, y)\} + \{f(x + h, y) - f(x, y)\}.$$

Los dos términos dentro de las primeras llaves de la derecha sólo difieren en y; los que están dentro de las segundas llaves, sólo en x. En consecuencia, puede aplicarse el teorema del valor medio ordinario del cálculo diferencial (Volumen I, p. 174) a las primeras llaves

[1] Esto se aplica incluso, como se ve en la demostración, a los *puntos frontera* del dominio, siempre que puedan unirse a cualesquiera puntos vecinos del dominio por medio de una línea quebrada que consista de dos segmentos paralelos a los ejes, y f éste definida apropiadamente en el punto frontera.

como una función de y únicamente y a las segundas llaves como una función de x únicamente. Así se obtiene la relación

(8) $f(x + h, y + k) - f(x, y) = kf_y(x + h, y + \theta_1 k) + hf_x(x + \theta_2 h, y),$

donde θ_1 y θ_2 son números entre 0 y 1. En otras palabras, la derivada con respecto a y debe formarse para un punto de la vertical que une a $(x + h, y)$ con $(x + h, y + k)$, y la derivada con respecto a x debe formarse para un punto de la horizontal que une a (x, y) con $(x + h$ $y)$. Como por hipótesis ambas derivadas son menores que M en valor absoluto, se concluye que

(9) $$|f(x + h, y + k) - f(x, y)| \leqq M(|h| + |k|).$$

Para valores lo suficientemente pequeños de h y k, el segundo miembro es así mismo arbitrariamente pequeño y queda demostrada la continuidad de $f(x, y)$.*

Ejercicios 1.4c

1. Enunciar formalmente y probar para una función de tres variables $f(x, y, z)$ que la existencia y la condición de ser acotadas de las primeras derivadas parciales son suficientes para la continuidad de f.
1. Demostrar que las siguientes funciones $f(x, y)$ son continuas:

(a) $f(x, y) = \begin{cases} e^{-1/(x^2 + y^2)}, & x, y \neq 0 \\ 0, & x = 0, y = 0 \end{cases}$

(b) $f(x, y) = \begin{cases} (x^4 + y^4) \log (x^2 + y^2), & x, y \neq 0 \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$

d. Cambio del orden de la derivación

En todos los ejemplos de derivación parcial dados en las pp. 58-60, se encuentra que $f_{yx} = f_{xy}$; En otras palabras, no existe diferencia si se deriva primero con respecto a x y luego con respecto a y, o si se deriva primero con respecto a y y después con respecto a x. En general, ésto es cierto bajo las condiciones del teorema siguiente:

Si las derivadas parciales "mixtas" f_{xy} x f_{yx} de una función $f(x, y)$

*Si el dominio de f es un rectángulo con lados paralelos a los ejes, se cumple la desigualdad para dos puntos cualesquiera (x, y) y $(x + h, y + k)$ en el dominio. Entonces se concluye que f es incluso continua según Lipschitz (ver la p. 44).

son continuas en un conjunto abierto R, entonces se cumple la ecuación

$$(10) \qquad f_{yx} = f_{xy}$$

en todo R; es decir, no importa el orden la derivación con respecto a x y a y.

La demostración, como la de la subsección anterior, se basa en el teorema del valor medio del cálculo diferencial. Considérense los cuatro puntos (x, y), $(x + h, y)$, $(x, y + k)$, y $(x + h, y + k)$, donde $h \neq 0$ y $k \neq 0$. Si (x,y) es un punto del conjunto abierto R y si h y k son lo suficientemente pequeños, estos cuatro puntos pertenecen a R. Fórmese ahora la expresión

$$(11) \qquad A = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y).$$

Introduciendo la función

$$\phi(x) = f(x, y + k) - f(x, y)$$

de la variable x y considerando la variable y simplemente como un "parámetro", A toma la forma

$$A = \phi(x + h) - \phi(x).$$

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo diferencial resulta

$$A = h\phi'(x + \theta h),$$

donde θ se encuentra entre 0 y 1. No obstante, a partir de la definición de $\phi(x)$, se tiene

$$\phi'(x) = f_x(x, y + k) - f_x(x, y),$$

y como se ha supuesto que la segunda derivada parcial "mixta" f_{yx} existe, nuevamente puede aplicarse el teorema del valor medio y encontrar que

$$(12) \qquad A = hkf_{yx}(x + \theta h, y + \theta' k),$$

donde θ y θ' denotan dos números no especificados entre 0 y 1.

Exactamente de la misma manera se puede introducir la función

$$\psi(y) = f(x + h, y) - f(x, y)$$

y expresar A como

$$A = \psi(y + k) - \psi(y).$$

Así se llega a la ecuación

$$A = hkf_{xy}(x + \theta_1 h, y + \theta_1' k),$$

donde $0 < \theta_1 < 1$ y $0 < \theta_1' < 1$, y si se igualan las dos expresiones para A se obtiene la ecuación

$$f_{yx}(x + \theta h, y + \theta' k) = f_{xy}(x + \theta_1 h, y + \theta_1' k).$$

Si aquí se hace que h y k tiendan simultáneamente a 0 y se recuerda que las derivadas $f_{xy}(x, y)$ y $f_{yx}(x, y)$ son continuas en el punto (x, y), inmediatamente se obtiene

$$f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y),$$

lo que debía demostrarse.*

El teorema sobre la reversibilidad del orden de la derivación (es decir, sobre la conmutatividad de los operadores de derivación D_x y D_y) tiene consecuencias de largo alcance. En particular, se ve que el

*Para investigaciones más refinadas, a menudo resulta útil saber que el teorema sobre la reversibilidad del orden de la derivación puede probarse con hipótesis más débiles. En efecto, basta con suponer que, además de las primeras derivadas parciales f_x y f_y, sólo existe una derivada parcial mixta, digamos f_{yx}, y que esta derivada es continua en el punto en cuestión. Para probarlo, regrésese a la ecuación (11), divídase entre hk y, a continuación, hágase que k sola tienda hacia 0. Entonces el segundo miembro tiene un límite y, en consecuencia, el primer miembro también tiene un límite y

$$\lim_{k\to 0} \frac{A}{kh} = \frac{f_y(x+h, y) - f_y(x, y)}{h}.$$

Además, arriba se probó, con la única hipótesis de que f_{yx} existe, que

$$\frac{A}{hk} = f_{yx}(x + \theta h, y + \theta' k).$$

En virtud de la continuidad supuesta de f_{yx}, se encuentra que para $\varepsilon > 0$ arbitrario y para todos los valores de h y k suficientemente pequeños,

$$f_{yx}(x, y) - \varepsilon < f_{yx}(x + \theta h, y + \theta' k) < f_{yx}(x, y) + \varepsilon,$$

de donde se deduce que

$$f_{yx}(x, y) - \varepsilon \leqq \frac{f_y(x+h, y) - f_y(x, y)}{h} \leqq f_{yx}(x, y) + \varepsilon$$

o bien,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_y(x+h, y) - f_y(x, y)}{h} = f_{yx}(x, y),$$

es decir,

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

número de derivadas distintas de segundo orden y de órdenes superiores de funciones de varias variables es decididamente menor que el que podría esperarse en principio. Si se supone que todas las derivadas que van a formarse son funciones continuas de las variables independientes en la región bajo consideración y si se aplica el teorema inmediato anterior a las funciones $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, y así sucesivamente, en lugar de a la función $f(x, y)$, se llega a las ecuaciones

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx},$$
$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx},$$
$$f_{xxyy} = f_{xyxy} = f_{xyyx} = f_{yxxy} = f_{yxyx} = f_{yyxx},$$

y, en general, se tiene el resultado siguiente:

En la derivación repetida de una función de dos variables independientes se puede cambiar a voluntad el orden de las derivaciones, bajo el supuesto únicamente de que las derivadas en cuestión sean funciones continuas. *

Con las hipótesis acerca de la continuidad, una función de dos variables tiene *tres* derivadas parciales de segundo orden,

$$f_{xx}, \qquad f_{xy}, \qquad f_{yy};$$

cuatro derivadas parciales de tercer orden,

*Es de interés fundamental mostrar por medio de un ejemplo que, sin la hipótesis de la continuidad de la segunda derivada f_{xy}. o f_{yx} el teorema no es necesariamente verdadero y f_{xy} puede diferir de f_{yx}. Esto puede ejemplificarse por medio de la función

$$f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0,$$

para la cual existen todas las derivadas parciales de segundo orden pero no son continuas. Se encuentra que

$$f_x(0, y) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} = \lim_{x \to 0} y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -y,$$

$$f_y(x, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} = \lim_{y \to 0} x\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = x,$$

y, en consecuencia,

$$f_{yx}(0, 0) = -1 \qquad \text{y} \qquad f_{xy}(0, 0) = +1.$$

Estas dos expresiones son diferentes, lo cual, por el teorema anterior, sólo puede ser provocado por la discontinuidad de f_{xy} en el origen.

$$f_{xxx}, \qquad f_{xxy}, \qquad f_{xyy}, \qquad f_{yyy};$$

y, en general, $(n + 1)$ derivadas parciales de n-ésimo orden,

$$f_{x^n}, f_{x^{n-1}y}, f_{x^{n-2}y^2}, \ldots, f_{xy^{n-1}}, f_{y^n}.$$

Resulta obvio que también se cumplan proposiciones semejantes para funciones de más de dos variables independientes. Esto es así ya que puede aplicarse esta demostración con igual propiedad al intercambio de las derivaciones con respecto a x y a z, o bien, con respecto a y y a z, y así sucesivamente, porque cada intercambio de dos derivaciones sucesivas sólo comprende dos variables independientes a la vez.

Ejercicios 1.4d

1. Obtener $\partial^2 z/(\partial x\, \partial y)$ y $\partial^2 z/(\partial y\, \partial x)$ para confirmar su igualdad.
   (a) $z = (ax + by)^2$
   (b) $z = \sqrt{ax + by}$
   (c) $z = f(ax + by)$
   (d) $z = y\, e^x$
   (e) $z = \log \dfrac{x + y}{x}$
   (f) $z = e^{\cos(y^2 + x)}$
2. Hallar todas las derivadas parciales hasta las de tercer orden de las funciones que siguen:
   (a) $f(x, y) = x^y$
   (b) $f(x, y) = \cosh xy$
   (c) $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$
   (d) $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$
   (e) $f(x, y) = 2 \cos x + 3 \operatorname{sen}(y - x)$.
3. Demostrar para $f(x, y) = \log(e^x + e^y)$ que $f_x + f_y = 1$ y $f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0$.

Problemas 1.4d

1. (a) Demostrar que una función de la forma $u(x, y) = f(x)\, g(y)$ satisface la ecuación diferencial parcial.

$$u\, u_{xy} - u_x u_y = 0.$$

   (b) Probar la proposición inversa.
2. Defínase $f(x, y)$ como:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan \dfrac{y}{x} - y^2 \arctan \dfrac{x}{y}, & x, y \neq 0, \\ 0 & \textbf{para } x = 0 \text{ or } y = 0. \end{cases}$$

   Demostrar que $f_{xy}(0, 0) = -1, f_{yx} = 1$.

1.5 La diferencial total de una función y su significado geométrico

a. El concepto de diferenciabilidad

Para funciones $y = f(x)$ de una variable, la existencia de una derivada está íntimamente ligada con la posibilidad de hallar una aproximación de la función f en la vecindad de un valor x mediante una función lineal; geométricamente esto corresponde a aproximarse a la gráfica de f por medio de su tangente. Por definición, la función f tiene una derivada en el punto x si el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A$$

existe; el valor A del límite se denota por $f'(x)$. Así, la diferenciabilidad de f en el punto x significa que, para x fija, el incremento $\Delta f = f(x+h) - f(x)$ correspondiente al incremento $h = \Delta x$ de la variable independiente, puede escribirse en la forma

$$\Delta f = f(x+h) - f(x) = Ah + \varepsilon h,$$

donde A no depende de h y $\lim_{h\to 0} \varepsilon = 0$. Haciendo $x + h = \xi$, puede decirse que $f(\xi)$ *es aproximada mediante una función lineal de* ξ, *a saber* $\phi(\xi) = f(x) + A(\xi - x)$, *con un error que es de orden mayor que el primero en* $\xi - x$:

$$f(\xi) - \phi(\xi) = \varepsilon \cdot (\xi - x) = o(\xi - x) \quad \textbf{para} \quad \xi \to x.$$

Por supuesto, la gráfica de esta función lineal $\eta = \phi(\xi) = f(x) + f'(x)(\xi - x)$ en coordenadas corrientes ξ, η es precisamente la tangente a la gráfica de f en el punto $(x. y)$. Enunciado de manera diferente, la diferenciabilidad de f en x significa que el incremento Δf considerado como una función de $h = \Delta x$ puede ser aproximado mediante la función lineal $df = f'(x)\, h = f'(x)\, dx$ dentro de un error que es de orden mayor que el primero en h.*

Estas ideas se pueden aplicar perfectamente a funciones de dos y más variables.

Se dice que la función $u = f(x, y)$ es *diferenciable* en el punto $(x,$

*Para la variable independiente x se tiene $dx = 1 \cdot h = h = \Delta x$.

y) si puede ser aproximada en la vecindad de este punto por medio de una función lineal, es decir, si se puede representar en la forma

$$f(x+h, y+k) = Ah + Bk + C + \varepsilon\sqrt{h^2+k^2} \tag{13}$$

donde A, B y C son independientes de las variables h y k y donde ε tiende hacia 0 conforme h y k lo hacen. En otras palabras, la diferencia entre la función $f(x+h, y+k)$ en el punto $(x+h, y+k)$ y la función $Ah + Bk + C$, la cual es lineal en h y k, debe ser de orden de magnitud $o(\rho)$, donde $\rho = \sqrt{h^2+k^2}$ denota la distancia del punto $(x+h, y+k)$ desde el punto (x, y).

Si es posible esa representación aproximada, se concluye de inmediato que la función $f(x, y)$ es continua y tiene derivadas parciales con respecto a x y a y en el punto (x, y) y que

$$A = f_x(x, y), \qquad B = f_y(x, y), \qquad C = f(x, y).$$

Lo anterior es así porque, en primer lugar, de (13) se encuentra, para $h = k = 0$, que $f(x, y) = C$. Además, $\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} f(x+h, y+k) = C$ $= f(x, y)$. Así, f es continua en el punto (x, y). Haciendo $k = 0$ en (13) y dividiendo entre h se llega a la relación

$$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = A + \varepsilon.$$

Como ε tiende a 0 conforme h tiende a 0, el primer miembro tiene un límite y ese límite es A. De modo semejante, se obtiene la ecuación $f_y(x, y) = B$.

Recíprocamente, se probará el resultado fundamental siguiente:

Una función $u = f(x, y)$ es diferenciable en el sentido que acaba de definirse—es decir, puede aproximarse mediante una función lineal con un error $o(\rho)$ como en (13)— si posee derivadas *continuas* de primer orden en el punto en cuestión.

En efecto, puede escribirse el incremento

$$\Delta u = f(x+h, y+k) - f(x, y)$$

de la función en la forma

$$\Delta u = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) + f(x, y+k) - f(x, y).$$

Como antes (p. 57), los dos paréntesis pueden expresarse en la forma

$$\Delta u = hf_x(x + \theta_1 h, y + k) + kf_y(x, y + \theta_2 k),$$

donde $0 < \theta_1$, $\theta_2 < 1$, aplicando el teorema ordinario del valor medio del cálculo diferencial. Ya que, por hipótesis, las derivadas parciales f_x y f_y son continuas en el punto (x, y), puede escribirse

$$f_x(x + \theta_1 h, y + k) = f_x(x, y) + \varepsilon_1$$

y

$$f_y(x, y + \theta_2 k) = f_y(x, y) + \varepsilon_2$$

donde los números ε_1 y ε_2 tienden a 0 conforme h y k lo hacen. Así se obtiene

$$\Delta u = hf_x(x, y) + kf_y(x, y) + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k$$
$$= hf_x(x, y) + kf_y(x, y) + o(\sqrt{h^2 + k^2}),$$

y esta ecuación expresa la diferenciabilidad de f.[1]

Ocasionalmente se dará el nombre de función *continuamente diferenciable* o de función *de clase* C^1. a una función con primeras derivadas parciales continuas. Se ve que las funciones de clase C^1 son diferenciables. Si, además, todas las derivadas parciales de segundo orden son continuas, se dice que la función es *continuamente diferenciable dos veces* o que es *de clase* C^2, y así sucesivamente. Las funciones continuas también se conocen como funciones de clase C^0.[2]

Ejercicios 1.5a

1. Demostrar que cada una de las funciones siguientes no es diferenciable en el origen:

[1]Si se supone simplemente la existencia, y no "la continuidad", de las derivadas f_x y f_y, la función no necesariamente es diferenciable (ver la p. 34).

[2]Estas definiciones de clase C^1, C^2, y así sucesivamente, sólo se aplican a las funciones f cuyo dominio sea un conjunto *abierto*, ya que las derivadas parciales sólo se han definido para puntos interiores del dominio. Puede extenderse la noción de clase a funciones con un dominio R no abierto; entonces significa que las derivadas de f en cuestión existen en todos los puntos interiores de R y coinciden en esos puntos con funciones que están definidas y son continuas en todo R.

(a) $f(x, y) = \sqrt{x} \cos y$

(b) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$

(c) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

2. Para las funciones continuas $g(x)$, $h(y)$ de x, y en los intervalos $[x_0, x_1]$, $[y_0, y_1]$, respectivamente, demostrar que la función $f(x, y) = \left(\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds\right) \times \left(\int_{y_0}^{y} h(t)\, dt\right)$ es diferenciable en (x, y) para $x_0 \leq x \leq x_1, y_0 \leq y \leq y_1$.

Problemas 1.5a

1. Supóngase que en una vecindad del punto (a, b), $f(x, y) = f(a, b) + h f_x(a, b) + k f_y(a, b) + o(\sqrt{h^2 + k^2})$, donde $h = x - a$ y $k = y - b$. Bajo la hipótesis de que f_x y f_y existen en (a, b) pero no son necesariamente continuas allí, probar que f es continua en (a, b)..

b. Derivadas direccionales

Una propiedad básica de las funciones diferenciables f es que no sólo poseen derivadas parciales con respecto a x y y— o, como también se dice, en las direcciones x y y— sino que tienen derivadas en cualquier dirección y que estas derivadas pueden expresarse en términos de f_x y f_y. Por *derivada en la dirección* α se entiende la rapidez de cambio de f en el punto (x, y) con respecto a la distancia, conforme nos aproximamos a (x, y) a lo largo del rayo que forma el ángulo α con el eje x positivo. Los puntos $(x + h, y + k)$ son aquéllos para los cuales h y k tienen la forma

$$h = \rho \cos \alpha, \qquad k = \rho \operatorname{sen} \alpha,$$

donde $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ es la distancia de $(x + h, y + k)$ desde (x, y). A lo largo del rayo, f se transforma en una función de ρ dada por

$$f(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \operatorname{sen} \alpha).$$

La derivada de f en el punto (x, y), en la dirección α, se define como la derivada de $f(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \operatorname{sen} \alpha)$ con respecto a ρ en $\rho = 0$ y se denota por $D_{(\alpha)} f(x, y)$. Así,

$$D_{(\alpha)}f(x, y) = \left(\frac{d}{d\rho} f(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \operatorname{sen} \alpha)\right)_{\rho=0}$$
$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \operatorname{sen} \alpha) - f(x, y)}{\rho},$$

siempre que el límite exista. En particular, se obtienen, para $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi/2$, las derivadas parciales de f:

$$D_{(0)}f(x, y) = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x + \rho, y) - f(x, y)}{\rho} = f_x(x, y)$$

$$D_{(\pi/2)}f(x, y) = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x, y + \rho) - f(x, y)}{\rho} = f_y(x, y).$$

Si $f(x, y)$ es diferenciable, se tiene

(14) $$f(x + h, y + k) - f(x, y) = hf_x + kf_y + \varepsilon\rho$$
$$= \rho(f_x \cos \alpha + f_y \operatorname{sen} \alpha + \varepsilon)$$

Hágase tender ρ hacia 0; entonces, como ε tiende hacia 0, se obtiene la expresión

(14a) $$D_{(\alpha)}f(x, y) = f_x \cos \alpha + f_y \operatorname{sen} \alpha.$$

para la derivada de f en la dirección α

Así, la derivada direccional $D_{(\alpha)}f$ es una combinación lineal de las derivadas f_x y f_y en las direcciones x y *y con los coeficientes $\cos \alpha$ y $\operatorname{sen} \alpha$.* En particular, este resultado se cumple siempre que las derivadas f_x y f_y existan y sean continuas en el punto en cuestión.

Tomando, por ejemplo, como $f(x, y)$ la distancia $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ desde el origen hasta el punto (x, y), se tienen las derivadas parciales

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

y

$$r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \operatorname{sen} \theta,$$

donde θ denota el ángulo que el radiovector forma con el eje x. Como consecuencia, en la dirección α la función r tiene la derivada

$$D_{(\alpha)}r = r_x \cos \alpha + r_y \operatorname{sen} \alpha = \cos \theta \cos \alpha + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha = \cos (\theta - \alpha);$$

en particular, en la dirección del propio radiovector (es decir, en la dirección hacia afuera del origen), esta derivada tiene el valor 1, mientras que en las direcciones perpendiculares al radiovector tiene el valor 0.

La función x tiene, en la dirección del radiovector, la derivada $D_\theta (x) = \cos \theta$, y la función y, la derivada $D_\theta (y) = \operatorname{sen} \theta$; en la dirección perpendicular al radiovector estas funciones tienen las derivadas $D_{(\theta+\pi/2)}\, x = -\operatorname{sen}\theta$ y $D_{(\theta+\pi/2)}\, y = \cos \theta$, respectivamente.

En general, la derivada de una función $f(x, y)$ en la dirección del radiovector se denota por $\partial f(x,y)/\partial r$. Esta es, en realidad, la derivada parcial con respecto a r de $f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$ considerada como una función de r y θ. Así, se tiene la relación

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial f}{\partial y},$$

la cual se escribe convenientemente en forma simbólica, como la identidad

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial y}$$

entre los operadores de derivación $\partial/\partial r$, $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$.

Vale la pena hacer notar que también se obtiene la derivada de la función $f(x, y)$ en la dirección α si, en lugar de dejar que el punto Q con coordenadas $(x + h, y + k)$ tienda al punto P con coordenadas (x, y) a lo largo de una recta con la dirección α, se hace que Q tienda a P a lo largo de una curva arbitraria cuya tangente en P tiene la dirección α. Porque entonces, si la recta PQ tiene la dirección β, puede escribirse $h = \rho \cos \beta$, $k = \rho \operatorname{sen} \beta$, y en las fórmulas usadas en la demostración anterior se tiene que remplazar α por β. Pero como, por hipótesis, β tiende hacia α conforme $\rho \to 0$, se obtiene la misma expresión que para $D_{(\alpha)} f(x, y)$.

En la misma forma, una función diferenciable $f(x, y, z)$ de tres variables independientes puede derivarse en una dirección dada. Supóngase que la dirección se especifica por medio de los cosenos de los tres ángulos que forma con los ejes coordenados. Si a estos tres ángulos se les denomina α, β, γ y si se consideran dos puntos, (x, y, z) x $(x + h, y + k, z + l)$, donde

$$h = \rho \cos \alpha, \qquad k = \rho \cos \beta, \qquad l = \rho \cos \gamma,$$

entonces, precisamente como en (14a), se obtiene la expresión

(14b) $$f_x \cos \alpha + f_y \cos \beta + f_z \cos \gamma$$

para la derivada en la dirección dada por los ángulos (α, β, γ).

Ejercicios 1.5b

1. ¿Cuál es la interpretación geométrica de la derivada $D_{(\alpha)}f(x, y)$ de la función f en la dirección definida por el ángulo de inclinación α?
2. Encontrar $D_{(\alpha)}f(x_0, y_0)$, $\alpha = 0, 30°, 60°, 90°$ para las funciones que siguen:

   (a) $f(x, y) = ax + by$, a, b constantes, $x_0 = y_0 = 0$
   (b) $f(x, y) = ax^2 + y^2b$, $x_0 = y_0 = 1$, (a, b constantes)
   (c) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$
   (d) $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \cos y$, $x_0 = y_0 = 0$
   (e) $f(x, y) = e^x \cos y$, $x_0 = 0$, $y_0 = \pi$
   (f) $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + y^2}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$
   (g) $f(x, y) = \cos(x + y)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

3. Hallar las derivadas direccionales de cada una de las funciones siguientes, como se indica:

   (a) $z^2 - x^2 - y^2$ en $(1, 0, 1)$ en la dirección de $(4, 3, 0)$.
   (b) $xyz - xy - yz - zx + x + y + z$ en $(2, 2, 1)$ en la dirección de $(2, 2, 0)$.
   (c) $xz^2 + y^2 + z^3$ en $(1, 0, -1)$ en la dirección de $(2, 1, 0)$.

4. Dar un ejemplo de una función que tenga derivadas en todas direcciones en un punto y, sin embargo, no sea diferenciable en ese punto.
5. Demostrar para $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ que f es continua y que las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ existen en el origen pero que las derivadas direccionales en todas la demás direcciones no existen.

   Sea $f(x,y) = xy + \sqrt{2x^2 + y^2}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y/x = \tan \theta$. Encontrar $\partial^2 f/\partial r^2$ para $\theta = 0°, 30°, 60°, 90°$ y $x, y = 1$.

c. Interpretación geométrica de la diferenciabilidad. El plano tangente

Para una función $z = f(x, y)$ todos estos conceptos pueden ilustrarse geométricamente con facilidad. Recuérdese que la derivada

parcial con respecto a x es la pendiente de la tangente a la curva en la cual se intersectan la superficie que representa la relación $z = f(x, y)$ y un plano perpendicular al plano x,y y paralelo al eje x. De la misma manera, la derivada en la dirección α da la pendiente de la tangente a la curva en la que se intersectan la superficie y un plano que pasa por (x, y, z) perpendicular al plano x, y y que forma el ángulo α con el eje x. Ahora la fórmula $D_{(\alpha)}f(x, y) = f_x \cos \alpha + f_y \operatorname{sen} \alpha$ nos permite calcular las pendientes de las tangentes a todas esas curvas, es decir, de todas las tangentes a la superficie en un punto dado, a partir de las pendientes de dos de esas tangentes.*

Se ha aproximado la función diferenciable $\zeta = f(\xi, \eta)$ en la vecindad del punto (x, y) por medio de la función lineal

$$\phi(\xi, \eta) = f(x, y) + (\xi - x)f_x + (\eta - y)f_y,$$

donde ξ y η son las coordenadas corrientes. Geométricamente, esta función lineal se representa por un plano, que por analogía con la recta tangente a una curva recibirá el nombre de *plano tangente* a la superficie. La diferencia entre esta función lineal y la función $f(\xi, \eta)$ se anula en un orden mayor que $\sqrt{h^2 + k^2}$ conforme $\xi - x = h$ y $\eta - y = k$ tienden a 0. Recordando la definición de la tangente a una curva plana, empero, ésto significa que la recta de intersección del plano tangente con cualquier plano perpendicular al plano x, y, es la tangente a la curva de intersección correspondiente. *Por tanto, se ve que todas estas rectas tangentes a la superficie en el punto (x, y, z) se encuentran en un plano: el plano tangente.*

Esta propiedad es la expresión geométrica de la diferenciabilidad de la función en el punto (x, y, z), donde $z = f(x, y)$. En coordenadas corrientes (ξ, η, ζ), la ecuación del plano tangente en el punto (x, y, z) es

*Para puntos (ξ, η, ζ) en ese plano se tiene $\xi = x + \rho \cos \alpha$, $\eta = y + \rho \operatorname{sen} \alpha$, en consecuencia, para puntos sobre la curva de intersección,

$$\zeta = f(x + \rho \cos \alpha,\ y + \rho \operatorname{sen} \alpha).$$

Usando a ρ y ζ como coordenadas, la pendiente de la tangente a la curva en $\zeta = z$, $\rho = 0$ está dada por

$$\left(\frac{d\zeta}{d\rho}\right)_{\rho=0} = D_{(\alpha)}f(x, y).$$

De aquí que la tangente tiene la ecuación

$$\zeta = z + \rho D_{(\alpha)}f(x,y) = f(x, y) + \rho \cos \alpha\ f_x(x, y) + \rho \operatorname{sen} \alpha\ f_y(x, y).$$

$$\zeta - z = (\xi - x)f_x + (\eta - y)f_y.$$

Como ya se ha demostrado en la p. 67, la función es diferenciable en un punto dado siempre que las derivadas parciales sean continuas allí. En contraste con el caso de las funciones de una variable independiente, la simple *existencia* de las derivadas parciales f_x y f_y *no* es suficiente para asegurar la diferenciabilidad de la función. Si las derivadas no son continuas en el punto en cuestión, es posible que no exista el plano tangente a la superficie en este punto; o, hablando analíticamente, es posible que la diferencia entre $f(x + h, y + k)$ y la función $f(x, y) + hf_x(x, y) + kf_y(x, y)$, la cual es lineal en h y k, no se anule en un orden mayor que $\sqrt{h^2 + k^2}$. Esto puede verse claramente mediante un ejemplo sencillo:

$$u = f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 \neq 0,$$

$$u = 0 \quad \text{si} \quad x = 0, y = 0.$$

Si se introducen coordenadas polares ésto queda.

$$u = \frac{r}{2} \operatorname{sen} 2\theta.$$

Las primeras derivadas con respecto a x y a y existen en todo punto en la vecindad del origen y tienen el valor 0 en el propio origen. Sin embargo, estas derivadas no son continuas en el origen, porque

$$u_x = y\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}\right) = \frac{y^3}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$$

Si nos aproximamos al origen a lo largo del eje x, u_x tiende hacia 0, mientras que si nos aproximamos a lo largo del eje y, u_x tiende hacia 1. Esta función no es diferenciable en el origen; en ese punto no existe plano tangente alguno a la superficie $z = f(x, y)$. Porque las ecuaciones $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ muestran que el plano tangente tendría que coincidir con el plano $z = 0$. Pero en los puntos de la recta $\theta = \pi/4$, se tiene sen $2\theta = 1$ y $z = f(x, y) = r/2$; así, la distancia z al punto de la superficie desde el punto del plano no se anula en un orden mayor que r, como debe ser el caso con un plano tangente. La superficie es un cono con vértice en el origen, cuyas generatrices no se encuentran todas en un plano.

Ejercicios 1.5c

1. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $z=f(x, y)$ en el punto $P = (x_0, y_0)$, en cada uno de los casos que siguen:
   (a) $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2$, $P = (0, 1)$
   (b) $f(x, y) = 2 \cos (x - y) + 3 \operatorname{sen} x$, $P = \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$
   (c) $f(x, y) = \cosh (x + y)$, $P = (0, \log 2)$
   (d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $P = (1, 2)$
   (e) $f(x, y) = e^{x \cos y}$, $P = \left(1, \frac{\pi}{4}\right)$
   (f) $f(x, y) = \cos \pi\, e^{xy}$, $P = (\log 2, 1)$
   (g) $f(x, y) = \int_0^{x^2+y^2} e^{-t^2}\, dt$, $P = (1, 1)$
   (h) $f(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$, $P = (1, 1)$, (a, b, c, d constantes.)
2. Demostrar que todos los planos tangentes a una superficie $z = y\, f(x/y)$ se encuentran en un punto común, donde f es cualquier función diferenciable de una sola variable.
3. Demostrar que el plano tangente a la superficie S: $z = f(x, y)$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ es la posición límite del plano que pasa por los tres puntos (x_i, y_i, z_i), $i = 0, 1, 2$, de S, donde $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ se aproximan a P_0 desde direcciones distintas, formando un ángulo que no es igual a 0° ó 180°.
4. Probar que el plano tangente a la superficie cuadrática
$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$
en el punto (x_0, y_0, z_0) es
$$ax_0x + by_0y + cz_0z = 1.$$

d. La diferencial total de una función

Como para las funciones de una variable, a menudo resulta conveniente tener un nombre y símbolo especiales para la parte lineal del incremento de una función diferenciable $u = f(x, y)$, el cual se presenta en la fórmula (14),

$$\Delta u = f(x + h, y + k) - f(x, y) = hf_x(x, y) + kf_y(x, y) + \varepsilon\sqrt{h^2 + k^2}.$$

Se da el nombre de *diferencial* de la función a esta parte lineal y se escribe

(15a) $$du = df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y.$$

La diferencial, a veces llamada *diferencial total,* es una función de *cuatro* variables independientes, a saber, las coordenadas x y y del punto bajo consideración y los incrementos h y k de las variables independientes. Se hace resaltar nuevamente que ésto nada tiene que ver con el concepto vago de "cantidades infinitamente pequeñas". Simplemente significa que du se aproxima al incremento $\Delta u = f(x + h, y + k) - f(x, y)$ la función, con un error que es una fracción arbitrariamente pequeña ε de $\sqrt{h^2 + k^2}$, siempre que h y k sean cantidades lo suficientemente pequeñas. Para las variables independientes x y y, a partir de (15a), se encuentra que

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial x}{\partial y} \Delta y = \Delta x \qquad \text{y} \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial y}{\partial x} \Delta y = \Delta y.$$

De aquí que, con mayor frecuencia, la diferencial $df(x, y)$ se escriba (15b)

(15b) $$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = f_x(x, y)\, dx + f_y(x, y)\, dy.$$

Incidentalmente, la diferencial determina completamente las primeras derivadas parciales de f. Por ejemplo, se obtiene la derivada parcial $\partial f/\partial x$ de f, haciendo $dy = 0$ y $dx = 1$.

Es de hacer resaltar que la diferencial total de una función $f(x, y)$ como la aproximación lineal para Δf no tiene significado a menos que la función sea diferenciable en el sentido definido anteriormente para la cual basta la continuidad, pero no la simple existencia, de las dos derivadas parciales).

Si la función $f(x, y)$ también tiene derivadas parciales continuas de orden superior, puede formarse la diferencial de la diferencial $df(x, y)$; ésto es, pueden multiplicarse sus derivadas parciales con respecto a x y y por $h = dx$ y $k = dy$, respectivamente, y después sumar estos productos. En esta diferenciación se consideran h y k como constantes, correspondiendo al hecho de que la diferencial $df = hf_x(x, y) + kf_y(x, y)$ es una función de las cuatro variables independientes x, y, h, y k. Así se obtiene la *segunda diferencial** de la función,

*Posteriormente se verá (p. 97) que las diferenciales de orden superior introducidas formalmente aquí corresponden exactamente a los términos del mismo orden en el desarrollo de la función.

$$d^2f = d(df) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right)h + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right)k$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$ [1]

De modo semejante pueden formarse las *diferenciales superiores*

$$d^2f = d(d^2f) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y} dx^2\, dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3,$$

$$d^4f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} dx^4 + 4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\, \partial y} dx^3\, dy + 6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\, \partial y^2} dx^2\, dy^2$$
$$+ 4\frac{\partial^4 f}{\partial x\, \partial y^3} dx\, dy^3 + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} dy^4,$$

y, como puede demostrarse fácilmente por inducción, en general

$$d^nf = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx^n + \binom{n}{1}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\, \partial y} dx^{n-1}\, dy + \cdots$$
$$\cdots + \binom{n}{k}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\, \partial y^k} dx^{n-k}\, dy^k + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} dy^n.$$

La última fórmula puede expresarse simbólicamente por la ecuación

$$d^nf = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n f$$

donde primero debe desarrollarse la expresión de la derecha formalmente por medio del teorema del binomio y, a continuación, deben sustituirse los términos

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx^n, \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\, dy} dx^{n-1}\, dy, \ldots, \frac{\partial^n f}{\partial y^n} dy^n$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx\right)^n f,\ \left(\frac{\partial}{\partial x} dx\right)^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial y} dy\right)f, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n f.$$

Para los cálculos con diferenciales se cumple bien la regla

[1] Tradicionalmente, se escriben las potencias $(dx)^2$, $(dx)^3$, $(dy)^2$, $(dy)^3$ de las diferenciales, simplemente como dx^2, dx^3, dy^2, dy^3. Por supuesto, ésto es un tanto confuso, ya que podrían confundirse con $d(x^2) = 2x\, dx$, $d(x^3) = 3x^2\, dx$, y así sucesivamente.

$$d(fg) = f\,dg + g\,df$$

esta regla se deduce inmediatamente a partir de la regla para la diferenciación de un producto.

En conclusión, se observa que el estudio de esta sección se puede extender inmediatamente hacia funciones de más de dos variables independientes.

Ejercicios 1.5d

1. Hallar las diferenciales totales para las funciones siguientes:

   (a) $z = x^2y^2 + 3xy^3 - 2y^4$

   (b) $z = \dfrac{xy}{x^2 + 2y^2}$

   (c) $z = \log(x^4 - y^3)$

   (d) $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

   (e) $z = \cos(x + \log y)$

   (f) $z = \dfrac{x - y}{x + y}$

   (g) $z = \operatorname{arc\ tan}(x + y)$

   (h) $z = x^y$

   (i) $w = \cosh(x + y - z)$

   (j) $w = x^2 - 2xz + y^3$.

2. Evaluar la diferencial total de $f(x) = x - y + (x^2 + y^2)^{1/3}$, para $x = 1$, $y = 2$, $dx = .1$, $dy = .3$.
3. Encontrar $d^3f(x, y)$ para $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$.

e. Aplicación al cálculo de errores

En la práctica, a menudo se usa la diferencial $df = hf_x + kf_y$ como una aproximación conveniente para el incremento de la función $f(x, y), \Delta f = f(x+h, y+k) - f(x, y)$, cuando se pasa de (x, y) a $(x + h, y + k)$. Este uso se exhibe particularmente bien en el llamado "cálculo de errores" (ver Volumen I, p. 490). Supóngase, por ejemplo, que se desea hallar el error posible en la determinación de la densidad de un sólido por el método del desplazamiento. Si m es el peso del cuerpo en el aire y $\bar{m}$ su peso cuando se sumerge en agua, entonces, por el principio de Arquímedes, la pérdida de peso $(m - \bar{m})$ es el peso del agua desplazada. Si se está usando el sistema de unidades cgs

(centímetros-gramo-segundo), el peso del agua desplazada es numéricamente igual a su volumen y, por tanto, al volumen del sólido. Así, la densidad s del cuerpo se da en términos de las variables independientes m y $\bar{m}$, mediante a fórmula $s = m/(m - \bar{m})$. El error en la medida de la densidad s provocado por un error dm en la medida de m y un error $d\bar{m}$ en la medida de $\bar{m}$ está dado aproximadamente por la diferencial total

$$ds = \frac{\partial s}{\partial m} dm + \frac{\partial s}{\partial \bar{m}} d\bar{m}.$$

Por la regla del cociente, las derivadas parciales son

$$\frac{\partial s}{\partial m} = -\frac{\bar{m}}{(m - \bar{m})^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial s}{\partial m} = \frac{m}{(m - \bar{m})^2};$$

de aquí que la diferencial es

$$ds = \frac{-\bar{m}\ dm + m\ d\bar{m}}{(m - \bar{m})^2}.$$

Por tanto, el error s es máximo si dm y $d\bar{m}$ tienen signos opuestos, es decir, si en lugar de m se mide una cantidad demasiado pequeña $m + dm$ y, en lugar de $\bar{m}$ una cantidad demasiado grande $\bar{m} + d\bar{m}$. Por ejemplo, si un trozo de latón pesa alrededor de 100 gm en el aire, con un error posible de 0.005 gm, y en el agua pesa alrededor de 88 gm, con un error posible de 0.008 gm, la densidad está dada por la fórmula anterior dentro de un error de

$$\frac{88 \cdot 5 \cdot 10^{-3} + 100 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{12^2} \sim 9 \cdot 10^{-3},$$

o cerca del 1 por ciento.

Ejercicios 1.5e

1. Hallar la variación aproximada de la función $z = (x + y)/(x - y)$, cuando x varía desde $x = 2$ hasta $x = 2.5$, y y, desde $y = 4$ hasta $y = 4.5$.
2. Dar un valor aproximado de $\log [(1.02)^{1/4} + (0.96)^{1/6} - 1]$.
3. Se conoce la longitud de la base, x y la altura, y, de un triángulo rectángulo dentro de errores h, y k, respectivamente. ¿Cuál es el error posible en el área?
4. Si dz es el error de medición en una cantidad z, el *error relativo* se define como dz/z. Demostrar que el error relativo en un producto $z = xy$ es la suma de los errores relativos en los factores.

5. Se va a determinar la aceleración g de la gravedad, midiendo el tiempo de caída en segundos de un cuerpo que se deja caer desde el reposo a través de una distancia fija x. Si el tiempo medido es t, se tiene $g = 2x/t^2$. Si x mide alrededor de 1 m y t alrededor de .45 seg, demostrar que el error relativo en la medición de g es más sensible a un error relativo en t que a un error relativo en x.

1.6 Funciones de funciones (funciones compuestas) y la introducción de nuevas variables independientes

a. Funciones compuestas. La regla de la cadena

Con frecuencia una función u de las variables independientes x, y se da en la forma

$$u = f(\xi, \eta, \ldots)$$

donde los argumentos $\xi, \eta, \ldots$ de f son a ellos mismos funciones de x y y

$$\xi = \phi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y), \ldots .$$

Entonces se dice que

$$u = f(\xi, \eta, \ldots) = f(\phi(x, y), \psi(x, y), \ldots) = F(x, y) \tag{16}$$

es una *función compuesta* de x y y (comparar con el Volumen I, pp. 52 siguientes)

Por ejemplo, la función

$$u = F(x, y) = e^{xy} \operatorname{sen}(x + y) \tag{16a}$$

puede escribirse como una función compuesta por medio de las relaciones

$$u = f(\xi, \eta) = e^{\xi} \operatorname{sen} \eta, \tag{16b}$$

donde $\xi = xy$ y $\eta = x + y$. De modo semejante, la función

$$u = F(x, y) = \log(x^4 + y^4) \cdot \operatorname{arc\,sen} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \tag{16c}$$

puede expresarse en la forma

$$u = f(\xi, \eta) = \eta \operatorname{arc\,sen} \xi, \tag{16d}$$

donde $\xi = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y $\eta = \log(x^4 + y^4)$.

Con el fin de hacer que el concepto de función compuesta tenga significado, supóngase que las funciones $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, . . tienen el dominio común R y transforman puntos cualesquiera (x, y) de R en puntos $(\xi, \eta, \ldots)$ para los cuales la función $u = f(\xi, \eta, \ldots)$ está definida, es decir, en puntos del dominio S de f. Entonces la función compuesta

$$u = f(\phi(x, y), \psi(x, y), \ldots) = F(x, y)$$

está definida en la región R.

A menudo es innecesario un examen detallado de las regiones R y S, como en (16b), en las cuales el punto argumento (x, y) puede recorrer el plano x, y completo y la función $u = e^{\xi}$ sen η está definida en todo el plano ξ, η. Por otra parte, (16d) muestra la necesidad de examinar los dominios R y S en la definición de las funciones compuestas. Porque las funciones $\xi = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y $\eta = \log (x^4 + y^4)$ sólo están definidas en la región R que consiste de los puntos $0 < x^2 + y^2 \leqq 1$, es decir, el disco unitario cerrado con centro en el origen, siendo eliminado el origen. Dentro de esta región se tiene $|\xi| < 1$, $\eta \leqq 0$. Todos los puntos correspondientes (ξ, η) se encuentran en el dominio de la función η arc sen ξ y, por tanto, la función compuesta. $F(x, y)$ está definida en R.

Una función continua de funciones continuas es continua en sí misma. Por ejemplo, si la función *$u = f(\xi, \eta, \ldots)$ es continua en la región S* y *las funciones $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, . . . son continuas en la región R; entonces la función compuesta $u = F(x, y)$ es continua en R.*

Se deduce inmediatamente la demostración a partir de la definición de continuidad. Sea (x_0, y_0) un punto de R y ξ_0, η_0, . . . los valores correspondientes de ξ, η, ... Ahora bien, para cualquier ε positivo, el valor absoluto de la diferencia

$$f(\xi, \eta, \ldots) - f(\xi_0, \eta_0, \ldots)$$

es menor que ε, bajo el supuesto únicamente de que se satisfaga la desigualdad

$$\sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + \cdots} < \delta,$$

donde δ es un número positivo suficientemente pequeño. Pero, por la continuidad de $\phi(x, y)$, $\psi(x, y)$, . . . esta desigualdad se satisface si

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \gamma,$$

donde γ es una cantidad positiva suficientemente pequeña. Esto establece la continuidad de la función compuesta.

De modo semejante, *una función diferenciable de funciones diferenciables es a su vez diferenciable.* Esta proposición se enuncia de manera más precisa en el teorema que sigue, el cual, al mismo tiempo, da la regla para la derivación de funciones compuestas, la llamada *regla de la cadena:*

Si $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, . . . *son funciones diferenciables de* x y y *en la región* R y *si* $f(\xi, \eta, \ldots)$ *es una función diferenciable de* $\xi, \eta, \ldots$ *en la región* S, *entonces la función compuesta*

$$u = f(\phi(x, y), \psi(x, y), \ldots) = F(x, y) \tag{17}$$

también es una función diferenciable de x y y*; sus derivadas parciales están dadas por las fórmulas*

$$\begin{aligned} F_x &= f_\xi \, \phi_x + f_\eta \, \psi_x + \cdots, \\ F_y &= f_\xi \, \phi_y + f_\eta \, \psi_y + \cdots, \end{aligned} \tag{18}$$

o, brevemente, por

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \, \xi_x + u_\eta \, \eta_x + \cdots, \\ u_y &= u_\xi \, \xi_y + u_\eta \, \eta_y + \cdots, \end{aligned} \tag{19}$$

De donde, para formar la derivada parcial con respecto a x, primero debe derivarse la función compuesta con respecto a cada una de las variables $\xi, \eta, \ldots$, multiplicar cada una de estas derivadas por la derivada de la variable correspondiente con respecto a x y sumar todos los productos así formados. Esta es la generalización de la regla de la cadena para las funciones de una variable, discutida en el Volumen I (p. 218).

Esta proposición puede escribirse en una forma particularmente simple y sugerente, si se usa la notación de diferenciales, a saber,

$$\begin{aligned} du &= u_\xi \, d\xi + u_\eta \, d\eta + \cdots \\ &= u_\xi \, (\xi_x \, dx + \xi_y \, dy) + u_\eta \, (\eta_x \, dx + \eta_y \, dy) + \cdots \\ &= (u_\xi \, \xi_x + u_\eta \, \eta_x + \cdots) \, dx + (u_\xi \, \xi_y + u_\eta \, \eta_y + \cdots) \, dy \\ &= u_x \, dx + u_y \, dy. \end{aligned} \tag{20}$$

Esta ecuación muestra que se obtiene la parte lineal del incremento de la función compuesta $u = f(\xi, \eta, \ldots) = F(x, y)$, escribiendo primero esta parte lineal como si $\xi, \eta, \ldots$ fueran las variables in-

dependientes y, a continuación, remplazando $d\xi$, $d\eta$, . . . por las partes lineales de los incrementos de las funciones $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, ... Este hecho manifiesta la conveniencia y la flexibilidad de la notación diferencial.

Con el fin de probar la proposición (18), simplemente se tiene que aplicar la hipótesis de que las funciones de referencia son diferenciables. A partir de ésto se concluye que correspondiendo a los incrementos Δx y Δy de las variables independientes x y y, las cantidades ξ, η, . . . cambian en las cantidades

$$\Delta\xi = \xi_x \Delta x + \xi_y \Delta y + \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \tag{20a}$$

$$\Delta\eta = \eta_x \Delta x + \eta_y \Delta y + \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \ldots \tag{20b}$$

donde los números $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ tienden hacia 0 cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$ o cuando $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$. Las derivadas ϕ_x, ϕ_y, ψ_x, ψ_y se toman para los argumentos x, y. Es más, si las cantidades $\xi, \eta, \ldots$ sufren los cambios $\Delta\xi, \Delta\eta, \ldots$, la función $u = f(\xi, \eta, \ldots)$ cambia en la cantidad

$$\Delta u = f_\xi\Delta\xi + f_\eta\Delta_\eta + \cdots + \delta\sqrt{(\Delta\xi)^2 + (\Delta\eta)^2 + \cdots} \tag{21}$$

donde la cantidad δ tiende hacia 0 cuando $\Delta\xi \to 0$ y $\Delta\eta \to 0$, y f_ξ, f_η tienen los argumentos ξ, η. Usando aquí por $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, . . . las cantidades dadas por las fórmulas (20a, b) que corresponden a los incrementos Δx y Δy en x y y, se encuentra una ecuación de la forma

$$\Delta u = (f_\xi\phi_x + f_\eta\psi_x + \cdots)\Delta x + (f_\xi\phi_y + f_\eta\psi_y + \cdots)\Delta y + \varepsilon\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \tag{22}$$

Aquí, para $\Delta x = \rho\cos\alpha$, $\Delta y = \rho \operatorname{sen}\alpha$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, la cantidad ε está dada por

$$\varepsilon = \varepsilon_1 f_\xi + \varepsilon_2 f_\eta + \delta\sqrt{(\phi_x \cos\alpha + \phi_y \operatorname{sen}\alpha + \varepsilon_1)^2 + (\psi_x \cos\alpha + \psi_y \operatorname{sen}\alpha + \varepsilon_2)^2 + \cdots}$$

Cuando $\rho \to 0$, las cantidades Δx, Δy, ε_1, ε_2 tienden hacia 0, y de aquí que lo mismo sucede con $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, y δ. Por otra parte, $f_\xi, f_\eta, \ldots, \phi_x, \phi_y, \psi_x, \psi_y, \ldots$ permanecen fijas. Como consecuencia,

$$\lim_{\rho\to 0} \varepsilon = 0.$$

De (22) se concluye que u, considerada como una función de las variables independientes x, y, es diferenciable en el punto (x, y) y que du está dada por la ecuación (20). A partir de esta expresión para du se encuentra que las derivadas parciales u_x, u_y tienen las expresiones (19) o (18).

Es evidente que este resultado es independiente del número de variables independientes x, y, ... Sigue siendo válido, por ejemplo, si las cantidades ξ, η, . . . sólo dependen de una variable independiente x, de modo que u es una función compuesta de la variable x únicamente.

Para calcular las derivadas parciales superiores sólo es necesario derivar los segundos miembros de las ecuaciones (19) con respecto a x y y, tratando a f_ξ, f_η, . . . como funciones compuestas. Restringiéndonos, por simplicidad, al caso de tres funciones ξ, η, y ζ, se obtiene*

$$\begin{aligned} u_{xx} &= f_{\xi\xi}\xi_x^2 + f_{\eta\eta}\eta_x^2 + f_{\zeta\zeta}\zeta_x^2 + 2f_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + 2f_{\eta\zeta}\eta_x\zeta_x \\ &\quad + 2f_{\xi\zeta}\xi_x\zeta_x + f_\xi\xi_{xx} + f_\eta\eta_{xx} + f_\zeta\zeta_{xx}, \end{aligned} \tag{23a}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= f_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + f_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + f_{\zeta\zeta}\zeta_x\zeta_y + f_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) \\ &\quad + f_{\eta\zeta}(\eta_x\zeta_y + \eta_y\zeta_x) + f_{\xi\zeta}(\xi_x\zeta_y + \xi_y\zeta_x) \\ &\quad + f_\xi\xi_{xy} + f_\eta\eta_{xy} + f_\zeta\zeta_{xy}, \end{aligned} \tag{23b}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= f_{\xi\xi}\xi_y^2 + f_{\eta\eta}\eta_y^2 + f_{\zeta\zeta}\zeta_y^2 + 2f_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + 2f_{\eta\zeta}\eta_y\zeta_y \\ &\quad + 2f_{\xi\zeta}\xi_y\zeta_y + f_\xi\xi_{yy} + f_\eta\eta_{yy} + f_\zeta\zeta_{yy}. \end{aligned} \tag{23c}$$

Ejercicios 1.6a

1. Encontrar todas las derivadas parciales de primero y segundo orden con respecto a x y y para las funciones siguientes:

   (a) $z = u \log v$, donde $u = x^2$, $v = \dfrac{1}{1+y}$

   (b) $z = e^{uv}$, donde $u = ax$, $v = \cos y$

   (c) $z = u \arctan v$, donde $u = \dfrac{xy}{x-y}$, $v = x^2y + y - x$

   (d) $z = g(x^2 + y^2, e^{x-y})$

   (e) $z = \tan(x \arctan y)$.

*Aquí se supone que f es una función de ξ, η de clase C^2 y que ξ, η, ζ son funciones de x, y, de clase C^2. Se concluye que la función compuesta u de x y y, a su vez, es de clase C^2.

2. Calcular las derivadas parciales de primer orden para

(a) $w = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + 2xy \cos z)}}$

(b) $w = \text{arc sen} \dfrac{x}{z + y^2}$

(c) $w = x^2 + y \log (1 + x^2 + y^2 + z^2)$

(d) $w = \text{arc tan} \sqrt{(x + yz)}$

3. Calcular las derivadas de

(a) $z = x^{(x^x)}$,

(b) $z = \left(\left(\dfrac{1}{x}\right)^{1/x}\right)^{1/x}$.

4. Probar que si $f(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

también la satisface $\phi(x, y) = f\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$.

5. Probar que las funciones

(a) $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$,

(b) $g(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,

(c) $h(x, y, z, w) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$,

satisfacen las respectivas ecuaciones de Laplace,

(a) $f_{xx} + f_{yy} = 0$,

(b) $g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} = 0$,

(c) $h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} + h_{ww} = 0$.

Problemas 1.6a

1. Probar que si $f(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

y si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

entonces la función $\phi(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ también es una solución de la ecuación de Laplace.

2. Probar que si $z = f(x, y)$ es la ecuación de un cono, entonces

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$$

3. Sea $f(x, y, z) = g(r)$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(a) Calcular $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$.

(b) Probar que si $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$, entonces $f(x, y, z) = \frac{a}{r} + b$, donde a y b son constantes.

4. Sea $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(r)$, donde

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

(a) Calcular $f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2} + \cdots + f_{x_nx_n}$ (comparar con 1.4a, Ejercicio 10).

(b) Resolver $f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2} + \cdots + f_{x_nx_n} = 0$.

b. *Ejemplos*[1]

1. Consideremos la función

$$u = \exp(x^2 \operatorname{sen}^2 y + 2xy \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + y^2).$$

Haciendo

$$u = e^{\xi+\eta+\zeta}, \quad \xi = x^2 \operatorname{sen}^2 y, \quad \eta = 2xy \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad \zeta = y^2$$

se obtiene

$$\xi_x = 2x \operatorname{sen}^2 y, \qquad \eta_x = 2y \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + 2xy \cos x \operatorname{sen} y, \qquad \zeta_x = 0;$$
$$\xi_y = 2x^2 \operatorname{sen} y \cos y, \quad \eta_y = 2x \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + 2xy \operatorname{sen} x \cos y, \quad \zeta_y = 2y;$$
$$u_\xi = u_\eta = u_\zeta = e^{\xi+\eta+\zeta}.$$

De aquí que

$$u_x = 2 \exp(x^2 \operatorname{sen}^2 y + 2xy \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + y^2)(x \operatorname{sen}^2 y + y \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + xy \cos x \operatorname{sen} y)$$

y

$$u_y = 2 \exp(x^2 \operatorname{sen}^2 y + 2xy \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + y^2)(x^2 \operatorname{sen} y \cos y + x \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + xy \operatorname{sen} x \cos y + y).$$

2. Para la función

$$u = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$$

[1] Se observa que las derivaciones siguientes también pueden llevarse a cabo directamente, sen aplicar la regla de la cadena para funciones de varias variables.

se pone $\xi = x^2 + y^2$ y se obtiene

$$u_x = 2x \cos(x^2 + y^2), \qquad u_y = 2y \cos(x^2 + y^2)$$
$$u_{xx} = -4x^2 \operatorname{sen}(x^2 + y^2) + 2 \cos(x^2 + y^2),$$
$$u_{xy} = -4xy \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$$
$$u_{yy} = -4y^2 \operatorname{sen}(x^2 + y^2) + 2 \cos(x^2 + y^2).$$

3. Para la función

$$u = \operatorname{arc\,tan}(x^2 + xy + y^2),$$

la sustitución $\xi = x^2$, $\eta = xy$, $\zeta = y^2$ conduce a

$$u_x = \frac{2x + y}{1 + (x^2 + xy + y^2)^2},$$
$$u_y = \frac{x + 2y}{1 + (x^2 + xy + y^2)^2}.$$

c. Cambio de las variables independientes

La aplicación de la regla de la cadena (19) a un cambio de las variables independientes es particularmente importante. Por ejemplo, sea $u = f(\xi, \eta)$ una función de las dos variables independientes ξ, η, las cuales se interpretan como coordenadas rectangulares en el plano ξ,η. Pueden introducirse nuevas coordenadas rectangulares x, y en ese plano (ver el Volumen I, p. 361) relacionadas con ξ, η por medio de las fórmulas

(24a) $$\xi = \alpha_1 x + \beta_1 y, \qquad \eta = \alpha_2 x + \beta_2 y$$

o bien,

(24b) $$x = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta, \qquad y = \beta_1 \xi + \beta_2 \eta$$

Aquí,

$$\alpha_1 = \cos\gamma, \qquad \alpha_2 = -\operatorname{sen}\gamma, \qquad \beta_1 = \operatorname{sen}\gamma, \qquad \beta_2 = \cos\gamma,$$

donde γ denota el ángulo que el eje positivo ξ forma con el eje positivo x. Entonces la función $u = f(\xi, \eta)$ se "transforma" en una nueva función

$$u = f(\xi, \eta) = f(\alpha_1 x + \beta_1 y, \alpha_2 x + \beta_2 y) = F(x,y),$$

la cual se forma a partir de $f(\xi, \eta)$ mediante un proceso de composición como el que se describe en la p. 81. Se dice que la variable dependiente u está "referida a las nuevas variables independientes x y y, en lugar de ξ y η."

Las reglas de derivación (19) de la p. 83 inmediatamente proporcionan

(25) $$u_x = u_\xi \alpha_1 + u_\eta \alpha_2, \qquad u_y = u_\xi \beta_1 + u_\eta \beta_2,$$

donde u_x, u_y denotan las derivadas parciales de la función $F(x, y)$, y u_ξ, u_η, las derivadas parciales de la función $f(\xi, \eta)$. Así, las derivadas parciales de cualquier función se transforman de acuerdo con la misma regla (24b) que las variables independientes, cuando se giran los ejes coordenados. Esto es cierto también para la rotación de los ejes en el espacio.[1]

Otro cambio importante de las variables independientes es el de las coordenadas rectangulares (x, y) en las *coordenadas polares* (r, θ). Las coordenadas polares están relacionadas con las coordenadas rectangulares por las ecuaciones

(26a) $$x = r\cos\theta, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta$$

(26b) $$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Refiriendo una función $u = f(x, y)$ a coordenadas polares, se tiene

$$u = f(x, y) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = F(r, \theta),$$

y u aparece como una función compuesta de las variables independientes r y θ. De aquí que, por la regla de la cadena (19), se obtiene

(27) $$\begin{aligned} u_x &= u_r r_x + u_\theta \theta_x = u_r \frac{x}{r} - u_\theta \frac{y}{r^2} = u_r \cos\theta - u_\theta \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}, \\ u_y &= u_r r_y + u_\theta \theta_y = u_r \frac{y}{r} + u_\theta \frac{x}{r^2} = u_r \operatorname{sen}\theta + u_\theta \frac{\cos\theta}{r}. \end{aligned}$$

Esto proporciona la ecuación

[1] Pero, en general, no para otros tipos de transformación de coordenadas.

(28) $$u_x{}^2 + u_y{}^2 = u_r{}^2 + \frac{1}{r^2} u_\theta{}^2.$$

Por las reglas (23a, b, c), las derivadas superiores están dadas por

$$u_{xx} = u_{rr}\cos^2\theta + u_{\theta\theta}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} - 2u_{r\theta}\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{r}$$
$$+ u_r\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r} + 2u_\theta\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{r^2},$$
$$u_{xy} = u_{xy} = u_{rr}\cos\theta\sin\theta - u_{\theta\theta}\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{r^2} + u_{r\theta}\frac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{r}$$
$$+ u_\theta\frac{\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta}{r^2} - u_r\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r},$$
$$u_{yy} = u_{rr}\sin^2\theta + u_{\theta\theta}\frac{\cos^2\theta}{r^2} + 2u_{r\theta}\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{r}$$
$$+ u_r\frac{\cos^2\theta}{r} - 2u_\theta\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{r^2}.$$

Esto conduce a la expresión en coordenadas polares del llamado laplaciano Δu, el cual aparece en la ecuación "de Laplace" o "del potencial" $\Delta u = 0$ (ver la p. 60).

(29) $$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + u_{\theta\theta}\frac{1}{r^2} + u_r\frac{1}{r}$$
$$= \frac{1}{r^2}\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right\}.$$

Inversamente, se puede aplicar la regla de la cadena para expresar u_r y u_θ en términos de u_x y u_y. De esta manera se encuentra

(30a) $$u_r = u_x x_r + u_y y_r = u_x\cos\theta + u_y\operatorname{sen}\theta,$$

(30b) $$u_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta = -u_x r\operatorname{sen}\theta + u_y r\cos\theta.$$

También pueden deducirse estas ecuaciones resolviendo las relaciones (27) para u_r y u_θ. Incidentalmente, ya se ha encontrado la ecuación (30a) como la expresión para la derivada de u en la dirección del radiovector r en la p. 72.

En general, siempre que se dan las relaciones que definen una función compuesta,

$$u = f(\xi, \eta, \ldots),$$
$$\xi = \phi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y), \ldots$$

pueden considerarse éstas como si refirieran u a las nuevas variables independientes x, y en lugar de $\xi, \eta, \ldots$. Conjuntos correspondientes de valores x, y y $\xi, \eta, \ldots$ de las variables independientes asignan el mismo valor a u, ya sea que se considere como una función $f(\xi, \eta \ldots)$ de $\xi, \eta, \ldots$, o bien, como una función $F(x, y) = f(\phi(x, y), \psi(x, y), \ldots)$ de x, y.

En las derivaciones de una función compuesta $u = f(\xi, \eta, \ldots)$, se debe distinguir claramente entre la variable dependiente u y la función $f(\xi, \eta, \ldots)$, la cual asigna valores de u a valores de las variables independientes $\xi, \eta, \ldots$. Los símbolos de derivación u_ξ, $u_\eta, \ldots$ no tienen significado hasta que se especifica la relación funcional entre u y las variables independientes. Por lo tanto, cuando se trata con funciones compuestas $u = f(\xi, \eta, \ldots) = F(x, y)$, en realidad no se debe escribir u_ξ, u_η, o bien, u_x, u_y sino $f_\xi(\xi, \eta)$, $f_\eta(\xi, \eta)$ o bien, $F_x(x, y)$, $F_y(x, y)$, respectivamente. Empero, por brevedad, a menudo se usan los símbolos más sencillos u_ξ, u_η, u_x, u_y, cuando no existe riesgo de confusión. Entonces la regla de la cadena se escribe en la forma

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \qquad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \tag{31}$$

lo cual hace innecesario dar los "nombres" f o F para la relación funcional entre u y ξ, η o x, y.

El ejemplo que sigue ilustra el hecho de que la derivada de una cantidad u con respecto a una variable dada depende de la naturaleza de la relación funcional entre u y *todas* las variables independientes; en particular, depende de cuál de las variables independientes se mantenga fija durante la derivación. Con la "transformación identidad" $\xi = x$, $\eta = y$, La función $u = 2\xi + \eta$ se transforma en $u = 2x + y$, y se tiene $u_x = 2$, $u_y = 1$. Si, no obstante, se introducen las nuevas variables independientes $\xi = x$ (como antes) y $\xi + \eta = v$, se encuentra que $u = x + v$, de modo que $u_x = 1$, $u_v = 1$. Por tanto, la derivación con respecto a la misma variable independiente x da resultados diferentes para diferentes elecciones de la otra variable.

Ejercicios 1.6c

1. Sea $u = f(x, y)$, donde $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$. Expresar $\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ en términos de u_r y u_θ.
2. Probar que la expresión $f_{xx} + f_{yy}$ es invariante bajo la rotación del sistema coordenado.

3. Demostrar que bajo los cambios lineales de variables $x = \alpha\xi + \beta\eta$, $y = \gamma\xi + \delta\eta$, las derivadas $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ se transforman de la misma manera que los coeficientes a, b, c, respectivamente, del polinomio.

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

4. Dado $z = r^2 \cos\theta$, donde r y θ son coordenadas polares, hallar z_x y z_y en el punto $\theta = \pi/4$, $r = 2$. Expresar z_r y z_θ en términos de z_x y z_y.
5. Por medio de la transformación $\xi = a + \alpha x + \beta y$, $\eta = b - \beta x + \alpha y$, en la que a, b, α, β son constantes y $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, la función $u(x, y)$ se transforma en una función $U(\xi, \eta)$ de ξ y η.
   Probar que

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2$$

6. Mostrar cómo se transforma la expresión $T_y - T_{xx}$ bajo la introducción de una variable $z = x/\sqrt{y}$ en lugar de y.
7. (a) Probar que la función

$$h(x, y) = f(x - y) + g(x + y)$$

   para cualesquiera funciones f, g, dos veces continuamente diferenciables, satisface la condición $h_{xx} = h_{yy}$.
   (b) De modo semejante, demostrar que

$$H(x, y) = f(x - iy) + g(x + iy),$$

   con $i^2 = -1$, satisface la condición $H_{xx} = -H_{yy}$.

Problemas 1.6c

1. Transformar el laplaciano $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ a las coordenadas polares tridimensionales r, θ, ϕ definidas por

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi$$
$$y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$$
$$z = r \cos\theta.$$

   Comparar con 1.6a, Problema 3.
2. Hallar los valores a, b, c, d tales que bajo la transformación $\xi = ax + by$, $\eta = cx + dy$, donde $ad - bc \neq 0$, la ecuación $Af_{xx} + 2Bf_{xy} + Cf_{yy} = 0$ quede

   (a) $f_{\xi\xi} + f_{\eta\eta} = 0$

   (b) $f_{\xi\eta} = 0$ (A, B, C, constantes)

   ¿En ésto siempre posible?.

1.7 El teorema del valor medio y el teorema de Taylor para funciones de varias variables

a. Observaciones preliminares acerca de la aproximación mediante polinomios

Ya se ha visto en el Volumen I (Capítulo V, p. 451) cómo puede aproximarse una función de una sola variable en la vecindad de un punto dado con una exactitud mayor que el n-ésimo orden, por medio de un polinomio de grado n, el polinomio de Taylor, siempre que la función posea derivadas hasta el $(n + 1)$ –ésimo orden. La aproximación por medio de la parte lineal de la función, como la da la diferencial, sólo es el primer paso hacia esta aproximación más exacta. En el caso de funciones de varias variables, por ejemplo, de dos variables independientes, también puede buscarse una representación aproximada en la vecindad de un punto dado, por medio de un polinomio de grado n. En otras palabras, se desea aproximar $f(x + h, y + k)$ por medio de un "desarrollo de Taylor" en términos de los incrementos h y k.

Mediante un artificio sencillo, este problema puede reducirse a un problema para funciones de una sola variable. En lugar de considerar precisamente $f(x + h, y + k)$, se introduce una variable adicional t y se considera la expresión

$$F(t) = f(x + ht, y + kt) \tag{31}$$

como una función de t, manteniendo fijas x, y, h, y k por el momento. Conforme varía t entre 0 y 1, el punto con coordenadas $(x + ht, y + kt)$ recorre el segmento rectilíneo que une (x, y) y $(x + h, y + k)$. El desarrollo de Taylor de $F(t)$ de acuerdo con potencias de t proporcionará, para $t = 1$, una aproximación para $f(x + h, y + k)$ del tipo deseado.

Empecemos por calcular las derivadas de $F(t)$. Si se supone que todas las derivadas de la función $f(x, y)$ que se van a escribir son continuas en una región *que contiene por completo al segmento rectilíneo,* la regla de la cadena (18) inmediatamente da [1]

[1] Por la regla de la cadena, se tiene

$$F'(t) = \frac{d}{dt} f(x + ht, y + kt) = hf_\xi(\xi, \eta) + kf_\eta(\xi, \eta)$$

(32a) $$F'(t) = hf_x + kf_y,$$

(32b) $$F''(t) = h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy},$$

. . . .

y, en general, por inducción matemática se encuentra que la n-ésima derivada está dada por la expresión

(32c) $$F^{(n)}(t) = h^n f_{x^n} + \binom{n}{1} h^{n-1} k f_{x^{n-1}y} + \binom{n}{2} h^{n-2} k^2 f_{x^{n-2}y^2} + \cdots + k^n f_{y^n},$$

la cual, como en la p. 78 puede escribirse simbólicamente en la forma

$$F^{(n)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f.$$

En esta fórmula, la potencia simbólica de la derecha debe desarrollarse por el teorema del binomio y, a continuación, las potencias de $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ multiplicadas por f deben remplazarse por las n-ésimas derivadas correspondientes $\partial^n f/\partial x^n, \partial^n f/\partial x^{n-1}\partial y, \ldots$. En todas estas derivadas deben escribirse los argumentos $x + ht$ y $y + kt$, en lugar de x y y.

Ejercicios 1.7a

1. Para $F(t) = f(x + ht, y + kt)$, hallar $F'(1)$ para:

   (a) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$

   (b) $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$

   (c) $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 - y^4$

2. Encontrar la pendiente de la curva $z(t) = F(t) = f(x + ht, y + kt)$ en $t = 1$, para $x = 0$, $y = 1$, $h = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{4}$, y

---

donde $\xi = x + ht$, $\eta = y + kt$. Aquí se escribe $f_x(x + ht, y + kt)$ en lugar de $f_\xi(x + ht, y + kt)$ ya que (nuevamente *por la regla de la cadena*).

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x + ht, y + kt) = f_\xi(x + ht, y + kt)$$

si se consideran x, y, h, k, como variables independientes.

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

(b) $f(x, y) = \exp [x^2 + (y-1)^2]$

(c) $f(x, y) = \cos \pi (y - 1) \operatorname{sen} \pi x^2$

b. El teorema del valor medio

Antes de estudiar las aproximaciones de orden superior por medio de polinomios, deduciremos un *teorema del valor medio* análogo al ya conocido para las funciones de una variable. Este teorema relaciona la *diferencia* $f(x + h, y + k) - f(x, y)$ con las *derivadas parciales* f_x y f_y. Expresamente se supone que estas derivadas son continuas. Aplicando el teorema del valor medio ordinario a la función $F(t)$, se obtiene

$$\frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(\theta t),$$

donde θ es un número entre 0 y 1; usando (31) x (32a) se deduce que

$$\frac{f(x + ht, y + kt) - f(x, y)}{t} = hf_x(x + \theta ht, y + \theta kt) + kf_y(x + \theta ht, y + \theta kt).$$

Haciendo $t = 1$, se obtiene el *teorema del valor medio para funciones de dos variables* en la forma

$$(33) \qquad \begin{aligned} f(x + h, y + k) &- f(x, y) \\ &= hf_x(x + \theta h, y + \theta k) + kf_y(x + \theta h, y + \theta k) \\ &= hf_x(\xi, \eta) + kf_y(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Por tanto, *la diferencia entre los valores de la función en los puntos* $(x + h, y + k)$ y (x, y) *es igual a la diferencial en un punto intermedio* (ξ, η) *sobre el segmento rectilíneo que une los dos puntos.* Vale la pena hacer notar que se tiene el *mismo* valor de θ tanto en f_x como en f_y.

Tal como para las funciones de una sola variable (Volumen I, p. 178 puede usarse el teorema del valor medio para obtener un módulo de continuidad para una función $f(x, y)$ y, más precisamente, para demostrar que una función f como la anterior es continua según Lipschitz. Con el fin de aplicar el teorema del valor medio, debemos poder unir dos puntos por medio de un segmento rectilíneo, a lo largo del cual f esté definida. Supóngase entonces que

el dominio R de $f(x, y)$ es *convexo*, es decir, que el segmento rectilíneo que une a dos puntos cualesquiera de R se encuentra completamente en R. Sea f contínuamente diferenciable en R y sea M una cota para el valor absoluto de las derivadas de f:

$$|f_x(x, y)| < M, \qquad |f_y(x, y)| < M$$

para (x, y) en R. Entonces puede aplicarse la fórmula (33), que proporciona la desigualdad

$$(34) \qquad \begin{aligned} |f(x + h, y + k) - f(x, y)| &\leqq |h|\,|f_x(\xi, \eta)| + |k|\,|f_y(\xi, \eta)| \\ &\leqq |h|M + |k|M \leq 2M\sqrt{h^2 + k^2} \end{aligned}$$

De aquí que el valor numérico de la diferencia entre los valores de f en dos puntos cuya distancia es $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ no es mayor que un múltiplo fijo de la distancia (a saber, $2M\rho$). Esto es exactamente lo que quiere darse a entender por continuidad de f según Lipschitz. En particular, se tiene

$$|f(x + h, y + k) - f(x, y)| < \varepsilon$$

para $\sqrt{h^2 + k^2} < \varepsilon/2M$. De donde f es uniformemente continua en R con el "módulo de continuidad" $\delta = \varepsilon/2M$.

El hecho siguiente, la demostración del cual se deja al lector, es una consecuencia simple del teorema del valor medio. Una función $f(x, y)$, cuyas derivadas parciales f_x y f_y existen y tienen el valor 0 en todo punto de un conjunto convexo, es constante.

Ejercicios 1.7b

1. Interpretar geométricamente el teorema del valor medio.
2. Hallar un valor de θ para el cual

$$\begin{aligned} &hf_x(x + \theta h, y + \theta k) + kf_y(x + \theta h, y + \theta k) \\ &= f(x + h, y + k) - f(x, y) \end{aligned}$$

en cada uno de los casos siguientes:

(a) $f(x, y) = xy + y^2$, $x = y = 0$, $h = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{4}$

(b) $f(x, y) = \sin \pi (x + y)$, $x = y = \frac{1}{4}$, $h = \frac{1}{8}$, $k = \frac{1}{4}$.

3. Demostrar que existe un número θ, $0 < \theta < 1$ tal que

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi\theta}{2} + \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}(1 - \theta)\right]$$

usando el teorema del valor medio para la función

$$f(x, y) = \operatorname{sen} \pi x + \cos \pi y.$$

4. Deducir el teorema del valor medio para una función $f(x, y, z)$ de tres variables.
5. Hallar un número θ, $0 \leq \theta \leq 1$, para el cual

$$f\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = f_x\left(\theta, \frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{3}\right) + \frac{1}{2} f_y\left(\theta, \frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{3}\right) + \frac{1}{3} f_z\left(\theta, \frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{3}\right)$$

donde

(a) $f(x, y, z) = xyz$

(b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xz$

Problemas 1.7b

1. Sea el dominio de $f(x, y)$ una región poligonalmente conexa; es decir, supóngase que dos puntos cualesquiera P, Q del dominio pueden conectarse dentro del dominio mediante una sucesión de segmentos $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}$, $\ldots$, $\overline{P_{n-1}P_n}$, donde $P_0 = P$ y $P_n = Q$. Probar que si las derivadas parciales f_x y f_y tienen el valor 0 en todo punto del dominio, entonces f es constante.

c. Teorema de Taylor para varias variables independientes

Si se aplica la fórmula de Taylor con la forma de Lagrange del residuo (ver Volumen I, p. 452) a la función $F(t) = f(x + ht, y + kt)$, se usan las expresiones (32a, b, c) para las derivadas de F, y se pone $t = 1$, se obtiene el teorema de Taylor para funciones de dos variables independientes,

$$\begin{aligned}(35)\qquad f(x + h, y + k) &= f(x, y) + \{hf_x(x, y) + kf_y(x, y)\} \\ &+ \frac{1}{2!}\{h^2 f_{xx}(x, y) + 2hkf_{xy}(x, y) + k^2 f_{yy}(x, y)\} \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}\left\{h^n f_{x^n}(x, y) + \binom{n}{1} h^{n-1}kf_{x^{n-1}y}(x, y)\right. \\ &\left. + \cdots + k^n f_{y^n}(x, y)\right\} + R_n,\end{aligned}$$

donde R_n denota el término residuo

$$\begin{aligned}(36)\qquad R_n = \frac{1}{(n + 1)!}\{&h^{n+1} f_{x^{n+1}}(x + \theta h, y + \theta k) + \cdots \\ &+ k^{n+1} f_{y^{n+1}}(x + \theta h, y + \theta k)\},\end{aligned}$$

donde $0 < \theta < 1$. Por tanto, el incremento $f(x + h, y + k) - f(x, y)$ se escribe como una suma de polinomios homogéneos de grado 1, 2, . . . , $n + 1$, los cuales, aparte de los factores

$$\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \ldots, \frac{1}{n!}, \frac{1}{(n+1)!},$$

son la primera, segunda, . . . , n-ésima diferenciales

$$df = hf_x + kf_y = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$

$$d^2f = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = h^2f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2f_{yy},$$

$$d^nf = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f = h^nf_{x^n} + \binom{n}{1}h^{n-1}kf_{x^{n-1}y} + \cdots + k^nf_{y^n}$$

de $f(x, y)$ en el punto (x, y) y la $(n + 1)$-ésima diferencial $d^{n+1}f$ en un punto intermedio sobre el segmento rectilíneo que une (x, y) y $(x + h, y + k)$. De aquí que el teorema de Taylor puede escribirse de modo más compacto como

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + df(x, y) + \frac{1}{2!}d^2f(x, y) + \cdots + \frac{1}{n!}d^nf(x, y) + R_n, \tag{37}$$

donde

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x + \theta h, y + \theta k), \qquad 0 < \theta < 1. \tag{38}$$

En general, el residuo R_n se anula en un orden *mayor* que el término d^nf, precisamente antes que él; ésto es, cuando $h \to 0$ y $k \to 0$, se tiene $R_n = o\{\sqrt{(h^2 + k^2)^n}\}$.

A partir del teorema de Taylor para funciones de una variable, el paso $(n \to \infty)$ a la *serie infinita de Taylor* nos conduce a los desarrollos de muchas funciones en series de potencias. Con las funciones de varias variables, tal proceso, incluso cuando es posible, en general es demasiado complicado. Para nosotros, la importancia del teorema de Taylor descansa más bien en el hecho de que el incremento $f(x + h, y + k) - f(x, y)$ de una función se descompone en incrementos df, d^2f, . . . de órdenes diferentes.

Ejercicios 1.7c

1. Hallar el polinomio de segundo grado que proporciona la mejor aproximación de sen x sen y en la vecindad del origen.
2. Para $f(x, y) = x^3 + 4y^2x$, dar una aproximación del valor de $f(2.1, 2.9)$.
3. Para $f(x, y) = x/y + y/x$, estimar el error al aproximar el valor de $f(.9, .9)$ por $f(1, 1)$.
4. Desarrollar la función $f(x + h, y + k)$ en potencias de h, k, para

   (a) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + y^2$

   (b) $f(x, y) = \cos(x + 2y)$ en $x = 0, y = \frac{\pi}{2}$

   (c) $f(x, y) = x^4y + 2y^2x - \sqrt{3x^2}$.
5. Desarrollar $f(x, y, z) = xyz^2$ en potencias de x, $y - 1$, $z + 1$.
6. Obtener los primeros términos de los desarrollos de Taylor de las funciones siguientes en una vecindad del origen (0,0):

   (a) $z = \arc\tan \frac{y}{(x^2 + 1)}$

   (b) $z = \cosh x \operatorname{senh} y$

   (c) $z = \cos x \cosh(x + y)$

   (d) $z = e^x \cos y$

   (e) $z = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos y}$

   (f) $z = \log(1 - x) \log(1 - y)$

   (g) $z = e^{x^2-y^2}$

   (h) $z = \cos(x + y)\, e^{-x^2}$

   (i) $z = \cos(x \cos y)$

   (j) $z = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$
7. Estimar el error al remplazar $\cos x/\cos y$ por

$$1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \qquad \text{para} \qquad |x|, |y| < \frac{\pi}{6}.$$

Problemas 1.7c

1. Hallar la serie de Taylor para las funciones que siguen e indicar su región de validez

   (a) $\frac{1}{1 - x - y}$

   (b) e^{x+y}.
2. Demostrar que la ley de los cosenos en trigonometría esférica,

$$\cos z = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos \theta,$$

se reduce a la ley euclidiana de los cosenos,

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta$$

en la vecindad del origen.

3. Si $f(x, y)$ es una función continua con primeras y segundas derivadas continuas, entonces

$$f_{xx}(0, 0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(2h, e^{-1/2h}) - 2f(h, e^{-1/h}) + f(0, 0)}{h^2}.$$

4. Probar que la función $f(x, y) = \exp(-y^2 + 2xy)$ puede desarrollarse en una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} y^n,$$

que converge para todos los valores de x y y y que los polinomios $H_n(x)$, llamados *polinomios de Hermite*, satisfacen
(a) $H_n(x)$ es un polinomio de grado n.
(b) $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$
(c) $H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0$
(d) $H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$.

1.8 Integrales de una función que dependen de un parámetro

El concepto de integral múltiple de una función de varias variables se tratará en los Capítulos IV y V. Por el momento sólo se estudiarán las integrales *sencillas* que surgen en relación con tales funciones.

a. Ejemplos y definiciones

Si $f(x, y)$ es una función continua de x y y en la región rectangular $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $a \leqq y \leqq b$, puede considerarse fija a la cantidad x e integrar la función $f(x, y)$, considerada como una función de y únicamente, sobre el intervalo $a \leqq y \leqq b$. Así se llega a la expresión

$$\int_a^b f(x, y)\, dy,$$

la cual aún depende de la elección de la cantidad x. De este modo, se está considerando no sólo una integral sino la familia de integrales $\int_a^b f(x, y)\, dy$ obtenida para valores diferentes de x. La cantidad x, se mantiene fija durante la integración y a la cual se le puede asignar cualquier valor en su intervalo, recibe el nombre de *parámetro*. Por lo tanto, la *integral* ordinaria aparece como una *función del parámetro x*.

Las integrales que son funciones de un parámetro ocurren frecuentemente en el análisis y sus aplicaciones. Por ejemplo, como puede demostrarse fácilmente por medio de la sustitución $xy = u$, se tiene

$$\int_0^1 \frac{x\,dy}{\sqrt{1 - x^2y^2}} = \text{arc sen } x$$

para $-1 < x < 1$. Nuevamente, al integrar la función potencia general, puede considerarse el exponente como un parámetro y escribir en consecuencia

$$\int_0^1 y^x\,dy = \frac{1}{x+1},$$

donde se supone que $x > -1$.

Puede representarse la región de definición de la función $f(x, y)$ geométricamente y considerar la paralela al eje y correspondiente al valor fijo del parámetro x, como en la Fig. 1.15. Se obtiene la función de y que debe integrarse, considerando los valores de la función $f(x, y)$ como una función de y a lo largo de la recta de intersección AB de la paralela con el rectángulo. También es posible hablar de integrar la función $f(x, y)$ *a lo largo del segmento* AB.

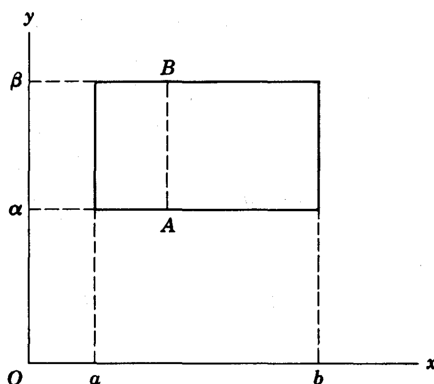


Figura 1.15

Este punto de vista geométrico sugiere una generalización. Si el dominio de definición R de la función $f(x, y)$ tiene la forma que se

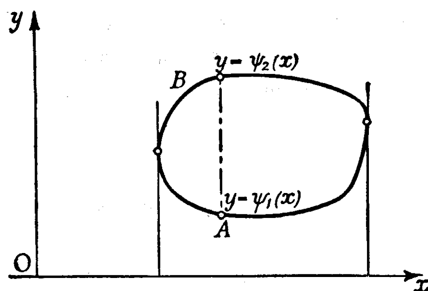


Figura 1.16

muestra en la Fig. 1.16, tal que cualquier paralela al eje y corta a la frontera cuando más en dos puntos, entonces, para un valor fijo de x, nuevamente pueden integrarse los valores de la función $f(x, y)$ a lo largo de la recta AB en la cual la paralela al eje y se intersecta con la región R. Los puntos inicial y final del intervalo de integración variarán a su vez con x. Entonces se tiene que considerar una integral del tipo

(39) $$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\, dy = F(x),$$

es decir, una integral con la variable de integración y, en la cual aparece el parámetro x tanto en el integrando como en los límites de integración. Si se representa la función $f(x, y)$ por medio de la superficie $z = f(x, y)$ en el espacio x, y, z, entonces, para una función positiva f, se puede considerar el cilindro con generatrices paralelas al eje z que tiene como su base al dominio R de f en el plano x, y y limitado en su parte superior por la superficie $z = f(x, y)$. Un valor fijo de x corresponde a un plano paralelo al plano y, z, el cual se intersecta con el cilindro sólido en una cierta región plana. El área de esa región está dada por la integral de la fórmula (39). Por ejemplo, la integral

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\; dy$$

representa el área de la intersección del hemisferio

$$0 < z < \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

con un plano $x =$ constante.

b. *Continuidad y diferenciabilidad de una integral con respecto al parámetro*

La integral

$$F(x) = \int_a^b f(x, y)\, dy$$

es una función continua del parámetro x, para $\alpha \leqq x \leqq \beta$, si $f(x, y)$ es continua en el rectángulo cerrado R dado por $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $a \leqq y \leqq b$.

Porque

$$\left| F(x + h) - F(x) \right| = \left| \int_a^b (f(x + h, y) - f(x, y))\, dy \right|$$
$$\leqq \int_a^b \left| f(x + h, y) - f(x, y) \right| dy.$$

En virtud de la continuidad uniforme de $f(x, y)$, para valores suficientemente pequeños de h, el integrando de la derecha, considerado como una función de y, puede hacerse uniformemente tan pequeño como se desee y se llega a la conclusión inmediatamente.

A continuación, investiguemos la posibilidad de derivar a $F(x)$. Considérese primero el caso en el que los límites de integración son fijos y supóngase que la función $f(x, y)$ tiene una derivada parcial continua f_x en el rectángulo cerrado R.[1] Se probará que, en lugar de integrar primero con respecto a y y, a continuación, derivar con respecto a x, puede invertirse el orden de estos dos procesos:

TEOREMA *Si en el rectángulo cerrado $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $a \leqq y \leqq b$, la función $f(x, y)$ es continua y tiene una derivada continua con respecto a x, puede derivarse la integral con respecto al parámetro bajo el signo integral, es decir,*

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^b f(x, y)\, dy = \int_a^b f_x(x, y)\, dy. \tag{40}$$

Es más, $F'(x)$ es una función continua de x.

Antes de probar este teorema, hagamos la observación de que proporciona una prueba sencilla del hecho (ya establecido en la p.

*Esto significa que f_x existe en el rectángulo abierto y puede extenderse hacia el rectángulo cerrado como una función continua (ver la p. 69).

63) de que en la formación de la derivada mixta g_{xy} de una función $g(x, y)$, puede cambiarse el orden de la derivación, siempre que g_y y g_{xy} sean continuas y g_x exista. Porque, si se pone $f(x, y) = g_y(x, y)$, se tiene

$$g(x, y) = g(x, a) + \int_a^y f(x, \eta)\, d\eta.$$

Como $f(x, y)$ tiene una derivada continua con respecto a x en el rectángulo $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $a \leqq y \leqq b$, se deduce que

$$g_x(x, y) = g_x(x, a) + \int_a^y f_x(x, \eta)\, d\eta,$$

y, por lo tanto, por el teorema fundamental del cálculo

$$g_{yx}(x, y) = f_x(x, y).$$

Ya que también $f_x(x, y) = g_{xy}(x, y)$, por la definición de f, se ve que $g_{yx} = g_{xy}$.

DEMOSTRACION Si tanto x como $x + h$ pertenecen al intervalo $\alpha \leqq x \leqq \beta$, puede escribirse

$$F(x + h) - F(x) = \int_a^b f(x + h, y)\, dy - \int_a^b f(x, y)\, dy$$
$$= \int_a^b [f(x + h, y) - f(x, y)]\, dy.$$

Dado que se ha supuesto que $f(x, y)$ es diferenciable con respecto a x, el teorema del valor medio del cálculo diferencial en su forma usual da

$$f(x + h, y) - f(x, y) = hf_x(x + \theta h, y), \qquad 0 < \theta < 1.^1$$

Es más, como se supone que la derivada f_x es continua en el rectángulo cerrado y, por lo tanto, uniformemente continua, el valor absoluto de la diferencia

$$f_x(x + \theta h, y) - f_x(x, y)$$

*Aquí la cantidad θ depende de y e incluso puede variar discontínuamente con y. Esto no importa, porque por la ecuación $f_x(x + \theta h, y) = h^{-1} [f(x + h, y) - f(x, y)]$ inmediatamente se ve que $f_x(x + \theta h, y)$ es una función continua de x y y y, por lo tanto, es integrable.

es menor que cualquier cantidad positiva ε para toda h con $|h| < \delta$, donde $\delta = \delta(\varepsilon)$ es independiente de x y y. Por lo tanto,

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^b f_x(x, y)\,dy\right|$$

$$= \left|\int_a^b f_x(x+\theta h, y)\,dy - \int_a^b f_x(x, y)\,dy\right|$$

$$\leqq \int_a^b \varepsilon\,dy = \varepsilon(b-a),$$

para $|h| < \delta(\varepsilon)$, siempre que $h \neq 0$. No obstante, ésto significa que se cumple la relación

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \int_a^b f_x(x, y)\,dy = F'(x)$$

Esto prueba la existencia de $F'(x)$ y la fórmula (40). La continuidad de F' se deduce a partir de la del integrando $f_x(x, y)$ (ver la p.103).

En una forma semejante puede establecerse la continuidad de la integral y la regla para derivar la integral con respecto a un parámetro, cuando se tiene el parámetro en los *límites de integración.*

Por ejemplo, si se desea derivar

$$F(x) = \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\,dy,$$

se parte de la expresión

$$F(x) = \int_u^v f(x, y)\,dy = \phi(u, v, x),$$

donde $u = \psi_1(x)$, $v = \psi_2(x)$. Aquí se supone que $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ tienen primeras derivadas continuas en un intervalo $\alpha \leqq x \leqq \beta$ y que

$$a < \psi_1(x) < \psi_2(x) < b$$

para $\alpha < x < \beta$. Sean, además, $f(x, y)$ y $f_x(x, y)$ continuas en el conjunto

$$\alpha \leqq x \leqq \beta, \qquad a \leqq y \leqq b.$$

Entonces, la función ϕ de las tres variables independientes u, v, x queda definida para

$$\alpha \leqq x \leqq \beta, \qquad a \leqq u \leqq b, \qquad a \leqq v \leqq b.$$

Además, tiene derivadas parciales continuas, ya que por la fórmula (40)

$$\phi_x(u, v, x) = \frac{\partial}{\partial x}\int_u^v f(x, y)\, dy = \int_u^v f_x(x, y)\, dy$$

y por el teorema fundamental del cálculo (Volumen I, p. 185)

$$\phi_v(u, v, x) = \frac{\partial}{\partial v}\int_u^v f(x, y)\, dy = f(x, v)$$

$$\phi_u(u, v, x) = \frac{\partial}{\partial u}\int_u^v f(x, y)\, dy = -\frac{\partial}{\partial u}\int_v^u f(x, y)\, dy = -f(x, u).$$

Puede aplicarse la regla de la cadena de la derivación (18), p. 83, a la función compuesta

$$F(x) = \phi\,[\psi_1(x), \psi_2(x), x]$$

y encontrar

$$F'(x) = \phi_u\psi_1'(x) + \phi_v\psi_2'(x) + \phi_x.$$

Esto prueba la existencia de una derivada continua de $F(x)$ para $\alpha < x < \beta$ y proporciona la fórmula

(41)
$$\frac{d}{dx}\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\, dy$$
$$= \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f_x(x, y)\, dy - \psi_1'(x)\, f(x, \psi_1(x)) + \psi_2'(x)\, f(x, \psi_2(x)).$$

Tomando, por ejemplo, para $F(x)$ la función

$$F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(xy)\, dy$$

se obtiene

$$\frac{dF(x)}{dx} = \int_0^x y\cos(xy)\, dy + \operatorname{sen}(x^2).$$

Para el ejemplo

$$F(x) = \int_0^1 \frac{x\, dy}{\sqrt{1 - x^2y^2}} = \operatorname{arc\,sen} x,$$

con $-1 < x < +1$, se obtiene la relación

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - x^2y^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Otros ejemplos están dados por la sucesión de integrales

(42) $$F_n(x) = \int_0^x \frac{(x - y)^n}{n!} f(y)\, dy, \qquad F_0(x) = \int_0^x f(y)\, dy,$$

donde n es cualquier entero positivo y $f(y)$ es una función continua de y únicamente, en el intervalo bajo consideración. Como la expresión que surge de la derivación con respecto al límite superior x se anula, la regla (41) proporciona la fórmula de recurrencia

$$F_n'(x) = F_{n-1}(x)$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Como $F_0'(x) = f(x)$, ésto inmediatamente da

(42a) $$F_n^{(n+1)}(x) = f(x).$$

Por lo tanto, $F_n(x)$ es aquella función cuya $(n + 1)$-ésima derivada es igual a $f(x)$ y que, junto con sus n primeras derivadas, se anula para $x = 0$; se obtiene a partir de $F_{n-1}(x)$, por integración desde 0 hasta x. De aquí que $F_n(x)$ es la función obtenida a partir de $f(x)$, integrando $n + 1$ veces entre los límites 0 y x:

(42b) $$F_0(x) = \int_0^x f(y)\, dy, \qquad F_1(x) = \int_0^x F_0(y)\, dy,$$

$$F_2(x) = \int_0^x F_1(y)\, dy, \ldots, \qquad F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(y)\, dy.$$

En consecuencia, se remplaza esta integración repetida por una sola integración de la función $\frac{(x - y)^n}{n!} f(y)$ con respecto a y.

Con frecuencia, las reglas para derivar una integral con respecto a un parámetro siguen siendo válidas, incluso cuando la derivación bajo el signo integral conduce a una función que no es continua en todos los puntos. En tales casos, en lugar de aplicar criterios generales resulta más conveniente verificar de modo directo si es permisible esa derivación en cada caso especial.

Como un ejemplo, considérese la integral elíptica (ver el Volumen I, p. 299).

$$F(k) = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}; \qquad k^2 < 1.$$

La función

$$f(k, x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

es discontinua en $x = +1$ y en $x = -1$, pero la integral (como una integral impropia) tiene significado. La derivación formal con respecto al parámetro k da

$$F'(k) = \int_{-1}^{+1} \frac{kx^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)^3}}.$$

Para investigar si esta ecuación es correcta, se repite el argumento por el cual se obtuvo la fórmula de derivación. Esto da

$$\frac{F(k+h) - F(k)}{h} = \int_{-1}^{+1} f_k(k + \theta h, x)\,dx$$
$$= \int_{-1}^{+1} \frac{(k+\theta h)x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)[1-(k+\theta h)^2x^2]^3}}.$$

La diferencia entre esta expresión y la integral obtenida por la derivación formal es

$$\Delta = \int_{-1}^{+1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{k+\theta h}{\sqrt{[1-(k+\theta h)^2x^2]^3}} - \frac{k}{\sqrt{(1-k^2x^2)^3}} \right) dx.$$

Se debe demostrar que esta integral tiende a 0 con h. Con este fin se marca alrededor de k un intervalo $k_0 \leqq k \leqq k_1$ que no contenga los valores ± 1, y se elige h tan pequeño que $k + \theta h$ se encuentre en este intervalo. La función

$$\frac{k}{\sqrt{(1-k^2x^2)^3}}$$

es continua en la región cerrada $-1 \leqq x \leqq 1$, $k_0 \leqq k \leqq k_1$ y, por lo tanto, es uniformemente continua. Consecuentemente, la diferencia

$$\left| \frac{k+\theta h}{\sqrt{[1-(k+\theta h)^2x^2]^3}} - \frac{k}{\sqrt{(1-k^2x^2)^3}} \right|$$

permanece por debajo de una cota ξ, que es independiente de x y k y la cual tiende a 0 con h. De aquí que

$$|\Delta| \leq \int_{-1}^{+1} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,\varepsilon = M\varepsilon,$$

donde M es una constante independiente de ε. Es decir, la integral Δ tiende a 0 conforme h lo hace, lo cual se quería demostrar.

Por consiguiente, es permisible la derivación bajo el signo integral en este caso. En otros casos se aplican consideraciones similares.

Las integrales impropias con un intervalo infinito de integración y que dependen de un parámetro se discutirán en la p. 521.

Ejercicios 1.8b

1. Sea

$$F(k) = \int_a^b \alpha(x)\,\beta(x, k)\,dx,$$

donde $\beta(x, k)$ y $\beta_k(x, k)$ son continuas para $a \leq x \leq b$, $k_0 < k < k_1$, y $\alpha(x)$ es continua para $a < x < b$, y $\int_a^b |\alpha(x)|\,dx$ existe como una integral impropia. Probar que

$$F'(k) = \int_a^b \alpha(x)\,\beta_k(x, k)\,dx \qquad \text{para} \qquad k_0 < k < k_1.$$

2. Sea

$$F(k) = \int_0^1 (x-1)x^k \log^{-1}x\,dx \qquad \text{para} \qquad -1 < k.$$

Probar que

(a) $\lim\limits_{k\to\infty} k\,F(k) = 1$

(b) $F(k) = \log \dfrac{2+k}{1+k}$.

c. Intercambio de integraciones. Regularización de funciones

El teorema de la p. 103 acerca de la derivación bajo el signo integral tiene la importante consecuencia de que pueden intercambiarse los órdenes de la integración.

Sea $f(x, y)$ continua en el rectángulo R dado por

$$a \leqq x \leqq b, \qquad \alpha \leqq y \leqq \beta. \tag{42c}$$

Entonces las integrales

(42d) $$I = \int_a^b d\xi \int_\alpha^\beta f(\xi, \eta)\, d\eta \qquad \text{y} \qquad J = \int_\alpha^\beta d\eta \int_a^b f(\xi, \eta)\, d\xi$$

tienen el mismo valor. A este valor se le da el nombre de *integral doble de f sobre el rectángulo* (42c).

Como un ejemplo, considérese la función $f(x, y) = y \operatorname{sen}(xy)$ en el rectángulo $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$. Aquí

$$I = \int_0^1 d\xi \int_0^{\pi/2} \eta \operatorname{sen}(\xi\eta)\, d\eta = \int_0^1 \left(-\frac{\pi \cos(\pi\xi/2)}{2\xi} + \frac{\operatorname{sen}(\pi\xi/2)}{\xi^2}\right) d\xi$$
$$= \frac{\pi}{2} - 1$$
$$J = \int_0^{\pi/2} d\eta \int_0^1 \eta \operatorname{sen}(\xi\eta)\, d\xi = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos\eta)\, d\eta = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Para la demostración general de la identidad $I = J$, se introducen las integrales definidas

$$v(x, y) = \int_\alpha^y f(x, \eta)\, d\eta, \qquad u(x, y) = \int_a^x v(\xi, y)\, d\xi.$$

Aplicando la fórmula (40), se encuentra

$$u_y(x, y) = \int_a^x v_y(\xi, y)\, d\xi = \int_a^x f(\xi, y)\, d\xi$$

y, por tanto,

$$u(x, y) = u(x, \alpha) + \int_\alpha^y u_y(x, \eta)\, d\eta = \int_\alpha^y d\eta \int_a^x f(\xi, \eta)\, d\xi.$$

Para $x = b$, $y = \beta$ se deduce que $I = J$.

Aquí se ha asociado una función $u(x, y)$, que tiene primeras derivadas continuas

$$u_x(x, y) = \int_\alpha^y f(x, \eta)\, d\eta, \qquad u_y(x, y) = \int_a^x f(\xi, y)\, d\xi$$

y una segunda derivada mixta continua

$$u_{xy}(x, y) = f(x, y),$$

con una función continua $f(x, y)$ en el rectángulo R. Se usará la función asociada con el fin de "suavizar" a f, es decir, para construir aproximaciones uniformes a f que tengan derivadas parciales continuas.

A menudo, para aplicaciones técnicas, es esencial remplazar una función continua f (tal vez ella misma sea sólo una aproximación a una cantidad física conocida de modo imperfecto) por una función suave próxima. Por el teorema de aproximación de Weierstrass (Volumen I, p. 569) se sabe que las funciones de una variable independiente, continuas en un intervalo, pueden ser aproximadas uniformemente por medio de polinomios, los cuales incluso tienen derivadas de todos los órdenes. Se cumple el teorema análogo para funciones $f(x, y)$ continuas en un rectángulo.

Pueden construirse aproximaciones más sencillas con un grado más moderado de suavidad, por el proceso de "promediar" la función $f(x, y)$. Aquí resulta conveniente haber extendido la definición de f de su dominio rectangular (42c) a todo el plano x, y, de modo que f sea continua en todo punto[1]. Para cualquier $h > 0$, se forma el *promedio* de f sobre el cuadrado con centro en (x, y) y lados de longitud $2h$ paralelos a los ejes:

$$\text{(42e)} \qquad F_h(x, y) = \frac{1}{4h^2} \int_{x-h}^{x+h} d\xi \int_{y-h}^{y+h} f(\xi, \eta)\, d\eta$$

$$= \frac{u(x+h, y+h) - u(x+h, y-h) - u(x-h, y+h) + u(x-h, y-h)}{4h^2}.$$

Es evidente que $F_h(x, y)$ tiene primeras derivadas continuas y una segunda derivada mixta continua[2]. Para ver que $F_h(x, y)$ se aproxima a $f(x, y)$ para h pequeña, se observa que

$$\text{(42f)} \qquad F_h(x, y) - f(x, y) = \frac{1}{4h^2} \int_{x-h}^{x+h} d\xi \int_{y-h}^{y+h} [f(\xi, \eta) - f(x, y)]\, d\eta.$$

Como f es uniformemente continua en algún rectángulo R' que contiene a R en su interior, se sabe que f, para ε dado y h suficientemente pequeña, variará en menos que ε en todo cuadrado de lado $2h$ contenido en R'. Entonces $|f(\xi, \eta) - f(x, y)| < \varepsilon$ en (42f), y $|F_h(x, y) - f(x, y)| < \varepsilon$. De aquí que

$$\lim_{h \to 0} F_h(x, y) = f(x, y) \text{ uniformemente para } (x, y) \text{ en } R.$$

[1] Esto puede lograrse continuando a f como constante a lo largo de rayos perpendiculares a uno de los cuatro lados del rectángulo y continuando a f hacia los puntos restantes del plano como constante a lo largo de rayos que parten de uno de los cuatro vértices.

[2] Para tener a $F_h(x, y)$ definida para todos los puntos del rectángulo R, tiene que haberse definido f un tanto más allá de R.

Puede así hallarse una función suave $F_h(x, y)$ arbitrariamente próxima a $f(x, y)$.

1.9 Diferenciales e integrales de línea

a. Formas diferenciales

En la Sección 1.5d se definió la diferencial total du de una función $u = f(x, y, z)$ como la expresión

$$du = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz. \tag{43}$$

Esta definición para la diferencial de una función de varias variables es sugerida por la *regla de la cadena de la derivación.* Porque si x, y, z son funciones dadas de una variable t,

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t), \tag{44}$$

entonces la derivada de la función compuesta $u = f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]$ de acuerdo con la regla de la cadena (19), es

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{45}$$

Para funciones u de una sola variable real t, la diferencial se ha definido como $du = \frac{du}{dt} dt$. De donde, en este caso por (45),

$$\begin{aligned} du &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) dt \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} dt, \end{aligned}$$

lo cual formalmente concuerda con (43), si se recuerda que x, y, z (como funciones de t) tienen las diferenciales

$$dx = \frac{dx}{dt} dt, \qquad dy = \frac{dy}{dt} dt, \qquad dz = \frac{dz}{dt} dt.$$

Así, la diferencial $du = df(x, y, z)$, como la da la ec. (43), proporciona inmediatamente la diferencial $du = \frac{du}{dt} dt$ de u "a lo largo de

cualquier curva" representada paramétricamente en la forma (44).

La diferencial du, como se define mediante (43), es una función de las seis variables x, y, z, dx, dy, dz que es lineal y homogénea* en las variables dx, dy, dz, con coeficientes que son funciones de x, y, z. (Por supuesto, no se requiere que las diferenciales dx, dy, dz tengan que se "pequeñas" en sentido alguno; tal restricción sólo surge si se desea usar du como una aproximación para el *incremento*

$$\Delta u = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z),$$

como se explicó en la p. 69).

La *forma diferencial lineal* más general en el espacio x, y, z se representa por la expresión

$$L = A(x, y, z)\,dx + B(x, y, z)\,dy + C(x, y, z)\,dz. \tag{46}$$

Esta es una función L de las seis variables x, y, z, dx, dy, dz que es una forma lineal en las variables "diferenciales" dx, dy, dz, con coeficientes que dependen de x, y, z. Las diferenciales totales du de las funciones son las formas diferenciales lineales especiales L que tienen coeficientes de la forma

$$A = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \qquad B = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, \qquad C = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}, \tag{47}$$

para una función apropiada $f = f(x, y, z)$. Si una forma diferencial L es la diferencial total de una función, se dice que es una forma diferencial *exacta* o que es *integrable*. No toda forma diferencial es integrable; es necesario que los coeficientes A, B, C de L satisfagan ciertas "condiciones de integrabilidad":

Si los coeficientes A, B, C de la forma diferencial L son de la clase C^1 (es decir, tienen primeras derivadas continuas; ver la p. 69) y *si L es exacta, entonces se cumplen las ecuaciones*

$$\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0 \tag{48}$$

Las ecuaciones (48) simplemente son consecuencias de las reglas para la intercambiabilidad de las segundas derivadas. Si A, B, C tienen primeras derivadas continuas y pueden escribirse en la forma

*La función lineal más general de las tres variables ξ, η, ζ es $A\xi + B\eta + C\zeta + D$ con coeficientes A, B, C, D que no dependen de ξ, η, ζ; se dice que la función lineal es "homogénea" o que es una "forma lineal" cuando $D = 0$ (ver la p. 38).

(47), entonces f tiene segundas derivadas continuas. De aquí que, por el teorema de la p. 63, no importa el orden de la derivación. Así, por ejemplo,

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x},$$

y de modo semejante para las otras identidades dadas en (48).

De aquí que, por ejemplo, la forma diferencial lineal

$$L = y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

no es integrable, ya que aquí

$$\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial z} - \frac{\partial x}{\partial y} = 1 \neq 0.$$

Por otra parte, las condiciones de integrabilidad (48) son satisfecha por la forma diferencial

$$L = yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz,$$

la cual, de hecho, es la diferencial total du de la función $u = xyz$. En la Sección 1.10 se discutirá hasta qué punto las condiciones (48) son también suficientes para expresar L como una diferencial total.

Se obtienen condiciones semejantes para la integrabilidad cuando el número de dimensiones es diferente de tres. Para dos variables independientes x, y la forma diferencial lineal general es $L = A(x, y)\,dx + B(x, y)\,dy$. Si L es la diferencial du de una función $u = f(x, y)$, los coeficientes A, B satisfacen la ecuación

$$\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0.$$

Por otra parte, en cuatro dimensiones se obtienen, correspondiendo a las ecuaciones (48), *seis* condiciones de integrabilidad, para lo cual se forman todas las segundas derivadas mixtas posibles de una función f de cuatro variables.

La razón por la que tiene sentido considerar una forma diferencial L, incluso cuando no es una diferencial exacta, es que, a lo largo de cualquier curva C dada paramétricamente en la forma

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t),$$

L se transforma en la diferencial

$$L = \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt}\right)dt$$

de una función de una sola variable. Esta función es simplemente la dada por la integral indefinida

$$\int L = \int\left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt}\right)dt.$$

b. Integrales de línea de formas diferenciales lineales

Con el propósito de discutir la integración de las formas diferenciales lineales sobre líneas, es importante tener una imagen clara de los conceptos y propiedades de los arcos orientados y las curvas cerradas. Se recomienda al lector que lea nuevamente el Volumen I, pp. 333-340, donde se hacen todas las observaciones pertinentes para el caso de las *curvas planas.* Estas se aplican con igual propiedad a las curvas en espacios de cualquier número de dimensiones.* Sin pérdida de generalidad, hablaremos acerca de las integrales sobre curvas en el espacio tridimensional x, y, z.

Un *arco simple* Γ es un conjunto de puntos $P = (x, y, z)$ que pueden representarse paramétricamente en la forma

$$(49) \qquad x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t); \qquad a \leqq t \leqq b,$$

donde φ, ψ, χ son funciones continuas de t para $a \leqq t \leqq b$, y diferentes t en ese intervalo corresponden a puntos P diferentes. La representación paramétrica (49) constituye una aplicación continua 1–1 del intervalo del eje t sobre el conjunto Γ en el espacio.* El mis-

*Específicamente bidimensionales son sólo las nociones de "lado positivo y negativo" de una curva y de "sentido del movimiento de las manecillas del reloj y contrario a este sentido".

*La continuidad de la aplicación de t sobre P es obvia a partir de la continuidad supuesta de las funciones φ, ψ, χ. Es importante darse cuenta que la aplicación inversa $P \rightarrow t$ también es continua. Esto significa que dada una sucesión de puntos P_n sobre Γ que converge a un punto P, los valores del parámetro correspondiente t_n convergen al valor del parámetro para P. Para la demostración, se observa que, por la *propiedad de compacticidad de los intervalos cerrados y acotados* (Volumen I, p. 95) una subsucesión de los t_n converge a algún valor t, con $a \leqq t \leqq b$. Por la continuidad de la aplicación original, t se "aplica" sobre el límite P de los P_n. Debido al

mo arco simple Γ tiene muchas representaciones paramétricas diferentes. La más general se obtiene a partir de la representación particular (49), tomando cualquier función monótona continua $\mu(\tau)$, que transforme el intervalo $\alpha \leqq \tau \leqq \beta$ sobre el intervalo $a \leqq t \leqq b$, y haciendo

$$(50) \qquad x = \phi[\mu(\tau)], \qquad y = \psi[\mu(\tau)], \qquad z = \chi[\mu(\tau)]; \quad \alpha \leqq \tau \leqq \beta.$$

Existen dos maneras de ordenar los puntos de Γ, las cuales en cualquier representación paramétrica particular (49) corresponden a ordenar de acuerdo a la t creciente, o bien, decreciente. La elección de uno de estos dos ordenamientos convierte a Γ en un *arco simple orientado* Γ^*. Se dice que Γ^* está orientado *positivamente* con respecto al parámetro t si la orientación de Γ^* corresponde a la t creciente, y *negativamente* si corresponde a la t decreciente. El arco simple orientado con la orientación opuesta se denota por $-\Gamma^*$. La orientación se fija por completo si se conoce el orden de dos puntos cualesquiera P_0, P_1 sobre Γ. Si Γ^* está orientado positivamente con respecto al parámetro t y si t_0 y t_1 son los valores del parámetro para P_0, P_1, entonces $t_0 < t_1$ significa que P_1 *sigue a* P_0 o que P_0 *precede a* P_1 sobre Γ^* Fig. 1.17).

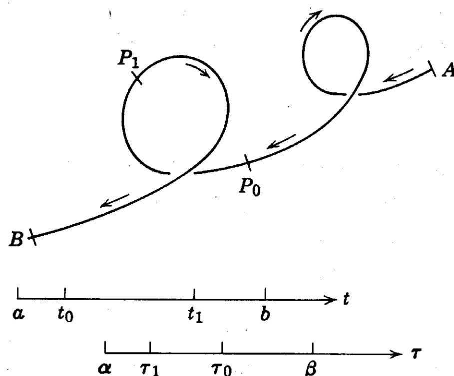


Figura 1.17 Arco simple en el espacio, orientado negativamente con respecto al parámetro τ, positivamente con respecto al parámetro $t = \mu(\tau)$, donde $u(\alpha) = b$, $\mu(\beta) = a$.

---

carácter 1–1 supuesto de la aplicación, t determinado de manera única por P, de donde toda subsucesión convergente de los t_n tiene como límite al valor del parámetro t correspondiente a P: Sin embargo, ésto prueba que la sucesión completa de los t_n converge a t.

Los puntos extremos del arco simple orientado Γ^* corresponden en la representación paramétrica (49) a los valores $t = a, b$ en algún orden. Se distinguen respectivamente como punto "inicial" y "final" de Γ^*, siendo el punto extremo inicial el que precede al otro. Si Γ^* tiene el punto inicial A y el punto final B, se escribe

$$\Gamma^* = \widehat{AB}$$

Entonces, el arco orientado en sentido opuesto es

$$-\Gamma^* = \widehat{BA}$$

Si Γ^* está orientado positivamente con respecto a t, el punto inicial tiene el valor del parametro a y el punto final. el valor del parámetro b.

Un arco simple orientado $\Gamma^* = \widehat{AB}$ puede dividirse en subarcos simples orientados $\Gamma_1^*, , \ldots, \Gamma_n^*$ por medio de los puntos $P_1, \ldots,$ P_{n-1} sobre Γ^*, siguiéndose uno al otro de acuerdo con la orientación. Se pone $P_0 = A$, $P_n = B$ y se define para $i = 1, \ldots, n$ el arco Γ_i^* como el conjunto de puntos sobre Γ^* que consiste de P_{i-1}, P_i y todos los puntos que preceden a P_i y que siguen a P_{i-1}, ordenados de la misma manera que sobre Γ^*. Simbólicamente se escribe

(51) $$\Gamma^* = \Gamma_1^* + \Gamma_2^* + \cdots + \Gamma_n^*$$

Si Γ^* está orientado positivamente con respecto al parámetro t en la representación (49), y si t_i es el valor del parámetro correspondiente a P_i, se tiene

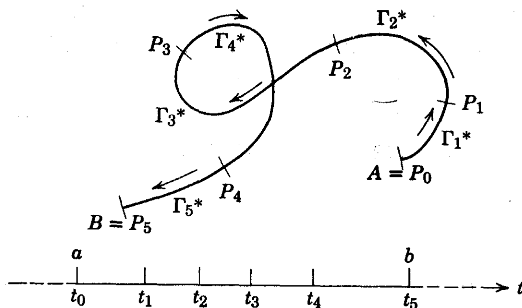


Figura 1.18 Arco orientado $\Gamma^* = AB$ representado como suma de los arcos $\Gamma_{i+1}^* = P_i\ P_{i+1}$ de manera que $\Gamma^* = \Gamma_1^* + \Gamma_2^* + \Gamma_3^* + \Gamma_4^* + \Gamma_5^*$.

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdot \cdot \cdot < t_n = b.$$

El arco Γ_i^* se obtiene cuando se restringe t al intervalo $t_{i-1} \leqq t \leqq t_i$ (Fig. 1.18).

Ahora podemos definir la integral $\int L$ de la forma diferencial lineal

$$(52) \qquad L = A(x, y, z)\, dx + B(x, y, z)\, dy + C(x, y, z)\, dz$$

sobre un arco simple orientado Γ^*. Se supone que los coeficientes A, B, C de L son continuos en una vecindad de Γ^*. Se hace la suposición adicional de que el arco Γ^* no sólo es continuo sino *seccionalmente suave,* es decir, que puede representarse paramétricamente por las funciones

$$(53) \qquad x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t); \qquad a \leqq t \leqq b,$$

las cuales son seccionalmente suaves.*

Sean P_0, P_1, . . . , P_n puntos cualesquiera de Γ^* que se siguen uno al otro en el orden determinado por la orientación de Γ^*, donde P_0 es el punto inicial y P_n el final de Γ^*.

Se forma la *suma de Riemann*

$$(54) \qquad F_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} (A_\nu\, \Delta x_\nu + B_\nu\, \Delta y_\nu + C_\nu\, \Delta z_\nu).$$

Aquí A_ν, B_ν, C_ν son los valores de A, B, C en algún punto Q_ν que precede a $P_{\nu+1}$ y sigue a P_ν sobre Γ^*, y Δx_ν, Δy_ν, Δz_ν representan a

$$x(P_{\nu+1}) - x(P_\nu), \qquad y(P_{\nu+1}) - y(P_\nu), \qquad z(P_{\nu+1}) - z(P_\nu).$$

Ahora se demostrará que cuando $n \to \infty$ la sucesión de F_n converge a un límite F, siempre que la distancia mayor entre los puntos sucesivos P_ν, $P_{\nu+1}$ tienda a 0. El valor de F no depende de la elección particular de los puntos P_ν, o bien, de los puntos intermedios Q_ν. A F se le da el nombre de integral de la forma L sobre el arco orientado Γ^*, y se escribe

*Esto significa que φ, ψ, χ son continuas para $a \leqq t \leqq b$ y tienen primeras derivadas continuas en ese intervalo, excepto posiblemente para un número finito de discontinuidades por salto de las derivadas. Nótese que sólo se requiere la existencia de *alguna* representación paramétrica seccionalmente suave de Γ^*, mientras que las otras representaciones no necesitan ser suaves.

(55) $$F = \int_{\Gamma^*} L = \int_{\Gamma^*} A\,dx + B\,dy + C\,dz.$$

Ya que la definición de la integral no se refiere a las representaciones paramétricas, es evidente que la integral no depende de la elección de los parámetros. La demostración de la existencia del límite implicará que la integral se represente por medio de la integral ordinaria de Riemann

(56) $$\int_{\Gamma^*} L = \varepsilon \int_a^b \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} \right) dt.$$

Aquí el integrando es la función de la única variable t, obtenida al sustituir los argumentos x, y, z de A, B, C por sus expresiones (53); además, $\varepsilon = +1$ cuando Γ^* está orientado positivamente con respecto a t y $\varepsilon = -1$, cuando está orientado negativamente. Independientemente del caso, también puede escribirse (56) como

(57) $$\int_{\Gamma^*} L = \int_{t_i}^{t_f} \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} \right) dt,$$

donde t_i es el valor del parámetro para el punto inicial y t_f el valor para el punto final del arco orientado Γ^*; es decir, $t_i = a$, $t_f = b$, cuando $\varepsilon = +1$, y $t_i = b$, $t_f = a$ cuando $\varepsilon = -1$.

Para probar la convergencia de las sumas de Riemann F_n, se hace uso de la representación paramétrica seccionalmente suave (53) de Γ^*. Sea t_ν el valor del parámetro correspondiente al punto P_ν. Como la correspondencia entre los valores del parámetro y los puntos sobre la curva es continua en ambos sentidos para los arcos simples (ver la nota al pie de la p. 115), se ve que a medida que la distancia más grande entre puntos sucesivos tiende a 0, el valor máximo de $|t_{\nu+1} - t_\nu|$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Las funciones $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ pueden tener discontinuidades por salto en un número finito de puntos. Puede suponerse que todos esos puntos de discontinuidad ocurren entre los puntos de subdivisión $t_0, t_1, \ldots, t_n$, porque, como los A, B, C están acotados y los máximos de los Δx_ν, Δy_ν, Δz_ν tienden a 0 cuando $n \to \infty$, los efectos de sumar o restar contribuciones de un número finito fijo de puntos de subdivisión en la suma de Riemann, F_n, desaparecen en el límite.

Como $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ son ahora diferenciables en el interior de cada subintervalo, se puede aplicar el teorema del *valor medio del cálculo diferencial* (ver Volumen I, p. 174) y encontrar

$$\Delta x_\nu = \varphi(t_{\nu+1}) - \varphi(t_\nu) = \varphi'(\tau_\nu)(t_{\nu+1} - t_\nu)$$
$$\Delta y_\nu = \psi'(\tau_\nu')(t_{\nu+1} - t_\nu), \qquad \Delta z_\nu = \chi'(\tau_\nu'')(t_{\nu+1} - t_\nu),$$

con los valores τ_ν, τ_ν', τ_ν'' intermedios entre t_ν y $t_{\nu+1}$. El punto Q_ν sobre Γ^* también corresponde a un valor del parámetro σ_ν intermedio entre t_ν y $t_{\nu+1}$. De aquí que la suma de Riemann F_n dada en (54) toma la forma

$$F_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} [A(\sigma_\nu)\varphi'(\tau_\nu) + B(\sigma_\nu)\,\psi'(\tau_\nu') + C(\sigma_\nu)\,\chi'(\tau_\nu'')]\,[t_{\nu+1} - t_\nu].$$

Aquí los puntos t_0, t_1, . . . , t_n forman una subdivisión del intervalo $[a, b]$. del parámetro. Si Γ^* está orientado positivamente con respecto a t, los t_ν forman una sucesión creciente con $t_0 = a$, $t_n = b$, y $\Delta t_\nu = t_{\nu+1} - t_\nu > 0$. De lo contrario, los t_ν son decrecientes, $t_0 = b$, $t_n = a$, y $\Delta t_\nu < 0$. En nuestra notación para el intervalo del parámetro, a siempre representa el *menor* de los valores a, b y, por tanto, puede corresponder ya sea al punto inicial o al final del arco Γ^*.

Si ahora se aplica el teorema fundamental de existencia para las integrales definidas como límites de sumas de Riemann (ver el Volumen I, pp. 192 y siguientes, se encuentra que $F = \lim_{n\to\infty} F_n$ existe y está dado por la fórmula (56).* El factor $\varepsilon = \pm 1$ surge de la hipótesis hecha en ese teorema de que los puntos de subdivisión t_ν usados al formar la suma de Riemann constituyen una sucesión *creciente.* Cuando la orientación de Γ^* corresponde a la t decreciente, tienen que recorrerse los valores t_ν en el orden opuesto, empezando con t_n y terminando con t_0, y cambiar el signo de Δt_ν.

Es evidente que la definición de integral de línea y la fórmula (56) pueden extenderse al caso en donde Γ^* es una *curva simple cerrada orientada.** En este caso, se forma la suma de Riemann seleccionando n puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sobre Γ^* que se sigan mutuamente en el orden determinado por la orientación y se pone $P_0 = P_n$ en la expresión (54) para F_n.

*Los valores intermedios $\tau_\nu, \tau_\nu', \tau_\nu'', \sigma_\nu$ no necesitan ser los mismos para la convergencia (ver las observaciones en la p.195, Volumen I).

*Tal curva tiene una representación paramétrica continua (53), con t diferentes correspondientes a puntos diferentes, excepto que $t = a$ y $t = b$ proporcionan el mismo punto. Es más, se especifica un orden cíclico sobre Γ^*, correspondiente a t creciente, o bien, decreciente (véase el Volumen I, p. 339). Siempre puede representarse Γ^* como suma de arcos simples orientados Γ_i^* en la forma (51), donde para $i = 2, \ldots, n$ el punto final de Γ_{i-1}^* es el punto inicial de Γ_i^* y donde el punto final de Γ_n^* es el punto inicial de Γ_1^*.

En el Volumen I ya se han encontrado ejemplos de integrales sobre curvas en el plano x, y. Así, se ha representado el área orientada limitada por una curva orientada cerrada Γ^*, en la forma

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) dt$$

(ver el Volumen I, p.   ); es decir, como la integral de línea

$$A = \frac{1}{2}\int_{\Gamma^*} x\, dy - y\, dx.$$

Otro ejemplo es proporcionado por el trabajo W que realiza un campo de fuerzas con componentes ρ, σ al producir un movimiento desde un punto P_0 hasta un punto P_1 a lo largo de una curva $\Gamma^* = \widehat{P_0P_1}$, referido a la longitud de arco s como parámetro. Aquí, (ver el Volumen I, p. 420)

$$W = \int_{s_0}^{s_1}\left(\rho\frac{dx}{ds} + \sigma\frac{dy}{ds}\right) ds,$$

lo cual puede escribirse como

$$W = \int_{\Gamma^*} \rho\, dx + \sigma\, dy.$$

De la misma manera, puede definirse el *trabajo* realizado por fuerzas en el espacio con componentes ρ, σ, τ, al producir un movimiento a lo largo de un arco Γ^* en la dirección dada por su orientación, como una integral de línea

$$W = \int_{\Gamma^*} \rho\, dx + \sigma\, dy + \tau\, dz.$$

Ejercicios 1.9b

1. Hallar

$$\int z\, dx + x\, dy + y\, dz$$

(a) sobre el arco de la hélice

$$x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad z = t$$

que une a los puntos $(1, 0, 0)$ y $(1, 0, 2\pi)$;

(b) sobre el arco parabólico

$$x = x_0(1 - t^2), \qquad y = y_0(1 - t^2), \qquad z = t$$

que une los puntos $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$ (para constantes x_0, y_0).

c. Dependencia de las integrales de línea con respecto a los puntos extremos

Regresemos a la forma diferencial general L dada por (52). Sea Γ un arco simple (aún no orientado) con una representación paramétrica (53) seccionalmente suave.

Para dos puntos cualesquiera P_0, P_1 sobre Γ correspondientes a los valores t_0, t_1 del parámetro t, puede formarse la integral

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt}\right)dt.$$

Por la fórmula (57), I es igual a $\int L$ extendida sobre el subarco orientado $\widehat{P_0P_1}$ de Γ que tiene a P_0 como punto inicial y a P_1 como punto final. Se deduce que I no depende de la representación paramétrica particular. Se escribe

$$I = \int_{P_0}^{P_1} L$$

El valor de I es determinado por la pareja ordenada de puntos P_0, P_1 y el arco simple del cual ellos son puntos extremos.

Para P_0 fijo puede definirse una función $f = f(P)$ *a lo largo del arco* Γ, por medio de la integral indefinida

$$f(P) = \int_{P_0}^{P} L = \int_{t_0}^{t} \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt}\right) dt. \tag{58}$$

Entonces, tomando a f como una función de la variable independiente t, se tiene

$$\frac{df}{dt} = A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt}. \tag{59}$$

Así, escribiendo esta ecuación como

$$df = \frac{df}{dt}dt = A\,dx + B\,dy + C\,dz = L\,,$$

se expresa la forma diferencial lineal L (que no necesita ser exacta) como la diferencial de una función f; pero tiene que recordarse que esta relación sólo se cumple a lo largo de una curva especial Γ, sobre la cual f está definida.

Para dos puntos cualesquiera P y P' de Γ,

$$\int_{P}^{P'} L = f(P') - f(P). \tag{60}$$

Esto se deduce inmediatamente si se expresan las integrales de línea como integrales sobre la variable t y se aplica la relación fundamental entre las integrales definidas e indefinidas (ver el Volumen I, p. 190). Si Γ^*, el arco Γ con una cierta orientación, tiene el punto inicial A y el punto final B, se encuentra, en particular, que

$$\int_{\Gamma^*} L = \int_{A}^{B} L = f(B) - f(A). \tag{61}$$

Si $P_0, \ldots, P_n$ son puntos sobre Γ^* en el orden determinado por la orientación de Γ^*, con $P_0 = A$, $P_n = B$, se tiene

$$L = f(B) - f(A) = \sum_{\nu=0}^{n-1} [f(P_{\nu+1}) - f(P_\nu)]$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{P_\nu}^{P_{\nu+1}} L.$$

Si se denota el subarco con punto inicial P_ν y punto final $\Gamma_{\nu+1}{}^*$ por $P_{\nu+1}$, se tiene

$$\int_{P_\nu}^{P_{\nu+1}} L = \int_{\Gamma_{\nu+1}{}^*} L.$$

Aquí la orientación de $\Gamma_\nu{}^*$ concuerda con la de Γ, de modo que

$$\Gamma^* = \Gamma_1{}^* + \Gamma_2{}^* + \cdots + \Gamma_n{}^*.$$

Por lo tanto, *las integrales de línea son aditivas:*

$$\int_{\Gamma_1{}^* + \cdots + \Gamma_n{}^*} L = \int_{\Gamma_1{}^*} L + \cdots + \int_{\Gamma_n{}^*} L. \tag{62}$$

De modo semejante, si se intercambian los puntos extremos de Γ^*,

$$\int_{-\Gamma^*} L = -\int_{\Gamma^*} L. \tag{63}$$

Estas reglas son particularmente interesantes cuando se aplican a curvas cerradas orientadas que se representan como sumas de arcos simples orientados. Considérese un número de curvas simples cerradas orientadas $C_1{}^*, \ldots, C_n{}^*$ (ver la Fig. 1.19), las cuales pueden tener porciones en común. Supóngase que un arco simple Γ común a

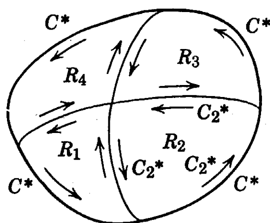


Figura 1.19 Aditividad de las integrales de línea sobre curvas cerradas.

dos de las curvas, C_i^* y C_k^*, recibe orientaciones opuestas de C_i^* y C_k^* y que las porciones de las curvas no comunes a dos cualesquiera de ellas se suman a una curva cerrada orientada C^*. Escribiendo cada integral de línea sobre una curva C_i^* como la suma de integrales sobre arcos simples y sumando todas estas integrales, las contribuciones de los arcos comunes se cancelan y queda la fórmula

$$\int_{C^*} L = \int_{C_1^*} L + \cdots + \int_{C_n^*} L. \tag{64}$$

En particular, estas situaciones surgen cuando las C_i^* son curvas planas que forman las fronteras de regiones bidimensionales R_i que no se traslapan y que juntas forman una región R con curva frontera C^*, teniendo todas las C_i^* y C^* la misma orientación. Más generalmente, la región R y su frontera C^* pueden estar sobre una superficie y R puede estar subdividida mediante arcos en subregiones R_i con curvas frontera C_i^* cuyas orientaciones se ajustan entre sí en la forma descrita.

Una aplicación un tanto diferente del mismo principio ocurre en el teorema siguiente. Considérense dos curvas orientadas C^* y C'^* (ver

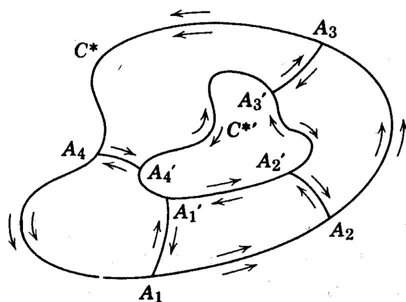


Figura 1.20

Fig. 1.20) subdivididas por los puntos $A_1, \ldots, A_n$ y $A_1', \ldots, A_n'$, respectivamente, en el orden del sentido de orientación, y supóngase que cada pareja de puntos correspondientes A_i y A_i' se unen por medio de una curva. Si se denota la curva orientada cerrada $A_iA_{i+1}A_{i+1}'A_i'$ (identificando A_{n+1} con A_1 y A_{n+1}' con A_1'), por C_i^*, entonces

(65) $$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i^*} L = \int_{C'^*} L - \int_{C^*} L.$$

1.10 El teorema fundamental sobre la integrabilidad de las formas diferenciales lineales

a. Integración de diferenciales totales

Una clase particularmente importante de formas diferenciales

(66) $$L = A\,dx + B\,dy + C\,dz$$

son las diferenciales totales de funciones $u = f(x, y, z)$, con A, B, C de la forma

(67) $$A = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad C = \frac{\partial f}{\partial z},$$

donde f es una función con primeras derivadas continuas. Mientras que, en general, el valor de $\int_{\Gamma^*} L$ no sólo depende de los puntos extremos sino del curso completo de la curva, aquí es válido el teorema siguiente:

La integral de una forma diferencial lineal L, que es la diferencial total de una función f, es igual a la diferencia de los valores de f en los puntos extremos y no depende del curso de Γ^* entre esos puntos. Esto es, se obtiene el mismo valor para $\int_{\Gamma^*} L$, para todas las curvas Γ^* que se encuentren en el dominio de f y tengan el mismo punto inicial P_0 y el mismo punto final P_1.

Para la demostración, supóngase que la curva Γ^* se refiere a un parámetro t, donde t_0 corresponde al punto inicial P_0 y t_1 al punto final P_1. Por (57), p. 119).

$$\int_{\Gamma^*} L = \int_{t_0}^{t_1} \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt}\right) dt.$$

Entonces, por la regla de la cadena de la derivación [ver la fórmula (18), p. 83] se tiene

$$\int_{\Gamma^*} L = \int_{t_0}^{t_1} \frac{df}{dt}\,dt = f\Big|_{t_0}^{t_1} = f(P_1) - f(P_0), \tag{68}$$

donde se escribe

$$f(P_i) = f(x(t_i),\, y(t_i),\, z(t_i))$$

para $i = 0{,}1$.

Se observa que, en lugar de requerir que la integral sea independiente de la trayectoria, igualmente sólo podría requerirse que la integral sobre una curva simple cerrada Γ^* tenga el valor 0, porque si se divide la curva Γ^* por medio de dos puntos P_0 y P_1 en dos arcos orientados $\Gamma_1{}^*$ y $\Gamma_2{}^*$, se tiene

$$\Gamma^* = \Gamma_1{}^* + \Gamma_2{}^*,$$

donde, digamos, Γ_1 tiene el punto inicial P_0 y punto final P_1, mientras que $\Gamma_2{}^*$ tiene el punto inicial P_1 y el punto final P_0 (ver la p. 124). Entonces

$$\int_{\Gamma^*} L = \int_{\Gamma_1{}^*} L + \int_{\Gamma_2{}^*} L = \int_{\Gamma_1{}^*} L - \int_{-\Gamma_2{}^*} L.$$

Aquí $-\Gamma_2{}^*$ tiene el mismo punto inicial P_0 y el mismo punto final P_1 que $\Gamma_1{}^*$. La anulación de $\int L$ sobre la curva cerrada Γ^* significa exactamente lo mismo que la igualdad de L tomada sobre los dos arcos simples cerrados que tienen a P_0 como punto inicial y a P_1 como punto final.

b. Condiciones necesarias para que las integrales de línea dependan únicamente de los puntos extremos

Sólo bajo condiciones muy especiales una integral de línea es independiente de la trayectoria, o bien, lo que es equivalente, la integral de línea a lo largo de una trayectoria cerrada es 0. Por ejemplo, si una curva cerrada C^* en el plano x,y forma la frontera de una región de área positiva, entonces la integral de línea $\int(x\,dy - y\,dx)$ sobre C^* no es 0. En la sección precedente se probó que para la independencia de $\int L$ de la trayectoria que une los puntos extremos, es suficiente que L sea una diferencial total. La tarea principal de la

teoría de las integrales de línea es demostrar que esta condición también es necesaria y, a continuación, expresar esta condición necesaria y suficiente en una forma conveniente para las aplicaciones.

Investiguemos esta cuestión de la independencia para las integrales sobre curvas en el espacio tres. Pero los resultados y demostraciones son exactamente análogos en cualquier número de dimensiones. Se establece la hipótesis de que $L = A\,dx + B\,dy + C\,dz$ es una forma diferencial lineal con coeficientes A, B, C que son funciones continuas de x, y, z en un conjunto abierto R del espacio. Entonces se cumple el teorema siguiente:

La integral de línea $\int L$ *tomada sobre un arco simple orientado* Γ^* *en* R *es independiente de la elección particular de* Γ^* *y queda determinada únicamente por los puntos inicial y final de* Γ^* *si y sólo si* L *es la diferencial total de una función* $f(x, y, z)$ *en* R.

Ya se ha probado en la p. 95 que esta condición es suficiente; es decir, para una diferencial exacta $L = A\,dx + B\,dy + C\,dz$ la integral $\int L$ es independiente de la trayectoria. Es fácil ver que la condición es necesaria. Supóngase que $\int_{\Gamma^*} L$ sólo depende de los puntos extremos de Γ^*. Se desea demostrar que existe una función $u(x, y, z)$ definida en R para la cual $du = L$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que dos puntos cualesquiera de R pueden conectarse por medio de un arco poligonal simple que se encuentre completamente en R.[1] Se elige un punto fijo P_0 en R y se define la función $u = u(x, y, z) = u(P)$ en cualquier punto P de R como $\int L$ extendida sobre cualquier arco simple con punto inicial P_0 y punto final P. Con el fin de calcular las derivadas parciales de u, considérese cualquier punto $(x, y, z) = P$ de R (Fig. 1.21). Entonces, como R es abierto, todos los puntos $(x + h, y, z) = P'$ también pertenecerán a R, siempre que $|h|$ sea lo suficientemente pequeño. Denotemos por γ^* el segmento rectilíneo orientado que une P y P', mientras que Γ^* denotará una trayectoria poligonal simple que une P_0 con P. Siempre puede modificarse Γ^* ligeramente para hacer que el último lado de este arco poligonal, que tiene a P como punto final, no sea paralelo al eje x. Entonces Γ^* y γ^* no tienen punto en común aparte de P (al menos para $|h|$ lo suficientemente pequeño) y $\Gamma^* + \gamma^*$ representa

*El conjunto abierto R siempre puede descomponerse en subconjuntos conexos que tengan esta propiedad (ver el Apéndice 112). Entonces se define u en cada uno de éstos por medio de la construcción indicada.

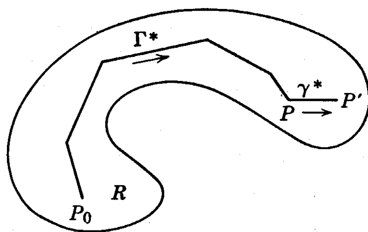


Figura 1.21

un arco simple con punto inicial P_0 y punto final P'. Se concluye [ver (62), p. 123] que

$$u(x+h, y, z) - u(x, y, z) = u(P') - u(P) = \int_{\Gamma^*+\gamma^*} L - \int_{\Gamma^*} L = \int_{\gamma^*} L$$

$$= \int_x^{x+h} A(t, y, z)\, dt$$

Dividiendo entre h y pasando al límite con $h \to 0$, se encuentra que, en efecto,

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = A,$$

y, de modo semejante, $\partial u/\partial y = B$ y $\partial u/\partial z = C$. Esto demuestra que $du = L$.

c. *Insuficiencia de las condiciones de integrabilidad*

Sin embargo, el teorema sobre la independencia de las integrales de línea que acaba de probarse no tiene gran valor a menos que se tenga alguna manera de averiguar si una diferencial dada L es una diferencial total o no. Es de desear tener alguna condición que sólo comprenda los coeficientes A, B, C de $L = A\,dx + B\,dy + C\,dz$ y que se verifique con facilidad. Ya se han reconocido las condiciones de integrabilidad

$$(69) \qquad \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0$$

como necesarias para la existencia de una función $u = f(x, y, z)$ con

la propiedad de que $L = du$. Una forma L que satisfaga a (69) recibe el nombre de *cerrada*. De aquí que toda forma exacta es cerrada. Como las integrales de línea sólo pueden ser independientes de la trayectoria particular que une a dos puntos cualesquiera cuando L es una diferencial total, se ve que *las condiciones* (69) *son necesarias, si L debe depender únicamente de los puntos extremos de la trayectoria de integración.* ¿También son suficientes estas condiciones? Son suficientes si nos permiten construir una función $u = f(x, y, z)$ para la cual

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad C = \frac{\partial f}{\partial z}. \tag{70}$$

El resultado sorprendente es que las condiciones de integrabilidad (69) son casi suficientes, pero no lo bastante, para asegurar que L sea la diferencial total de una función u y, por tanto, para asegurar la independencia de $\int L$ de la trayectoria. Las identidades (69) por sí mismas no son suficientes pero se vuelven suficientes si se agrega una hipótesis de carácter muy diferente, una hipótesis que se refiere a una *propiedad geométrica* de la región del espacio en la que se considera L.

Un contraejemplo sencillo muestra que las condiciones (69) por sí solas no son suficientes para garantizar que $\int L$ tomada sobre cualquier curva cerrada sea 0. Considérese la diferencial

$$L = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}, \tag{71}$$

correspondiente a la elección de los coeficientes

$$A = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad B = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad C = 0,$$

la cual está definida, excepto para los puntos sobre la recta $x = y = 0$ (el eje z). Se verifica fácilmente que se satisfacen las condiciones de integrabilidad (69) y, por tanto, que L es cerrada. Cuando se integra alrededor del círculo unitario C^*: $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 0$ en el plano x, y, orientado positivamente con respecto a t, se encuentra

$$\int_{C^*} L = \int_0^{2\pi} \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt}\right) dt = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\, dt$$
$$= 2\pi \neq 0.$$

En realidad, es fácil calcular $\int L$ alrededor de cualquier curva cerrada C para la L dada por (71). Introdúzcase el ángulo polar θ de un punto $P = (x, y, z)$ por medio de

$$\text{(72)} \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

es decir, el ángulo formado con el plano x,z por el plano que pasa por P y el eje z (ver la Fig. 1.22). Entonces

$$\text{(73)} \qquad d\theta = d \operatorname{arc}\tan\frac{y}{x} = L,$$

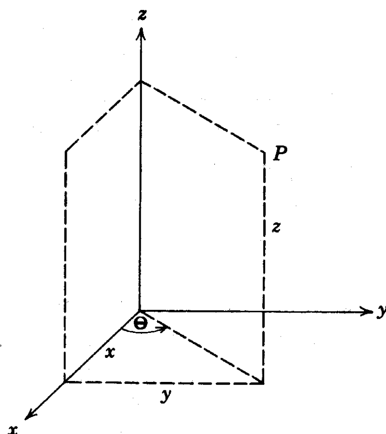


Figura 1.22

de modo que L se representa como la diferencial total de la función $u = \theta$. Las complicaciones surgen del hecho de que las fórmulas (72) definen los valores de θ sólo dentro de múltiplos enteros de 2π. Empezando con algunos valores posibles θ_0 para θ en un punto P_0, puede definirse θ en cualquier punto P uniendo P con P_0 mediante una curva continua y tomando

$$\theta(P) = \theta_0 + \int_{P_0}^{P} d\theta = \theta_0 + \int L$$

(ver el Volumen I, p. 434). Pero $\theta(P)$ definida de esta manera es multiforme, dependiendo de la elección de la curva: para una curva cerrada C^*, la expresión

$$\frac{1}{2\pi}\int_C d\theta$$

representa el número de veces que C *se enrolla alrededor* del eje z en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj (ver la Fig. 1.23). De aquí que el valor de

(74) $$\int_{P_0}^{P} d\theta$$

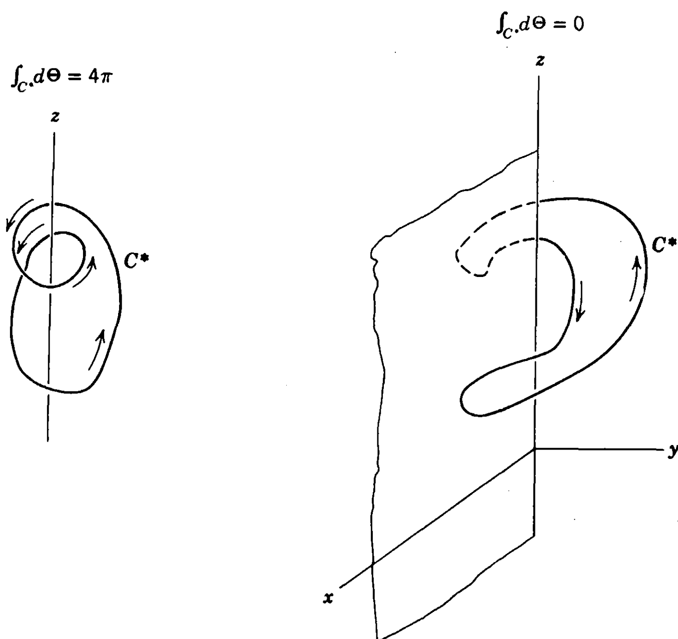


Figura 1.23

tomada para dos trayectorias diferentes con los puntos extremos P_0, P es el mismo sólo si al ir a lo largo de una trayectoria desde P_0 hasta P y regresar a lo largo de la otra trayectoria hasta P_0, se circunda cero veces el eje z. Puede evitarse que cualquier trayectoria vaya alrededor del eje z, considerando sólo puntos (x, y, z) con $y \neq 0$, o bien, $y = 0$ y $x > 0$, erigiendo, por decirlo así, una pared a lo largo del semiplano

$$y = 0, \qquad x \leqq 0$$

la cual no debe cruzarse. Los puntos no excluídos forman una región

R en la cual puede asignarse a θ un valor único con

$$-\pi < \theta < \pi$$

que constituye una función continuamente diferenciable $\theta = \theta(x, y, z)$ con diferencial L. Entonces, la integral (74) extendida sobre cualquier trayectoria en la región que una a P y P_0 tiene un valor único $\theta(P) - \theta(P_0)$, el cual no depende de la trayectoria particular. De modo semejante, la integral sobre una trayectoria cerrada en esta región tiene el valor 0.

d. Conjuntos simplemente conexos

Con el fin de enunciar el teorema fundamental, generalmente se necesita la noción de *conjunto abierto simplemente conexo.*[1] En un conjunto R, así, dos puntos cualesquiera pueden unirse mediante una trayectoria que se encuentre en R y dos trayectorias cualesquiera en R con los mismos puntos extremos pueden deformarse pasando de una a la otra sin mover los puntos extremos y sin dejar R.

Se darán las definiciones precisas de estas nociones. Una *trayectoria* C en R que une dos puntos $P' = (x', y', z')$ y $P'' = (x'', y'', z'')$ equivale a tres funciones continuas $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ definidas en el intervalo $0 \leqq t \leqq 1$, tales que el punto $P(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ está en R para toda t del intervalo y coincide con P' para $t = 0$ y con P'' para $t = 1$.[2] Se dice que el conjunto R es *conexo*[3] si dos puntos cualesquiera P' y P'' de R pueden unirse por medio de una trayectoria en R. En realidad, es fácil ver que entonces pueden unirse también mediante un arco simple suave en R, siempre que el conjunto R sea abierto.[4]

[1] Más precisamente "simplemente conexo a través de trayectorias".

[2] Diferentes t no necesariamente corresponden a $P(t)$ diferentes. Nótese que la descripción de una trayectoria no sólo incluye al conjunto de los puntos $P(t)$ en el espacio (el "soporte" de la trayectoria) sino también la elección de los parámetros t correspondientes. Todo arco simple en el espacio determina muchas trayectorias diferentes, correspondientes a diferentes representaciones paramétricas del arco. Siempre es posible hacer, mediante una substitución lineal, que los valores del parámetro varíen sobre el intervalo particular $0 \leq t \leq 1$.

[3] Más precisamente "conexo a través de trayectorias".

[4] Tomando una subdivisión lo suficientemente fina del intervalo del parámetro y uniendo los puntos correspondientes $P(t)$ mediante segmentos rectilíneos, primero se obtiene un arco poligonal en R, uniendo P' y P''. Omitiendo los lazos, se obtiene un arco poligonal simple. Remplazando las porciones pequeñas cercanas a los vértices por arcos parabólicos apropiados, se obtiene un arco simple suave en R que une P' y P''. Ver también la p. 143.

Ejemplos triviales de conjuntos conexos son los *conjuntos convexos* R, caracterizados por la propiedad de que dos cualesquiera de sus puntos P' y P'' pueden unirse mediante un segmento rectilíneo en R. Aquí puede elegirse como trayectoria lineal con puntos extremos $P' = (x', y', z')$ y $P'' = (x'', y'', z'')$ simplemente la terna de funciones lineales

$$\varphi(t) = (1 - t)\,x' + tx'', \qquad \psi(t) = (1 - t)\,y' + ty'',$$
$$\chi(t) = (1 - t)\,z' + tz''$$

para $0 \leqq t \leqq 1$. Ejemplos de tales conjuntos convexos son las esferas o cubos sólidos. Ejemplos de conjuntos conexos, pero no convexos, son un toro sólido, un cascarón esférico (es decir, el espacio entre dos esferas concéntricas) y el exterior de una esfera o cilindro. Cualquier conjunto R en el espacio, si no es conexo, consiste de subconjuntos conexos llamados *componentes* de R. No conexos son, por ejemplo, el conjunto de puntos que *no* pertenecen a un cascarón esférico o el conjunto de puntos para los que ninguna de sus coordenadas es un entero.

Sean C_0 y C_1 dos trayectorias cualesquiera en R, dadas respectivamente por $(\varphi_0(t), \psi_0(t), \chi_0(t))$ y $(\varphi_1(t), \psi_1(t), \chi_1(t))$. Sus puntos extremos P', P'', correspondientes a $t = 0$ y $t = 1$, serán los mismos. El conjunto conexo R es simplemente conexo si puede "deformarse C_0 hacia C_1", o bien, "unirse C_0 y C_1" por medio de una familia continua de trayectorias C_λ con puntos extremos comunes P', P''. Esto significará que existen las funciones continuas $(\varphi(t, \lambda), \psi(t, \lambda), \chi(t, \lambda)$ de las dos variables t, λ para $0 \leqq t \leqq 1$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, tales que el punto $P = (\varphi, \psi, \chi)$ siempre está en R y tales que P coincide con $(\varphi_0, \psi_0, \chi_0)$ para $\lambda = 0$, con $(\varphi_1, \psi_1, \chi_1)$ para $\lambda = 1$, con P' para $t = 0$ y con P'' para $t = 1$.[1] Para cada λ fijo, las funciones φ, ψ, χ determinan una trayectoria C_λ en R que une a los puntos P' y P''. A medida que λ varía desde 0 hasta 1, la trayectoria C_λ cambia continuamente desde C_0 hasta C_1 y, en este sentido, representa una "deformación continua" de C_0 hacia C_1 (ver la Fig. 1.24).

Como se ve con facilidad, los conjuntos *convexos* R son simplemente conexos. Sólo se tienen que asociar a las dos curvas C_0, C_1 que tienen los puntos extremos comunes P', P'', las curvas C_λ dadas por

[1]Se dice que las trayectorias C y C_1 son *homotópicas* relativas a P', P''.

$$\varphi(t, \lambda) = (1 - \lambda)\,\varphi_0(t) + \lambda\varphi_1(t)$$
$$\psi(t, \lambda) = (1 - \lambda)\,\psi_0(t) + \lambda\psi_1(t)$$
$$\chi(t, \lambda) = (1 - \lambda)\,\chi_0(t) + \lambda\chi_1(t).$$

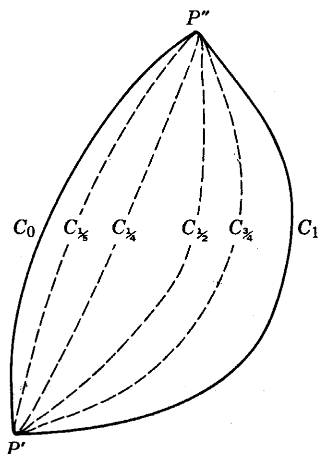


Figura 1.24

Aquí C_λ se obtiene geométricamente uniendo los puntos de C_0 y C_1 que pertenecen a la misma t por medio de un segmento rectilíneo y tomando el punto que divide tal segmento en la razón $\lambda/(1 - \lambda)$. Todos los puntos obtenidos de esta manera se encuentran en R, debido a la convexidad de R. Un tipo diferente de conjunto simplemente conexo a través de trayectorias está representado por un cascarón esférico. Por otra parte, no simplemente conexo es el conjunto R obtenido eliminando el eje z del espacio x, y, z. Aquí las dos trayectorias (semicírculos)

$$x = \cos \pi t, \qquad y = \operatorname{sen} \pi t, \qquad z = 0; \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

y

$$x = \cos \pi t, \qquad y = -\operatorname{sen} \pi t, \qquad z = 0; \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

tienen los mismos puntos extremos pero no pueden deformarse una en la otra sin cruzar el eje z, que no pertenece a R.[1]

[1]Esto se deduce del teorema fundamental que sigue y del hecho de que existe una forma diferencial cerrada, la dada por (71), cuya integral sobre el círculo completo no se anula.

e. El teorema fundamental

Ahora puede enunciarse la relación entre las nociones de formas diferenciales *cerrada* y *exacta:*

Si los coeficientes de la forma diferencial $L = A\,dx + B\,dy + C\,dz$ *tienen primeras derivadas continuas en un conjunto R simplemente conexo y satisfacen las condiciones de integrabilidad*

(75a) $$B_z - C_y = 0, \qquad C_x - A_z = 0, \qquad A_y - B_x = 0,$$

entonces L es la diferencial total de una función u definida en R:

(75b) $$A = u_x, \qquad B = u_y, \qquad C = u_z.$$

Para la demostración, basta con demostrar que la integral de L extendida sobre cualquier arco poligonal simple en R con punto inicial P' y punto final P'' tiene un valor que depende únicamente de P' y P'' (ver la p. 97). Represéntense, respectivamente, los dos arcos orientados $C_0{}^*$ y $C_1{}^*$ paramétricamente por

(76a) $$x = \phi_0(t), \qquad y = \psi_0(t), \qquad z = \chi_0(t), \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

y

(76b) $$x = \phi_1(t), \qquad y = \psi_1(t), \qquad z = \chi_1(t); \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

con $t = 0$ dando P' y $t = 1$ dando P''. Aplicando la conectividad simple de R, pueden "encajarse" las trayectorias (76a, b) en una familia[1] continua

(76c) $$x = \phi(t, \lambda), \qquad y = \psi(t, \lambda), \qquad z = \chi(t, \lambda)$$

reduciéndose a (76a, b) para $\lambda = 0, 1$ y a P', P'' para $t = 0, 1$. Por la fórmula (56), p. 119 se tiene

(76d) $$\int_{C_1{}^*} L - \int_{C_0{}^*} L$$
$$= \int_0^1 [(Ax_t + By_t + Cz_t)|_{\lambda=1} - (Ax_t + By_t + Cz_t)|_{\lambda=0}]\,dt,$$

donde x, y, z son las funciones de t, λ dadas por (76c). Supóngase, para empezar, que esas funciones tienen primeras derivadas continuas con respecto a t, λ y una segunda derivada mixta continua para $0 \leqq t \leqq 1, 0 \leqq \lambda \leqq 1$. Entonces, por (76d),

[1]No es necesario que las trayectorias de la familia sean simples para $\lambda \neq 0,1$.

(76e) $$\int_{C_1^*} L - \int_{C_0^*} L = \int_0^1 dt \int_0^1 (Ax_t + By_t + Cz_t)_\lambda \, d\lambda.$$

Ahora, aplicando la regla de la cadena de la derivación y las condiciones de integrabilidad (76a), se tiene la identidad

$$\begin{aligned}(Ax_t + By_t + Cz_t)_\lambda &= Ax_{\lambda t} + By_{\lambda t} + Cz_{\lambda t} + A_x x_\lambda x_t + A_y y_\lambda x_t + A_z z_\lambda x_t \\ &\quad + B_x x_\lambda y_t + B_y y_\lambda y_t + B_z z_\lambda y_t + C_x x_\lambda z_t \\ &\quad + C_y y_\lambda z_t + C_z z_\lambda z_t \\ &= (Ax_\lambda + By_\lambda + Cz_\lambda)_t\end{aligned}$$

Intercambiando los órdenes de la integración (ver la p. 109), se encuentra que

$$\int_{C_1^*} L - \int_{C_0^*} L = \int_0^1 d\lambda \int_0^1 (Ax_\lambda + By_\lambda + Cz_\lambda)_t \, dt = 0,$$

ya que x_λ, t_λ, z_λ se anulan para $t = 0, 1$, debido a que los puntos extremos son independientes de λ.

La suposición de que R es simplemente conexo es muy importante para llevar a cabo la demostración. Nos permite convertir la diferencia de las integrales de línea en una integral doble sobre alguna región intermedia.

Es fácil eliminar las restricciones sobre la existencia de las derivadas de las funciones ϕ, ψ, χ. Supóngase únicamente que los arcos C_0^* y C_1^* son suaves, es decir, que las funciones $\phi(t, \lambda), \psi(t, \lambda), \chi(t, \lambda)$ tienen una derivada continua respecto a t cuando λ tiene uno de los valores 0 ó 1, mientras que son continuas para los otros valores de λ. Entonces pueden aproximarse estas funciones (ver la p. 111) uniformemente por medio de las funciones $\bar{\phi}$, $\bar{\psi}$, $\bar{\chi}$, que tienen primeras derivadas continuas con respecto a t y λ y una segunda derivada mixta continua. Para que las funciones más suaves obtenidas representen una deformación de las trayectorias C_0^* y C_1^* de una en la otra, tienen que coincidir con ϕ, ψ, χ para $\lambda = 0, 1$ para $t = 0, 1$. Siempre se puede lograr ésto mediante una ligera modificación de $\bar{\phi}$, $\bar{\psi}$, $\bar{\chi}$, sumando términos apropiados de modo que

$$\begin{aligned}x = \bar{\phi}(t, \lambda) &- (1 - \lambda)\,[\bar{\phi}(t, 0) - \phi_0(t)] - \lambda[\bar{\phi}(t, 1) - \phi_1(t)] \\ &- (1 - t)\,[\bar{\phi}(0, \lambda) - \phi_0(0)] - t[\bar{\phi}(1, \lambda) - \phi_0(1)] \\ &+ (1 - t)(1 - \lambda)\,[\bar{\phi}(0, 0) - \phi_0(0)] + (1 - t)\lambda\,[\bar{\phi}(0, 1) - \phi_0(0)] \\ &+ t(1 - \lambda)\,[\bar{\phi}(1, 0) - \phi_0(1)] + t\lambda\,[\bar{\phi}(1, 1) - \phi_0(1)]\end{aligned}$$

con expresiones análogas para y y z. Estas funciones tienen los valores correctos para $\lambda = 0, 1$, y para $t = 0, 1$, tienen primeras derivaciones y segundas derivadas mixtas continuas y puede hacerse que se aproximen a las ϕ, ψ, χ originales tanto que los puntos correspondientes (x, y, z) aún estén en el conjunto abierto R.

Por último, puede extenderse la igualdad de las integrales de L hacia arcos C_0^*, C_1^* que sólo sean *seccionalmente* suaves, por ejemplo, hacia arcos poligonales, aproximando estos arcos por medio de arcos suaves con los mismos puntos extremos. Todas las integrales sobre los arcos suaves de aproximación tienen los mismos valores y, entonces, lo mismo se concluye en el límite para las integrales sobre C_0^* y C_1^*.

Apéndice

La intuición geométrica y la realidad física siempre han proporcionado motivación poderosa e ideas guía para el pensamiento matemático constructivo. Sin embargo, con el avance del análisis desde el principio del siglo XIX, se ha vuelto una necesidad imperiosa dejar de invocar a la intuición como la justificación principal de las consideraciones matemáticas. Nos hemos vuelto cada vez más hacia las demostraciones rigurosas basadas en la precisión robustecida axiomáticamente y los conceptos y procedimientos claramente enunciados. En este desarrollo, la noción de *conjunto*, en particular de *conjunto de puntos*, ha jugado un papel primordial y, por ahora, ha sido absorbido en la trama del análisis. Este apéndice da una simple descripción preliminar de algunos de estos conceptos.

A.1 El principio del punto de acumulación en varias dimensiones y sus aplicaciones

Para establecer la teoría de las funciones de varias variables sobre una base firme, puede procederse exactamente de la misma manera que en el caso de funciones de una variable. Basta discutir temas en el caso de dos variables únicamente, ya que los métodos son esencialmente los mismos para funciones de más de dos variables independientes.

a. El principio del punto de acumulación

Basamos nuestra discusión en el principio de Bolzano y Weierstrass del punto de acumulación. Una pareja de números (x, y) puede representarse en la manera usual por medio de un punto con las coordenadas rectangulares x y y en un plano x, y. Considérese ahora un conjunto infinito acotado de tales puntos $P(x, y)$, es decir, un conjunto que contiene un número infinito de puntos distintos, los cuales se encuentran todos en una parte acotada del plano, de modo que $|x| < C$ y $|y| < C$, donde C es una constante. El principio del punto de acumulación afirma que *todo conjunto S de puntos infinito y acotado tiene por lo menos un punto de acumulación.* Esto es, existe un punto Q con coordenadas (ξ, η) tal que en toda vecindad de Q, digamos, en toda región

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 < \delta^2,$$

donde δ es cualquier número positivo, se encuentran un número infinito de puntos de S. Se deduce que puede elegirse del conjunto infinito y acotado de puntos una sucesión de puntos distintos P_1, P_2, P_3, . . que converge a un límite Q. La sucesión de los P_i puede construirse por inducción, dando a δ sucesivamente los valores $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, . . . ; elíjase P_1 arbitrariamente en S; si se han definido $P_1, \ldots, P_n$ tómese como P_{n+1} a cualquiera del número infinito de puntos del conjunto S que se encuentre a una distancia $< 1/(n+1)$ de Q y que sea diferente a Q y a $P_1, \ldots, P_n$.

Puede probarse analíticamente este principio del punto de acumulación para varias dimensiones, por el método usado en la demostración correspondiente en el Volumen I (p. 95), sustituyendo simplemente los intervalos usados allí por regiones rectangulares. Se obtiene una demostración más fácil si se aplica el principio para una dimensión. Para hacerlo, nótese que, por hipótesis, todo punto $P(x, y)$ del conjunto S tiene una abscisa x para la cual se cumple la desigualdad $|x| < C$ Existe una $x = x_0$ que es la abscisa de un número infinito de puntos P (los cuales, por lo tanto, se encuentran verticalmente uno por encima de otro), o bien, cada x sólo pertenece a un número finito de puntos P. En el primer caso, se elige x_0 y se considera el número infinito de valores de y tales que (x_0, y) pertenezca al conjunto. Estos valores de y tienen un punto de acumulación para una dimensión. De aquí que puede hallarse una sucesión de valores de y, digamos $y_1, y_2, \ldots$, tales que $y_n \to \eta_0$, de lo cual se deduce que

los puntos (x_0, y_n) del conjunto tienden al punto límite (x_0, η_0), el cual, por tanto, es un punto de acumulación del conjunto. En el segundo caso, debe haber un número infinito de valores distintos de x que son las abscisas de puntos del conjunto y puede elegirse una sucesión $x_1, x_2, \ldots$ de estas abscisas que tienden a un límite ξ. Para cada x_n, sea $P_n = (x_n, y_n)$ un punto del conjunto con abscisa x_n. Las y_n forman un conjunto infinito y acotado de números; de aquí que puede elegirse una subsucesión $y_{n_1}, y_{n_2}, \ldots$ que tiende a un límite η. La subsucesión correspondiente de abscisas $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ aún tiende al límite ξ; de aquí que los puntos $P_{n_1}, P_{n_2}, \ldots$ tienden al punto límite (ξ, η). De donde, en cualquier caso, puede hallarse una sucesión de puntos del conjunto que tiende hacia un punto límite y queda demostrado el teorema.

b. Criterio de convergencia de Cauchy. Compacticidad

Una consecuencia del teorema de Bolzano-Weierstrass es que *toda sucesión infinita y acotada de puntos $P_1, P_2, \ldots$ tiene una subsucesión convergente.* En efecto, si la sucesión contiene un número infinito de elementos *distintos,* éstos forman un conjunto infinito de puntos distintos, de los cuales, de acuerdo con el principio de Weierstrass, puede elegirse una sucesión que converja a un punto Q. Si la sucesión no contiene un número infinito de elementos distintos, entonces al menos uno de sus elementos debe repetirse con una frecuencia infinita; entonces existe un punto Q que aparece con una frecuencia infinita en la sucesión, y la subsucesión formada por los elementos que son iguales a Q converge al punto Q.

Una consecuencia importante es el *criterio de convergencia de Cauchy:*

Una sucesión de puntos $P_1, P_2, \ldots$ en el plano (y de modo semejante una sucesión en el espacio euclidiano n-dimensional) converge a un límite si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $N = N(\varepsilon)$ tal que la distancia entre P_n y P_m es menor que ε siempre que tanto n como m sean mayores que N.

La demostración se desarrolla exactamente igual que la correspondiente para las sucesiones de números reales dada en el Volumen I (p. 97). Se ve inmediatamente que una sucesión que satisface la condición de Cauchy es acotada; de aquí que, por el teorema precedente, contiene una subsucesión convergente con un límite Q y entonces se deduce inmediatamente que toda la sucesión converge a Q.

Un conjunto S de puntos en el plano se calificó como *cerrado* si todos los puntos frontera de S pertenecen a S. El límite Q de toda sucesión convergente de puntos de un conjunto cerrado S es nuevamente un punto de S (ver la p. 33). Como se ha visto que toda sucesión infinita y acotada contiene una subsucesión convergente de puntos, se encuentra que *toda sucesión infinita formada por puntos de un conjunto S de puntos en el plano, acotado y cerrado, contiene una subsucesión que converge a un punto de S.* Generalmente se dice que un conjunto S es *compacto*[1] si toda sucesión formada por elementos de S contiene una subsucesión convergente con un límite en S. De aquí que *un conjunto cerrado y acotado de puntos en el plano (o en el espacio euclidiano n-dimensional) es compacto.* El lector puede verificar fácilmente el recíproco: Todo conjunto compacto de puntos en el plano es cerrado y acotado. En el futuro, a menudo nos referiremos a los conjuntos *cerrados y acotados* simplemente como conjuntos *compactos.*

c. El teorema de cobertura de Heine-Borel

Una consecuencia notable del principio de Bolzano-Weierstrass es el *teorema de Heine-Borel:*

Sean dados un conjunto S compacto (es decir, cerrado y acotado) y un sistema $\sum$ de un número infinito de conjuntos abiertos que cubren a S en el sentido de que cada punto de S pertenece a, por lo menos, uno de los conjuntos abiertos en $\sum$. Entonces puede hallarse un número finito de conjuntos en $\sum$ que cubren a S.

Como una ilustración, considérese el conjunto infinito S de puntos sobre el eje x que consiste de los puntos $P_n = (1/n, 0)$ para $n = 1, 2, \ldots$ y del origen $P_0 = (0, 0)$. Este es un conjunto cerrado. Para $n = 1, 2, \ldots$, denotemos por S_n el disco abierto

$$\sqrt{(x-1/n)^2 + y^2} < \frac{1}{3n^2}\cdot$$

con centro en P_n y radio $1/3n^2$, y por S_0 el disco

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{100}.$$

[1] A veces, de manera más precisa, "secuencialmente compacto".

Evidentemente el sistema infinito de todos los conjuntos $S_0, S_1, S_2, \ldots$ cubre a S. En concordancia con el teorema de Heine-Borel, puede elegirse un subsistema *finito* que cubra a S, por ejemplo el sistema que consiste de $S_0, S_1, \ldots, S_{100}$. Aquí se ve inmediatamente la importancia de la hipótesis de que S sea *cerrado*. El conjunto T de puntos que consiste de $P_1, P_2, \ldots$ únicamente, sin P_0, es cubierto por el sistema que consiste de $S_1, S_2, \ldots$; pero ningún subsistema finito de estos conjuntos, cada uno de los cuales sólo contiene un punto de T, puede cubrir a T.

Para probar el teorema de Heine-Borel, usemos un argumento indirecto. Supóngase que el teorema es falso. El conjunto S, siendo acotado, se encuentra en un cuadrado Q. Subdivídase este cuadrado en cuatro cuadrados iguales. La parte de S que se encuentra en al menos uno de estos cuadrados o sobre su frontera no puede ser cubierta por un número finito de los conjuntos en $\sum$; porque si cada una de las cuatro partes de S pudiera ser cubierta de esta manera, el propio S sería cubierto. Llamaremos Q_1 a esta parte de Q. Subdivídase ahora Q_1. en cuatro partes iguales. Por el mismo argumento, una de las cuatro partes de Q_1 es un cuadrado Q_2 tal que los puntos de S que se encuentran en Q_2 o sobre su frontera no pueden ser cubiertos por un número finito de los conjuntos abiertos en $\sum$. Continuando en esta forma, se obtiene una sucesión infinita de cuadrados $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ cada uno contenido en el precedente, con su tamaño reduciéndose hasta 0 y tales que los puntos de S en la cerradura de cualquier Q_n no pueden ser cubiertos por un número finito de los conjuntos en $\sum$. Evidentemente, para cada n puede hallarse un punto P_n de S que se encuentre en el interior o sobre la frontera de Q_n. Entonces $P_1, P_2, \ldots$ es una sucesión de puntos de S. Como S es acotado, la sucesión es acotada y debe tener una subsucesión que converge a algún punto A. Como S es cerrado, A es un punto de S y, por tanto, está contenido en un conjunto abierto Ω que pertenece a $\sum$. Pero entonces, una vecindad completa de A pertenece a ese conjunto abierto Ω, digamos, la vecindad que consiste de los puntos que se encuentran a una distancia menor que ε de A. Puede elegirse un n tan grande que P_n se encuentre a una distancia menor que $\varepsilon/2$ de A y que la diagonal de Q_n tenga una longitud menor que $\varepsilon/2$. Entonces el cuadrado completo Q_n está contenido en la vecindad ε de A y, por tanto, también en Ω. Se ve que el conjunto Ω del sistema $\sum$ contiene por sí solo a un cuadrado completo Q_n y a su frontera, lo cual es contrario a la hipótesis para la sucesión Q_n. Esto completa la demostración.

d. *Una aplicación del teorema de Heine-Borel a conjuntos cerrados que están contenidos en conjuntos abiertos*

Sea R un conjunto abierto en el plano.[1] Por definición, todo punto P de R tiene una vecindad que se encuentra completamente en R. Para puntos P próximos a la frontera de R, la vecindad tiene que ser muy pequeña. Es notable el hecho de que para P confinado en un subconjunto cerrado S de R, puede hallarse un tamaño *uniforme* para las vecindades que estén contenidas

Si un conjunto cerrado y acotado S está contenido en un conjunto abierto R, existe un ε positivo tal que la vecindad ε de todo punto P de S está contenida en R. En otras palabras, los puntos que no están en R se encuentran por lo menos a una distancia ε de todos los puntos de S.[2]

Para la demostración, se aplica la hipótesis de que R es abierto. Para todo punto P en R existe un disco con centro en P que está contenido en R. El radio de este disco, llamémosle r, depende de P; es decir, $r = r(P)$. Tómese ahora para cualquier P en S, el disco abierto de radio $\frac{1}{2}r(P)$ y centro en P. Por el teorema de Heine-Borel, puede hallarse un número finito de estos discos que cubren el conjunto compacto S. Por tanto, puede hallarse un número finito de puntos $P_1, \ldots, P_n$ en S tales que todo punto P de S esté contenido en uno de los discos de centro P_k y radio $\frac{1}{2}r(P_k)$ para $k = 1, \ldots, n$. Sea ε el menor de los números positivos $\frac{1}{2}r(P_1), \ldots, \frac{1}{2}r(P_n)$. Entonces, para todo P en S, la vecindad ε de P se encuentra en R, porque P se encuentra en algún disco de centro P_k y radio $\frac{1}{2}r(P_k)$. Por construcción, el disco concéntrico D de radio $r(P_k)$ está completamente en R. Como $\overline{PP_k} < \frac{1}{2}r(P_k)$ y $\varepsilon \leq \frac{1}{2}r(P_k)$, el disco D contiene al disco de radio P alrededor de P. Esto demuestra que el disco de radio ε y centro P está en en R.

Como ejemplo, considérese una curva S que se encuentra en el conjunto abierto R. Tal curva es un conjunto de puntos $P = (x, y)$ que puede representarse en la forma

$$x = \phi(t), \qquad y = \psi(t)$$

[1] Todo lo que se dice en este párrafo se aplica con igual propiedad a las dimensiones superiores si se sustituye el término "disco" por el de "bola".

[2] Es esencial que S sea acotado. Si, por ejemplo, R es el semiplano abierto $y > 0$ y S es conjunto cerrado que consiste de los puntos en el plano x, y con $y \geq 1/x, x > 0$, la frontera de R se aproxima arbitrariamente a los puntos de S.

con el auxilio de dos funciones continuas ϕ y ψ, donde el parámetro t varía sobre un intervalo cerrado $0 \leq t \leq 1$.[1] Tal curva S es un conjunto *cerrado* de puntos. En efecto, sea $P_1, P_2, \ldots$ una sucesión de puntos sobre S que converge a un punto P. Considérense los valores correspondientes del parámetro: $t_1, t_2, \ldots$, los cuales todos están en el intervalo cerrado $a \leq t \leq b$. Ya que un intervalo cerrado y acotado es compacto, una subsucesión de los t_n converge a un valor t en el intervalo. Como ϕ y ψ son continuas, los P_n correspondientes convergen al punto $Q = (x(t), y(t))$ sobre S. De donde, una subsucesión de la sucesión $P_1, P_2, \ldots$ converge a un punto Q de S. Dado que la sucesión completa converge a P, se tiene $P = Q$ y, por tanto, P está en S. Así, S contiene a todos los límites de las sucesiones de puntos de S y, en consecuencia, es cerrado.

Si la curva está en el conjunto abierto R, puede hallarse un número positivo ε tal que todos los discos de radio ε con centros sobre S estén en R. Como f y g son continuas y, por tanto, uniformemente continuas, puede hallarse un número positivo δ tal que dos puntos sobre S estén a una distancia menor que ε si los valores t de su parámetro difieren en menos que δ. Puede dividirse el intervalo del parámetro por medio de los puntos $t_1, \ldots, t_{n-1}$, tales que

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

donde la longitud de cada subintervalo es menor que δ. Sean $P_0, P_1, \ldots, P_n$ los puntos correspondientes sobre S. Entonces P_{i+1} siempre se encuentra en el disco de radio ε alrededor de P_i. También, el segmento rectilíneo que une P_i y P_{i+1} está completamente en el disco de radio ε y centro en P_i, y, por tanto, está contenido en R. Si se unen puntos sucesivos P_i por medio de segmentos rectilíneos, se obtiene una *curva poligonal* que está completamente en R y tiene los mismos puntos extremos P_0, P_n que la curva continua S. Este resultado puede enunciarse como sigue:

Si dos puntos de un conjunto abierto R se pueden unir mediante una curva que esté en R, entonces también pueden unirse por medio de una curva poligonal en R.

[1]No es necesario que la curva sea *simple;* es decir, diferentes t pueden corresponder al mismo punto P. La pareja de funciones define una "trayectoria" y S es el "soporte" de esa trayectoria.

A.2. Propiedades básicas de las funciones continuas

Para funciones f definidas y continuas en un conjunto cerrado y acotado S pueden enunciarse los dos teoremas fundamentales siguientes:

La función f toma un valor máximo y un valor mínimo en S.

La función f es uniformemente continua en S.

Las demostraciones de estos teoremas son semejantes a las demostraciones correspondientes para las funciones de una variable (ver el Volumen I, pp. 100-101) y no es necesario repetirlas.

El segundo teorema también se puede obtener como una consecuencia inmediata del teorema de Heine-Borel. Prescríbase un $\varepsilon > 0$. Si f es continua en cada punto de S, para cada punto δ en S existe una vecindad δ de P de un cierto radio $\delta = \delta(P)$ tal que $|f(Q) - f(P)| < \varepsilon/2$ para cualquier Q en S que se encuentre en esa vecindad. Ahora bien, para cada P en S, elíjase una vecindad Ω_P de radio $\frac{1}{2}\delta(P)$. Evidentemente, la Ω_P cubre a S. Puede seleccionarse un número finito de ellas, digamos aquéllas con centros en $P_1, \ldots, P_n$ que también cubran a S. Sea Δ el menor de los números $\frac{1}{2}\delta(P_1), \ldots, \frac{1}{2}\delta(P_n)$. Si entonces P y Q son dos puntos cualesquiera de S cuya distancia es menor que Δ, el punto P está a una distancia menor que $\frac{1}{2}\delta(P_k)$ de uno de los puntos P_k con $k = 1, \ldots, n$. Como $\Delta \leq \frac{1}{2}\delta(P_k)$, se ve que tanto P como Q se encuentran en la vecindad $\delta(P_k)$ de P_k. De aquí que

$$|f(P) - f(P_k)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \qquad |f(Q) - f(P_k)| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

y, por tanto,

$$|f(P) - f(Q)| < \varepsilon.$$

Esto establece la continuidad uniforme de f, puesto que Δ es independiente de la localización particular de P y Q.

A.3. Nociones básicas de la teoría de los conjuntos de puntos

a. Conjuntos y subconjuntos

En argumentos más complicados que comprenden conjuntos de puntos (particularmente en la teoría de la integración), resulta conveniente usar algunas notaciones estándar para las operaciones con

conjuntos. Los conjuntos de interés para nosotros siempre son conjuntos de números, de puntos, de funciones o de conjuntos de estos tipos. Por ejemplo un "disco" en el plano se define como un conjunto de puntos (x, y) para los cuales

$$(x - x^0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$$

para x_0, y_0, r. fijos. Un ejemplo de un conjunto de conjuntos (o *familia* de conjuntos) sería el que consiste de todos los discos que contienen el origen; que serían aquellos discos para los cuales $x_0^2 + y_0^2 < r^2$.

Nos abstendremos de tratar de reducir la noción básica de *conjunto* a unas aún más fundamentales o de analizar las dificultades logicas que intervienen en esta noción. Para nosotros, un conjunto S está definido si para todo objeto α es correcta exactamente una de las dos proposiciones siguientes: (1) α pertenece a S; (2) α *no pertenece* a S. En el caso (1) también se dice que α *es un elemento* de S, o bien, que α *está contenido en* S; simbólicamente[1] ésto se denota por

$$\alpha \in S,$$

y en el caso (2) por

$$\alpha \notin S.$$

Por ejemplo, si S es el disco dado por la desigualdad $x^2 + y^2 < r^2$, entonces $\alpha \in$ S significa que α es un punto en el plano con coordenadas x, y que tiene la propiedad de que $x^2 + y^2 < r^2$. Generalmente, los elementos de un conjunto S pueden caracterizarse por algunas *propiedades* comunes (por ejemplo, por la propiedad de que pertenecen a S). El conjunto S de los elementos α que tienen las propiedades $A, B, \ldots$ se escribe simbólicamente como

$$S = \{\alpha\colon \alpha \text{ tiene las propiedades } A, B, \ldots\}.$$

Por ejemplo, el disco S con centro (x_0, y_0) y radio r puede describirse como

$$S = \{(x, y)\colon x, y = \text{números reales}; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}.$$

El conjunto descrito por

$$S = \{n : n = \text{ entero}; \quad 2 < n < 5\}$$

[1] No debe confundirse el símbolo $\in$ con la letra griega ε.

consiste de los dos elementos $n = 3$ y $n = 4$.

Para muchos fines, resulta conveniente introducir el conjunto "vacío" (o "nulo") con el símbolo especial $\emptyset$. Este conjunto no tiene elementos: $\alpha \notin \emptyset$ para toda α. Por ejemplo, un disco abierto de radio 0 y centro en el origen coincide con $\emptyset$:

$$\{(x, y) : x, y = \text{ números reales; } x^2 + y^2 < 0\} = \emptyset.$$

Dos conjuntos S y T son iguales cuando tienen los mismos elementos, sin importar las descripciones o propiedades diferentes usadas en su definición: $S = T$ significa que $x \in S$ si y sólo si $x \in T$.

Se dice que un conjunto S en un subconjunto de un conjunto está contenido en T") si T contiene a todos los elementos que están contenidos en S, es decir, si $\alpha \in S$ implica que $\alpha \in T$. Esto se escribe simbólicamente:

$$S \subset T$$

o, menos frecuentemente,

$$T \supset S.$$

Así, si S es el disco de radio 1 alrededor del origen y T el disco de radio 4 alrededor del punto $(1, 1)$, entonces $S \subset T$. De modo semejante, $\emptyset \subset S$ y $S \subset S$ para todos los conjuntos S.

Por supuesto, se escogen los símbolos $\subset$ y $\supset$ por su semejanza con los signos $<$ y $>$ de la aritmética (o, más precisamente, con los signos $\leq$ y $\geq$). Los símbolos en cuestión comparten con estos últimos las propiedades básicas:

$$S \subset T \quad \text{y} \quad T \subset S \quad \text{implica que} \quad S = T$$
$$S \subset T \quad \text{y} \quad T \subset R \quad \text{implica que} \quad S \subset R.$$[1]

Una diferencia básica entre los signos "contenido en" para los conjuntos y los signos de orden para los números es que para los números reales siempre se tiene $x \leq y$, o bien, $y \leq x$, mientras que para los conjuntos ninguna de las proposiciones $S \subset T$, o bien, $T \subset S$ tiene que cumplirse. El símbolo $\subset$ sólo define un ordenamiento "parcial" entre conjuntos; de dos conjuntos es posible que ninguno contenga al otro.

[1]Este es el silogismo común de la lógica: Si todos los puntos con la propiedad A tienen la propiedad B y todos los objetos con la propiedad B tienen la propiedad C, entonces todos los objetos con la propiedad A tienen la propiedad C.

b. Unión e intersección de conjuntos

Durante las últimas décadas, un gran número de símbolos lógicos ha encontrado amplia aceptación en las matemáticas, de modo que ahora es costumbre expresar muchos teoremas matemáticos completamente en notación simbólica sin el uso de palabras ordinarias o estructuras de oraciones.[1] El uso de la notación simbólica apropiada ha sido esencial para el desarrollo de las matemáticas desde sus principios; de hecho, en algunos casos raros, se ha retardado el progreso en algún campo durante siglos precisamente por la falta de una notación apropiada; tal vez ese fue el caso con el álgebra en la antigüedad. Por otra parte, una notación demasido concentrada puede requerir un gran esfuerzo del lector que trate de relacionar la información en la forma "dishidratada" con su experiencia ordinaria. Los autores de libros que no están dedicados ante todo a la lógica y a los fundamentos de las matemáticas transigen en el uso de las abreviaturas lógicas, de acuerdo con sus gustos y los requerimientos de los temas especiales bajo consideración.

Existen dos símbolos más de la teoría de conjuntos que encontraremos casi indispensables posteriormente en este libro, a saber, los símbolos para las operaciones de "unión" e "intersección" de conjuntos. Dados dos conjuntos S y T se escribe $S \cup T$ para la "unión" de los dos conjuntos, es decir, para el conjunto de los elementos que están en S "o" en T:

$$S \cup T = \{a : a \in S \text{ o } a \in T\}.^{2}$$

De modo semejante, la "intersección" $S \cap T$ de S y T se define como el conjunto de los elementos que pertenecen tanto a S como a T:

$$S \cap T = \{a : a \in S \text{ y } a \in T\}.$$

[1]Ejemplos de símbolos usados con frecuencia son los que siguen:

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$: el conjunto cuyos miembros son precisamente $x_1, \ldots, x_n$

$S \times T$: el conjunto de las parejas ordenadas (a, b) con $a \in S$ y $b \in T$ ("producto cartesiano" de los conjuntos S, T)

$\rightarrow$: "implica"

$\exists x$: "existe una x"

$\forall x$: " para toda x".

[2]Aquí la palabra "o", como el latín *vel,* no es exclusiva. $S \cup T$ consiste de los elementos que pertenecen *por lo menos a uno* de los dos conjuntos S, T pero puede pertenecer a ambos.

Por ejemplo, si S y T son intervalos sobre eje de los números reales y si

$$S = \{x : 3 < x < 5\},$$
$$T = \{x : 4 \leq x < 6\},$$

entonces

$$S \cup T = \{x : 3 < x < 6\}$$
$$S \cap T = \{x : 4 \leq x < 5\}$$

Las operaciones $\cup$ y $\cap$ se aplican a dos conjuntos cualesquiera S y T, siempre que se use el símbolo para el conjunto vacío, escribiendo

$$S \cap T = \emptyset$$

cuando S y T son *ajenos,* es decir, no tienen elemento común. Nótese que $S \cup \emptyset = S$, $S \cap \emptyset = \emptyset$ para cualquier S.

La operación $\cup$ tiene muchas propiedades en común con la adición. En particular, si S y T son conjuntos "ajenos"—es decir, conjuntos sin elementos comunes— y tienen un número finito de elementos, entonces el número de elementos en $S \cup T$ es precisamente la suma de los números de elementos en S y en T. Sin embargo, generalmente no hay una operación inversa única para la unión. Sólo si se supone que S y T son ajenos y $S \subset R$, la ecuación

$$S \cup T = R$$

tiene una solución única T. A menudo, para los conjuntos ajenos S, T, la unión se denota por $S + T$, y para $S \subset R$, la solución T de la ecuación $S + T = R$ por $R - S$ ("el complemento de S relativo a R"). Más generalmente, usaremos el símbolo $R - S$ para conjuntos cualesquiera R, S, para denotar el conjunto de elementos de R que no pertenecen a S. Entonces $S + (R - S) = R \cup S$.

La unión de n conjuntos $S_1, \ldots, S_n$ se define como el conjunto de elementos que pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos $S_1, \ldots, S_n$, y se denota en las diversas formas

$$\{a : a \in S_1 \text{ o } a \in S_2 \text{ o } \ldots \text{ o } a \in S_n\}$$
$$= S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$$
$$= \bigcup_{k=1}^{n} S_k$$

en analogía con los símbolos de sumatoria y producto. De modo

semejante, la intersección de los conjuntos $S_1, \ldots, S_n$ definida como el conjunto de los elementos comunes a todos ellos, es

$$\{a : a \in S_1 \text{ y } a \in S_2 \text{ y } \ldots \text{ y } a \in S_n\}$$
$$= S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n = \bigcap_{k=1}^{n} S_k.$$

Con igual facilidad podemos formar uniones e intersecciones de un número infinito de conjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, los cuales se escriben respectivamente como

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k = \{a : a \in S_n \text{ para algún } n\}$$
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k = \{a : a \in S_n \text{ para todo } n\}.$$

Por ejemplo, si S_n es el conjunto de los números reales $x < n$,

$$S_n = \{x : x \text{ real}, \ x < n\},$$

se tiene

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k = \{x : x \text{ real}\}$$
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k = \{x : x \text{ real}, \ x < 1\}.$$

De hecho, pueden formarse la unión y la intersección para familias F arbitrariamente grandes de conjuntos S, incluso donde los diferentes conjuntos S en F no se distinguen, o no pueden ser distinguidos, por medio de un subíndice n con $n = 1, 2, 3, \ldots$. Se escribe

$$\bigcup_{S \in F} S = \{a : a \in S \text{ para algún } S \text{ con } S \in F\}$$
$$\bigcap_{S \in F} S = \{a : a \in S \text{ para todo } S \text{ con } S \in F\}.$$

Así la unión de todos los discos en el plano x, y que contienen al punto $(1, 0)$ pero no al punto $(-1, 0)$ es el conjunto de todos los (x, y) para los cuales $y \neq 0$, o bien, $y = 0$ y $x > -1$. La intersección de la misma familia de discos contiene únicamente al punto $(1, 0)$.

c. Aplicaciones a los conjuntos de puntos en el plano

Algunos de nuestros primeros resultados y definiciones (ver las pp. 30) se pueden reescribir más compactamente en la notación in-

troducida en las últimas secciones. Por tanto, dado un conjunto S de puntos en el plano, se obtiene una descomposición del plano completo π en tres conjuntos ajenos, a saber, el conjunto S^0 de los puntos interiores de S, el conjunto ∂S de los puntos frontera de S y el conjunto S_e de los puntos exteriores de S.

$$\pi = S^0 \cup \partial S \cup S_e$$

o más precisamente,

$$\pi = S^0 + \partial S + S_e$$

Puesto que los conjuntos son ajenos:

$$S^0 \cap \partial S = \partial S \cap S_e = S_e \cap S^0 = \emptyset.$$

Aquí

$$S^0 \subset S \subset S^0 + \partial S.$$

El conjunto $\bar{S}$ definido por

(1) $$\bar{S} = S^0 + \partial S = S \cup \partial S$$

es la *cerradura* de S. Se tiene $S^0 = S$ para S abierto y $\bar{S} = S$ para S cerrado.

El lector puede verificar, como ejercicios, las proposiciones siguientes:

$\partial S = \partial S$ ("La frontera de un conjunto siempre es cerrada".)
$\bar{S} = \bar{S}$ ("La cerradura de un conjunto siempre es cerrada".)
$(S^0)^0 = S^0$, $(S_e)^0 = S_e$("Los conjuntos S^0 y S_e son abiertos".)

2(a) $$S^0 \cup T^0 \subset (S \cup T)^0, \quad \overline{S \cup T} \subset \bar{S} \cup \bar{T}$$

2(b) $$\partial(S \cup T) \subset \partial S \cup \partial T$$

La unión de conjuntos abiertos es abierta.
La unión de un número finito de conjuntos cerrados es cerrada.
La intersección de un número finito de conjuntos abiertos es abierta.
La intersección de conjuntos cerrados es cerrada.

Las últimas proposiciones indican un tipo de simetría ("duali-

dad") entre las nociones de "abierto" y "cerrado", "unión" e "intersección". Esto se hace más preciso si se introduce el *complemento* $C(S)$ de un conjunto S, es decir, el conjunto de puntos en el plano π que no pertenecen a S:*

$$C(S) = \{P : P \in \pi,\ P \notin S\} = \pi - S.$$

Se tiene

$$C(S^0) = \bar{S}_e, \qquad \partial C(S) = \partial S, \qquad C(S_e) = \bar{S}^0.$$

Si S es abierto, $C(S)$ es cerrado, y viceversa. El complemento de la intersección de varios conjuntos es la unión de sus complementos.

En esta notación, el teorema de Heine-Borel toma una forma particularmente simple. "Una familia F de conjuntos cubre a un conjunto S", significa simplemente que S está contenido en la unión de los conjuntos de F. Entonces el teorema simplemente dice:

Si F es una familia de conjuntos abiertos en el plano y si S es un conjunto acotado y cerrado tal que

$$S \subset \bigcup_{T \in F} T,$$

entonces se puede hallar un número finito de conjuntos $T_1, T_2, \ldots, T_n \in F$ tales que

$$S \subset \bigcup_{k=1}^{n} T_k.$$

A.4. Funciones homogéneas

Las funciones homogéneas más simples que ocurren en el análisis y sus aplicaciones son las *formas* o polinomios homogéneos en varias variables (ver la p. 38). Se dice que una función de la forma $ax + by$ es una función homogénea de primer grado en x y y, que una función de la forma $ax^2 + bxy + cy^2$ es una función homogénea de segundo grado y, en general, que *un polinomio en x y y (o en un número mayor de variables) es una función homogénea de grado h si, en cada término, la suma de los exponentes de las variables independientes es igual a h,* es decir, si los términos (independientemente de los coeficientes constantes) son de la forma $x^h, x^{h-1}y, x^{h-2}y^2, \ldots, y^h$.

[1] Para conjuntos S de puntos en el espacio tres Σ, el complemento de S de define como $\Sigma - S$, el conjunto de los puntos de Σ que no pertenecen a S.

Estos polinomios homogéneos tienen la propiedad de que se cumple la ecuación

$$f(tx, ty) = t^h f(x, y)$$

para todo valor de t. Más generalmente, se dice que *una función $f(x$ $y, \ldots)$ es homogénea de grado h si satisface la ecuación*

$$f(tx, ty, \ldots) = t^h f(x, y, \ldots).$$

Ejemplos de funciones homogéneas que no son polinomios, son

$$\tan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (h = 0),$$

$$x^2 \operatorname{sen} \frac{x}{y} + y\sqrt{x^2 + y^2} \log \frac{x + y}{x} \qquad (h = 2).$$

Otro ejemplo es el coseno del ángulo entre dos vectores con las componentes respectivas x, y, z y u, v, w:

$$\frac{xu + yv + zw}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \qquad (h = 0).$$

La longitud del vector con componentes x, y, z,

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

es un ejemplo de una función que es *positivamente homogénea* y de primer grado; ésto es, la ecuación que define a las funciones homogéneas no se cumple para esta función a menos que t sea positiva o sea igual a 0.

Las funciones homogéneas que también son diferenciables satisfacen la ecuación diferencial parcial de Euler

$$xf_x + yf_y + zf_z + \cdots = hf(x, y, z, \ldots).$$

Para probar ésto, se derivan ambos miembros de la ecuación $f(tx, ty, \ldots) = t^h f(x,y, \ldots)$ con respecto a t; ésto puede hacerse, dado que la ecuación es una identidad en t. Aplicando la regla de la cadena a la función de la izquierda, se obtiene

$$xf_x(tx, ty, \ldots) + yf_y(tx, ty, \ldots) + \cdots = ht^{h-1}f(x, y, \ldots).$$

Si se hace la sustitución $t = 1$ en ésto, se llega a la conclusión.

Inversamente, es fácil demostrar que la homogeneidad de la fun-

ción $f(x, y, \ldots)$ es una consecuencia de la relación de Euler, de modo que *la relación de Euler es una condición necesaria y suficiente para la homogeneidad de la función.* El hecho de que una función es homogénea de grado h también puede expresarse diciendo que el valor de la función dividida entre x^h sólo depende de las razones y/x, $z/x, \ldots$. Por lo tanto, basta con demostrar que de la relación de Euler se deduce que si se introducen las nuevas variables

$$\xi = x, \qquad \eta = \frac{y}{x}, \qquad \zeta = \frac{z}{x}, \ldots,$$

la función

$$\frac{1}{x^h} f(x, y, z, \ldots) = \frac{1}{\xi^h} f(\xi, \eta\xi, \zeta\xi, \ldots) = g(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$$

ya no depende de la variable ξ (es decir, que la ecuación $g_\xi = 0$ es una identidad). Para probar ésto, se aplica la regla de la cadena

$$\begin{aligned} g_\xi &= (f_x + \eta f_y + \cdots)\frac{1}{\xi^h} - \frac{h}{\xi^{h+1}} f \\ &= (x f_x + y f_y + \cdots)\frac{1}{x^{h+1}} - \frac{h}{x^{h+1}} f. \end{aligned}$$

La expresión de la derecha se anula en virtud de la relación de Euler y queda probada la proposición.

También puede probarse esta proposición en una forma más elegante, pero menos directa. Se desea demostrar que, a partir de la relación de Euler, se deduce que la función

$$g(t) = t^h f(x, y, \ldots) - f(tx, ty, \ldots)$$

tiene el valor 0 para todos los valores de t. Es obvio que $g(1) = 0$. Una vez más,

$$g'(t) = h t^{h-1} f(x, y, \ldots) - x f_x(tx, ty, \ldots) - y f_y(tx, ty, \ldots) - \ldots$$

Aplicando la relación de Auler a los argumentos $tx, ty, \ldots$ se encuentra que

$$x f_x(tx, ty, \ldots) + y f_y(tx, ty, \ldots) + \cdots = \frac{h}{t} f(tx, ty, \ldots),$$

y, por tanto, $g(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$g'(t) = g(t)\frac{h}{t}.$$

Si se escribe $g(t) = \gamma(t)t^h$, se obtiene $g'(t) = \frac{h}{t}\, g(t) + t^h\gamma'(t)$, de modo que $\gamma(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$t^h\gamma'(t) = 0,$$

la cual tiene la solución única γ = constante = c. Ya que para $t = 1$ es obvio que $\gamma(t) = 0$, la constante c es 0 y, así, $g(t) = 0$ para todos los valores de t, lo que tenía que demostrarse.

CAPITULO 2

Vectores, matrices, transformaciones lineales

En el Volumen I, Capítulo 4, ya se han estudiado los vectores en dos dimensiones. Los conceptos geométricos en dimensiones superiores hacen incluso más esencial el uso de los vectores. Los vectores sirven para expresar muchas ecuaciones complicadas concisamente, en una manera que exhibe con claridad aquellas características que no dependen de la selección particular de los sistemas de coordenadas.

2.1 Operaciones con vectores

a. Definición de los vectores

Se introducen los vectores en el espacio n dimensional como entidades que pueden sumarse entre sí y multiplicarse por escalares. Específicamente, un vector A es un conjunto de n números reales[1] $a_1, \ldots, a_n$ en un orden definido.

$$\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$$

(Siempre emplearemos las letras negritas para denotar a los vectores.) Los números $a_1, \ldots, a_n$ se llaman *componentes* de **A**. Dos vectores $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ son iguales si y sólo si tienen las mismas componentes.

[1]Para nuestros propósitos basta con considerar únicamente números reales como componentes, aunque en otros contextos también se usan vectores sobre otros campos numéricos.

La suma de dos vectores cualesquiera $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ se define por

(1a) $$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n);$$

se define el *producto* del vector $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ por el escalar (es decir, el número real) λ como

(1b) $$\lambda\mathbf{A} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$ [1]

Más generalmente, a partir de cualquier número finito de vectores $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathbf{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n), \ldots, \mathbf{D} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ y un número igual de escalares $\lambda, \mu, \ldots, \gamma$ puede formarse la *combinación lineal* $\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B} + \cdots + \gamma\mathbf{D} = (\lambda a_1 + \mu b_1 + \cdots + \gamma d_1, \ldots, \lambda a_n + \mu b_n + \cdots + \gamma d_n)$. En particular, cualquier vector $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ puede representarse como una combinación lineal de los n "vectores coordenados"

(2a) $$\mathbf{E}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \qquad \mathbf{E}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,$$
$$\mathbf{E}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1).$$

Obviamente,

(2b) $$\mathbf{A} = a_1\mathbf{E}_1 + a_2\mathbf{E}_2 + \cdots + a_n\mathbf{E}_n.$$

Se usa el símbolo $\mathbf{0}$ para el "vector cero", cuyas componentes son todas cero: $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Se escribe $-\mathbf{A}$ para el vector $(-1)\mathbf{A} = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$.

Trivialmente, a partir de estas definiciones se concluye que las sumas de vectores y los productos con escalares obedecen todas las leyes algebraicas usuales, siempre y cuando tengan significado.[1] Ejemplos de objetos que se representan de modo conveniente por

[1]Los vectores son diferentes de otros objetos que pueden describirse por medio de conjuntos ordenados de n números reales (por ejemplo, puntos en el espacio euclidiano n dimensional o sobre una esfera en $n + 1$ dimensiones) precisamente por el hecho de que permiten las "operaciones lineales" $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ y $\lambda\mathbf{A}$. La *adición de puntos* definida de modo semejante en términos de sus coordenadas no tendría significado geométrico, al menos ningún significado independiente del sistema coordenado especial que se use. Los vectores se representarán posteriormente por medio de parejas de puntos (ver la p. 140).

medio de vectores se tienen en las funciones que son combinaciones lineales de un número finito de funciones elegidas apropiadamente. Así, el *polinomio* general de grado $\leqq n$ en la variable x,

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

puede representarse por el solo vector $\mathbf{A} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ en el espacio $(n + 1)$ dimensional. La adición de vectores y la multiplicación por escalares corresponden entonces a las mismas operaciones llevadas a cabo para los polinomios. De modo semejante, el *polinomio trigonométrico* general de n-ésimo grado,

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

(ver el Volumen I, p. 577) puede representarse por medio del vector $(a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ en el espacio $(2n + 1)$ dimensional. La *función lineal homogénea* general de tres variables,

$$u = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

se representa por el vector (a_1, a_2, a_3) en el espacio tridimensional, y la *forma cuadrática general* en tres variables,

$$u = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2a_4x_2x_3 + 2a_5x_3x_1 + 2a_6x_1x_2$$

por el vector $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ en el espacio hexadimensional.

b. Representación geométrica de los vectores

Los vectores en el espacio n dimensional, precisamente como en el plano, pueden concebirse geométricamente como ciertas aplicaciones

---

[1]Estas leyes son las siguientes:

(1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
(2) $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$, $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$, $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda(\mu\mathbf{A})$
(3) Existe un elemento único $\mathbf{O}$ tal que $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$ para todo $\mathbf{A}$
(4) Existe un elemento único $-\mathbf{A}$ para $\mathbf{A}$ dado, tal que $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0$
(5) $0\mathbf{A} = \mathbf{O}$, $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$ para todo $\mathbf{A}$.

Generalmente, los conjuntos de objetos para los cuales están definidas la adición de los objetos y la multiplicación por escalares, y obedecen estas leyes, se llaman *espacios vectoriales*.

del espacio, las *traslaciones* o *desplazamientos paralelos*. El vector $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ puede describirse como la traslación del espacio euclidiano n dimensional R^n que aplica cualquier punto $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en el punto $P' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$ con coordenadas

(3a) $$x_1' = x_1 + a_1, x_2' = x_2 + a_2, \ldots, x_n' = x_n + a_n.$$ [1]

La traslación, o el vector correspondiente $\mathbf{A}$, queda determinada de modo único si para un punto particular $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se da la imagen $P' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$ obviamente, por (3a),

(3b) $$\mathbf{A} = (x_1' - x_1, x_2' - x_2, \ldots, x_n' - x_n).$$

Esta traslación se denotará por $\mathbf{A} = \overrightarrow{PP'}$ y se dirá que el vector x queda *representado* por la pareja ordenada de puntos P y P'. En esta representación, a P se le da el nombre de *punto inicial* y a P' el de *punto terminal o final*. En los dibujos comúnmente se indica el vector $\mathbf{A} = \overrightarrow{PP'}$ por medio de una flecha que se extiende desde P hasta P'. El mismo vector $\mathbf{A}$ tiene muchas representaciones $\mathbf{A} = \overrightarrow{PP'}$ por medio de una pareja de puntos P y P'. El punto inicial P es completamente arbitrario, dado que la aplicación definida por $\mathbf{A}$ puede actuar sobre cualquier punto y, entonces, determinar una imagen P'.[1] El vector cero, $\mathbf{0}$, corresponde a la "aplicación identidad" en la que cada punto se aplica sobre sí mismo: $\mathbf{0} = \overrightarrow{PP}$. Como en el plano (Volumen I, p. 384), la suma de dos vectores $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathbf{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ proporciona el *producto simbólico* de las aplicaciones correspondientes. Si $\mathbf{A}$ lleva al punto $P = (x_1, \ldots, x_n)$ hacia el punto $P' = (x_1', \ldots, x_n')$ y $\mathbf{B}$ lleva al punto P' hacia el $P'' = (x_1'', \ldots, x_n'')$, entonces $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ corresponde a la traslación que lleva a P hacia P'', puesto que

$$x_i'' = x_i' + b_i = (x_i + a_i) + b_i = x_i + (a_i + b_i)$$

para $i = 1, \ldots, n$. En notación vectorial, se tiene

[1]Se entiende que los dos puntos P y P' se encuentran en R^n y que sus coordenadas se toman con respecto al mismo sistema coordenado.

*Ocasionalmente, se usa la notación $P' - P$ para el vector $\overrightarrow{PP'}$, la cual, de acuerdo con la fórmula (3b), sugiere la noción de *vectores como diferencias de puntos*.

$$\text{(4)} \qquad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''} = \overrightarrow{PP''}.$$

Si se representa **B** en la forma $\overrightarrow{PP'''}$ dándole el mismo punto inicial P de **A**, se encuentra que $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \overrightarrow{PP''}$ queda representado por la *diagonal del paralelogramo* con vértices P, P', P'', P''' (ver la Fig. 2.1).

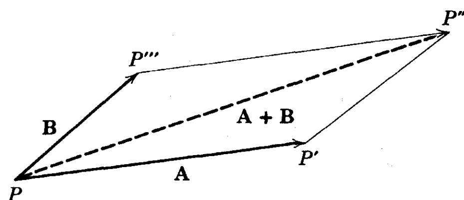


Figura 2.1 Adición de vectores.

Intercambiando el punto inicial y el final del vector $\mathbf{A} = \overrightarrow{PP'} = (x_1' - x_1, x_2' - x_2, \ldots, x_n' - x_n)$ se obtiene el *vector opuesto*

$$\overrightarrow{P'P} = (x_1 - x_1', x_2 - x_2', \ldots, x_n - x_n') = (-1)\,\mathbf{A} = -\mathbf{A}.$$

La aplicación $P' \to P$, correspondiente a $-\mathbf{A}$, es la inversa a la aplicación **A**; llevando a cabo primero **A** y, a continuación, $-\mathbf{A}$ se llega a la aplicación identidad, de acuerdo con la fórmula

$$(-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = (-1 + 1)\,\mathbf{A} = 0\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Correspondiendo a (4), se tiene la tan usada fórmula para la diferencia de dos vectores $\mathbf{A} = \overrightarrow{PP'}$ y $\mathbf{B} = \overrightarrow{PP''}$ con punto inicial común:

$$\text{(4a)} \qquad \mathbf{B} - \mathbf{A} = \overrightarrow{PP''} - \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PP''} + \overrightarrow{P'P} = \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{P'P''}.$$

La diferencia de los vectores $\overrightarrow{PP''}$ y $\overrightarrow{PP'}$ se representa aquí por el tercer lado del triángulo con vértices P, P', P''.

Con cada punto $P = (x_1, \ldots, x_n)$ puede asociarse un vector único que tiene al origen como punto inicial y a P como punto final; éste es el vector

$$\overrightarrow{OP} = (x_1, \ldots, x_n),$$

el llamado *vector de posición* de P. Las componentes del vector de posición de P son precisamente las coordenadas de P. Por ejemplo, el vector coordenado $\mathbf{E}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ de la fórmula (2a) es el vector de posición del punto sobre el eje x, positivo que se

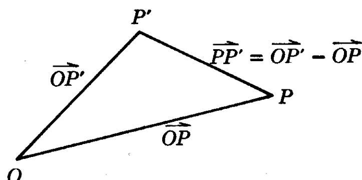


Figura 2.2 El vector $\overrightarrow{PP'}$ como diferencia de los vectores de posición.

encuentra a la distancia 1 del origen. Cualquier vector $\mathbf{A} = \overrightarrow{PP'}$ puede escribirse siempre como la diferencia de los vectores de posición de su punto final y su punto inicial:

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP} \tag{5}$$

(ver la Fig. 2.2).

c. Longitud de los vectores, ángulos entre direcciones

La distancia entre dos puntos $P = (x_1, \ldots, x_n)$ y $P' = (x_1', \ldots, x_n')$ en el espacio euclidiano n dimensional R^n está dada por la fórmula[1]

$$r = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + \cdots + (x_n' - x_n)^2}. \tag{6}$$

Como sólo entran en la expresión para r las diferencias de las coordenadas correspondientes de P, P', se ve que la distancia es la misma para todas las parejas de puntos P, P' que representan al mismo vec-

[1]En dos o tres dimensiones puede deducirse la fórmula geométricamente aplicando el teorema de Pitágoras. En dimensiones superiores la expresión para r puede considerarse como la *definición de distancia* entre dos puntos en el espacio euclidiano n dimensional, cuando se refiere a un sistema coordenado cartesiano.

tor $\mathbf{A} = \overrightarrow{PP'}$. A r se le da el nombre de *longitud del vector* $\mathbf{A}$ y se escribe $r = |\mathbf{A}|$. El vector $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ tiene la longitud

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \tag{6a}$$

El vector $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ tiene longitud 0. La longitud de cualquier otro vector es un número positivo.

En la geometría euclidiana los ángulos pueden expresarse en términos de longitudes. Esto se logra por medio de la fórmula trigonométrica ("ley de los cosenos") que da el ángulo γ entre los lados a y b en un triángulo con lados a, b, c:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \tag{6b}$$

Esta fórmula se aplica a un triángulo con vértices P, P', P''. (Fig. 2.3a). Los lados a y b del triángulo son las longitudes de los vectores $\mathbf{A} = \overrightarrow{PP'}$, $\mathbf{B} = \overrightarrow{PP''}$, mientras que el lado c es la longitud del vector

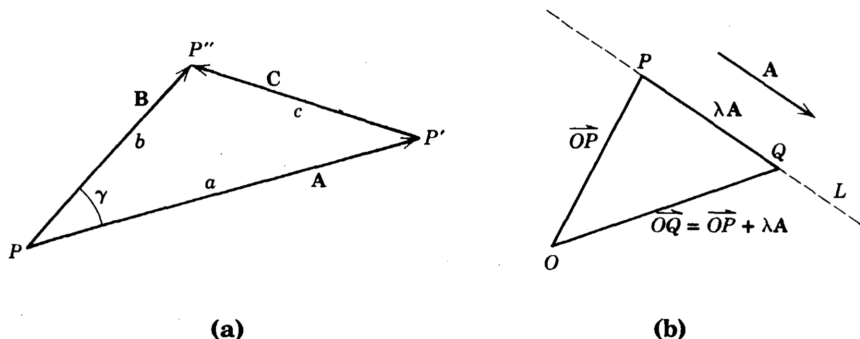


Figura 2.3 Representación vectorial de una recta que pasa por un punto dado con una dirección dada.

$$\mathbf{C} = \overrightarrow{P'P''} = \overrightarrow{PP''} - \overrightarrow{PP'} = \mathbf{B} - \mathbf{A}.$$

Para

$$\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n), \qquad \mathbf{B} = (b_1, \ldots, b_n)$$

se tiene

$$\mathbf{C} = (c_1, \ldots, c_n) = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n).$$

Por (6b),

$$\cos\gamma = \frac{|\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{C}|^2}{2|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|},$$

donde

$$|\mathbf{A}|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \qquad |B|^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \qquad |\mathbf{C}|^2 = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2.$$

Por tanto, para $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$,

$$(7) \qquad \cos\gamma = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\ \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}}.$$

Se ve que el ángulo γ en el triángulo $PP'P''$ sólo depende de los vectores $\mathbf{A} = \overrightarrow{PP'}$ y $\mathbf{B} = \overrightarrow{PP''}$. En consecuencia, a la cantidad $\cos\gamma$, dada por la fórmula (7), se le da el nombre de *coseno del ángulo*[1] *entre los vectores* $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{B} = (b_1, \ldots, b_n)$.

La fórmula (7) para el $\cos\gamma$ en realidad siempre define ángulos *reales* γ entre dos vectores cualesquiera diferentes de cero $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, dado que siempre proporciona un valor con $|\cos\gamma| \leqq 1$. Esta es una consecuencia inmediata de la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* (Volumen I, p. 15)

$$(8) \qquad (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Al calcular los ángulos entre el vector $\mathbf{A}$ y cualquier otro vector $\mathbf{B}$, a partir de (7), sólo se requiere conocer las cantidades

$$(9) \qquad \xi_i = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

[1]El propio ángulo γ queda determinado de manera única sólo si se restringe γ a encontrarse en el intervalo $0 \leqq \gamma \leqq \pi$. Remplazando γ por $2n\pi \pm \gamma$ (donde n es un entero), se obtienen todos los demás ángulos con el mismo valor de $\cos\gamma$, y cualquiera de éstos se considerará como un ángulo entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

que se conocen como *cosenos directores* de **A**. Todos los vectores diferentes de cero con los mismos cosenos directores forman los mismos ángulos con otros vectores y, por tanto, puede decirse que tienen la *misma dirección.* De (7) se concluye que los cosenos directores de **A** pueden interpretarse como los cosenos de ciertos ángulos:

$$\xi_i = \cos \alpha_i, \tag{10}$$

donde α_i es el ángulo entre **A** y el *i*-ésimo "vector coordenado" $\mathbf{E}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Los *n* cosenos directores del vector **A** satisfacen la identidad*

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cdots \cos^2 \alpha_n = 1. \tag{11}$$

El único vector sin cosenos directores (y, por tanto, sin dirección) *es el vector cero.*

Dos vectores **A** y **B** que no sean iguales a **0** tienen la misma dirección si y sólo si tienen los mismos cosenos directores, es decir, si

$$\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A} = \frac{1}{|\mathbf{B}|}\mathbf{B}.$$

Evidentemente, éste es el caso si y sólo si **A** y **B** satisfacen una relación $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{B}$, donde λ es positiva. Aquí $\lambda = |\mathbf{A}|/|\mathbf{B}|$ es la razón de las longitudes de los vectores. Un vector de longitud 1 se llama *vector unitario.* El vector

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}$$

cuyas componentes son los cosenos directores de **A**, es el *vector unitario en la dirección de* **A**.

El vector $-\mathbf{A} = (-a_1, \ldots, -a_n)$ opuesto a **A** tiene los cosenos directores $-\xi_i$. Se dice que su dirección es *opuesta* a la de **A**. Los vectores **A** y **B** (ninguno de los cuales es el vector cero) son *paralelos* si tienen la misma dirección, o bien, si tienen direcciones opuestas, pero para que exista paralelismo es necesario que $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{B}$ donde λ es cualquier número $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$. Las componentes $a_1, \ldots, a_n$ de cualquier

[1]En dos dimensiones la relación $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 = 1$ nos permite elegir para α_2 el valor $\pi/2 - \alpha_1$. En tres o más dimensiones la relación (11) entre los cosenos directores no corresponde a relación lineal simple alguna entre los propios ángulos α_i

vector $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ paralelo a una dirección dada se llaman *números directores* para esa dirección.

Si a un vector unitario $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ se le asigna el origen O como punto inicial, el punto final $P = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ es un punto sobre la "esfera unitaria" (es decir, la esfera de radio 1 y centro en el origen O) $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1$. Dado que existe exactamente un vector unitario en cualquier dirección dada, se ve que las diferentes direcciones en el espacio n dimensional pueden representarse por los puntos de la esfera unitaria. Los puntos de la esfera que corresponden a direcciones opuestas están diametralmente opuestos.

Intuitivamente, puede imaginarse una recta como una curva de "dirección constante". Esto sugiere que una *recta* en el espacio n dimensional se defina como un lugar geométrico de los puntos con la propiedad de que todos los vectores $\neq 0$ con punto inicial y punto final sobre la recta sean paralelos. Esta definición conduce inmediatamente a una *representación vectorial para las rectas.* Para cualesquiera puntos distintos P, Q sobre la recta L, el vector $\overrightarrow{PQ}$ es paralelo a un vector fijo $\mathbf{A}$, es decir,

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda \mathbf{A} \qquad (\lambda \neq 0).$$

Si se mantienen fijos P y $\mathbf{A}$ y se hace que Q recorra todos los puntos de la recta L, para el vector de posición de Q se tiene la fórmula (ver la Fig. 2.3b)

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda \mathbf{A}. \tag{12}$$

Aquí el parámetro λ varía sobre todos los valores reales; el valor $\lambda = 0$ corresponde al punto $Q = P$. Si Q tiene las coordenadas $x_1, \ldots, x_n$; P, las coordenadas $y_1, \ldots, y_n$; y $\mathbf{A}$, las componentes $a_1, \ldots, a_n$, la fórmula (12) corresponde a la *representación paramétrica* de la recta

$$x_i = y_i + \lambda a_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

donde el parámetro λ varía sobre todo λ real. El punto P divide a la recta L en dos semirectas, o "rayos", que se distinguen por el signo de λ. Para $\lambda < 0$. el vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{A}$ ("apun-

ta" en la dirección de A); para $\lambda > 0$, el vector $\overrightarrow{PQ}$ apunta en la dirección opuesta.

D. Productos escalares de vectores

La cantidad que aparece en el numerador de la fórmula (7) para el ángulo λ entre dos vectores $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ se llama *producto escalar* de **A** y **B** y se denota por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n. \tag{13}$$

Expresado en términos de entidades geométricas, puede escribirse como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \cos\gamma. \tag{14}$$

El producto escalar de dos vectores es el producto de sus longitudes multiplicado por el coseno del ángulo entre sus direcciones. Si $\mathbf{A} = \overrightarrow{PP'}$, $\mathbf{B} = \overrightarrow{PP''}$, puede interpretarse $p = |\mathbf{A}| \cos\gamma$ geométricamente como la *proyección* (con signo) del segmento PP' sobre la recta PP'' (ver la Fig. 2.4). p recibe el nombre de *componente del vector* **A** *en la dirección de* **B**. Por la fórmula (14), se tiene

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = p|\mathbf{B}|. \tag{14a}$$

De donde, el producto escalar de los vectores **A, B** es igual a la componente de **A** en la dirección de **B** multiplicada por la longitud de **B**.[1] Si **B** es el vector coordenado $\mathbf{E}_i = (0, \ldots, 1, \ldots 0)$ en la dirección del eje x_i positivo, la componente de **A** en la dirección de **B** es simplemente a_i, la i-ésima componente del vector **A**. A partir de la definición (13), fácilmente se verifica que el producto escalar satisface las leyes algebraicas usuales

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \qquad \text{(ley conmutativa)} \tag{15a}$$

$$\lambda(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\lambda\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\lambda\mathbf{B}) \qquad \text{(ley asociativa)}^2 \tag{15b}$$

---

[1]Por supuesto, también es igual a la componentes de **B** en la dirección de **A**, multiplicada por la longitud de **A**.

[2]Como el producto escalar de dos vectores no es un vector sino un escalar, no existe ley asociativa que involucre productos *escalares* de tres vectores.

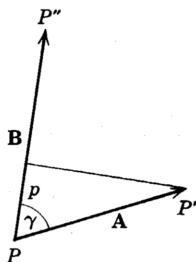


Figura 2.4 Producto escalar de los vectores $\mathbf{A}=\overrightarrow{PP'}$ y $\mathbf{B}=\overrightarrow{PP''}$

(15c) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}, \qquad (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$
(leyes distributivas).

La importancia fundamental del producto escalar proviene del hecho de que, expresado en términos de las componentes de los vectores **A** y **B**, tiene la sencilla expresión *algebraica* (13), mientras que, al mismo tiempo, tiene una interpretación puramente geométrica representada por la fórmula (14), la cual no hace mención de las componentes de los vectores en sistema coordenado específico alguno. Los productos escalares no son útiles únicamente para describir ángulos sino que forman la base para deducir también expresiones analíticas para las áreas y volúmenes.

A partir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz (8) se concluye que el producto escalar satisface la desigualdad

(16) $$|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}|\leqq|\mathbf{A}|\;|\mathbf{B}|,$$

la cual expresa que $\cos\gamma|\leqq 1$. Se verá (p. 231) que la igualdad en (16) sólo se cumple si los vectores **A** y **B** son paralelos o si al menos uno de ellos es el vector cero.

Nótese que, por (6a) y (13), para $\mathbf{B}=\mathbf{A}$ queda

(17a) $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=|\mathbf{A}|^2,$$

Es decir, *el producto escalar de un vector consigo mismo es el cuadrado de su longitud*. Esto también se deduce a partir de (14), ya que el vector **A** forma el ángulo $\gamma=0$ consigo mismo. La importante relación

(17b) $$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

para los vectores **A**, **B** diferentes de cero corresponde a $\cos \gamma = 0$, o bien, $\gamma = \pi/2$. Esta relación caracteriza a los vectores **A**, **B** como "perpendiculares" u "ortogonales" o "normales" entre sí. Por otra parte, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} > 0$ significa $\cos \gamma > 0$; es decir, puede asignarse a γ un valor con $0 \leqq \gamma < \pi/2$; las direcciones de los vectores forman un ángulo *agudo*. De modo semejante, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} < 0$ significa que los vectores forman un ángulo con $\pi/2 < \gamma \leqq \pi$, un ángulo *obtuso*, entre sí.

Por ejemplo, los dos vectores coordenados (ver la p. 156)

$$\mathbf{E}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$$

son mutuamente ortogonales, puesto que

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + \cdots + 0\cdot 0 = 0.$$

Más generalmente, *dos vectores coordenados distintos cualesquiera* $\mathbf{E}_i$ *y* $\mathbf{E}_k$ *son ortogonales:*

(17c) $$\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_k = 0 \qquad (i \neq k).$$

Por supuesto, para $k = i$, se tiene

(17d) $$\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_i = |\mathbf{E}_i|^2 = 1;$$

los vectores coordenados tienen longitud **1**.

e. Ecuación de hiperplanos en forma vectorial

El lugar geométrico de los puntos $P = (x_1, \ldots, x_n)$ en el espacio n dimensional R^n que satisfacen la ecuación lineal de la forma

(18) $$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

(donde no todos los $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se anulan) se llama *hiperplano*. Se antepone el prefijo "hiper" porque el espacio n dimensional contiene "planos", o "variedades lineales", de varias dimensiones; los hiperplanos pueden identificarse con los espacios euclidianos $(n - 1)$ dimensionales, contenidos en el espacio n dimensional R^n. Ellos son los planos bidimensionales ordinarios en el espacio tridimensional, las rectas en el plano, los puntos sobre una recta.

Introduciendo el vector $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y el vector de posición $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n) = \overrightarrow{OP}$ del punto P, puede escribirse la ecuación (18) en notación vectorial como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = c \qquad (\mathbf{A} \neq 0). \tag{18a}$$

Sea $\mathbf{Y} = (y_1, \ldots, y_n) = \overrightarrow{OQ}$ el vector de posición de un punto particular Q del hiperplano, de modo que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} = c$. Restando esta ecuación de (18a), se encuentra que los puntos P del hiperplano satisfacen

$$0 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = \mathbf{A} \cdot \overrightarrow{PQ}. \tag{19}$$

De donde, el vector $\mathbf{A}$ es perpendicular a la recta que une a dos puntos cualesquiera del hiperplano. El hiperplano consiste de aquellos puntos que se obtienen yendo desde cualquiera de sus puntos Q en todas direcciones perpendiculares a $\mathbf{A}$. Se dice que la dirección de $\mathbf{A}$ es la "normal" al hiperplano (ver la Fig. 2.5).

El hiperplano con ecuación (18a) divide al espacio en los dos semiespacios abiertos dados por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} < c$ y $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} > c$. El vector $\mathbf{A}$ *apunta hacia* el semiespacio $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} > c$. Con ésto quiere darse a entender que un rayo que emana de un punto Q del hiperplano en la dirección de $\mathbf{A}$ consiste de los puntos cuyos vectores de posición $\mathbf{X}$

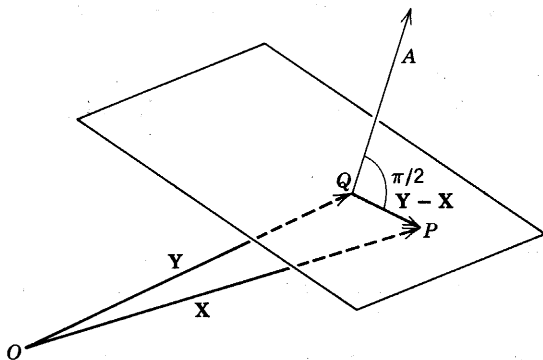


Figura 2.5a Ley de formación del determinante de tercer orden

satisfacen a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} > c$. En efecto, los vectores de posición $\mathbf{X}$ de los puntos P de ese rayo están dados por

$$\mathbf{X} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \lambda\mathbf{A} = \mathbf{Y} + \lambda\mathbf{A}$$

[ver (12)], donde $\mathbf{Y}$ es el vector de posición de Q y λ es un número positivo. Entonces es obvio que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{A} \cdot \lambda\mathbf{A} = c + \lambda|\mathbf{A}|^2 > c.$$

Más generalmente, cualquier vector $\mathbf{B}$ que forma un ángulo agudo con $\mathbf{A}$, apunta hacia el semiespacio $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} > c$, dado que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} > 0$ implica que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{Y} + \lambda\mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} + \lambda\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} > c.$$

Si la constante c es positiva, el semiespacio $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} < c$ será el que contiene al origen, ya que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{O} = 0 < c$. Entonces $\mathbf{A}$ tiene la dirección normal "alejándose del origen".

La ecuación lineal (18a) que describe a un hiperplano dado no es única, porque se puede multiplicar la ecuación por un factor constante arbitrario $\lambda \neq 0$, lo que equivale a remplazar el vector $\mathbf{A}$ por el vector paralelo $\lambda\mathbf{A}$ y la constante c por λc. Si $c \neq 0$— es decir, si el hiperplano no pasa por el origen—puede elegirse.

$$\lambda = \frac{\operatorname{sgn} c}{|\mathbf{A}|}.$$

Multiplicando (18a) por λ, se obtiene la *forma normal* de la *ecuación del hiperplano*

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{X} = p \tag{20}$$

Aquí p es una constante positiva y $\mathbf{B}$ es el vector normal unitario que apunta hacia afuera del origen. La constante p en la ecuación (20) es simplemente la *distancia al hiperplano desde el origen 0*, es decir, la distancia más corta del origen 0 a cualquier punto del hiperplano. Porque, sea P cualquier punto del hiperplano y $\mathbf{X}$ el vector de posición de P; entonces la distancia del origen 0 a P está dada por

$$|\overrightarrow{OP}| = |\mathbf{X}| = |\mathbf{X}|\ |\mathbf{B}|.$$

De (16), (20) se concluye que

$$|\overrightarrow{OP}| \geqq \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} = p.$$

La igualdad se cumple para el punto especial P del hiperplano con vector de posición

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{X} = p\mathbf{B}.$$

La recta que une a este punto con el origen tiene la dirección de la normal al hiperplano. Más generalmente, puede hallarse la distancia d del hiperplano a cualquier punto Q en el espacio con vector de posición $\mathbf{Y}$. Como el lector puede verificar por sí mismo,

(20a) $$d = |\mathbf{B} \cdot \mathbf{Y} - p|.$$

f. Dependencia lineal de vectores y sistemas de ecuaciones lineales

Muchos problemas en el análisis matemático pueden reducirse al estudio de las relaciones lineales entre un cierto número de vectores en el espacio n dimensional. Se dice que un vector $\mathbf{Y}$ es *dependiente*[1] *de los vectores* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$, si $\mathbf{Y}$ puede representarse como una "combinación lineal" de $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$, ésto es, si existen los escalares $x_1, \ldots, x_m$ tales que

(21) $$\mathbf{Y} = x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_m\mathbf{A}_m.$$

Aquí m es cualquier número natural. El vector cero siempre es dependiente, ya que puede representarse en la forma (21) eligiendo para todos los escalares x_i el valor 0. La dependencia de $\mathbf{Y}$ de un solo vector $\mathbf{A}_1 \neq 0$ significa que $\mathbf{Y} = 0$, o bien, que $\mathbf{Y}$ es paralelo a $\mathbf{A}_1$. Eligiendo como $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ a los n vectores coordenados

(22) $$\mathbf{E}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \qquad \mathbf{E}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots,$$
$$\mathbf{E}_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

[1] En la literatura, lo que aquí llamamos "dependiente" a menudo recibe el nombre de "linealmente dependiente". Como no se considera ningún otro tipo de dependencia, eliminamos la palabra "lineal".

se ve que la relación (21) se cumple para cualquier vector $\mathbf{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$, si se elige $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$:

(23) $$Y = y_1\mathbf{E}_1 + y_2\mathbf{E}_2 + \cdots + y_n\mathbf{E}_n.$$

Por tanto, todo vector en el espacio depende de los vectores coordenados. Por otra parte, ninguno de los n vectores coordenados $\mathbf{E}_i$ depende de cualquiera de los otros, como fácilmente se ve. Más generalmente, un vector $\mathbf{Y} \neq \mathbf{0}$ no puede ser dependiente de los vectores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ *si* $\mathbf{Y}$ *es ortogonal a cada uno de los vectores* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$. porque, multiplicando la relación (21) escalarmente por sí misma, da

$$\begin{aligned}|\mathbf{Y}|^2 = \mathbf{Y}\cdot\mathbf{Y} &= \mathbf{Y}\cdot(x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_m\mathbf{A}_m)\\ &= x_1\mathbf{Y}\cdot\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{Y}\cdot\mathbf{A}_2 + \cdots + x_m\mathbf{Y}\cdot\mathbf{A}_m = 0,\end{aligned}$$

y, por tanto, $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$.

Se dice que los vectores $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ son *dependientes* si existen los escalares $x_1, x_2, \ldots, x_m$, *no todos nulos,* tales que

(24) $$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_m\mathbf{A}_m = 0.$$

Si $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ no son dependientes —es decir, si (24) sólo se cumple para $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$— se dice que $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ son *independientes.* Por ejemplo, los vectores coordenados $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n$ son independientes, ya que

$$\mathbf{0} = x_1\mathbf{E}_1 + x_2\mathbf{E}_2 + \cdots + x_n\mathbf{E}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

obviamente implica que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Las dos nociones de "dependencia de un vector respecto a un conjunto de vectores" y "dependencia de un conjunto de vectores" están íntimamente relacionados. *Un cierto número de vectores son dependientes si y sólo si puede hallarse uno de ellos que sea dependiente de los otros.* Porque, obviamente, la relación (21) que expresa que $\mathbf{Y}$ es dependiente de $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ puede escribirse en la forma

$$x_1\mathbf{A}_1 + \cdots + x_m\mathbf{A}_m + (-1)\mathbf{Y} = \mathbf{0},$$

lo cual muestra que los $m + 1$ vectores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m, \mathbf{Y}$ son dependientes. Inversamente, si $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ son dependientes, se

tiene una relación de la forma (24), donde no todos los coeficientes x_i se anulan. Si, digamos, x_k no se anula, puede resolverse la ecuación (24) para $\mathbf{A}_k$, expresando $\mathbf{A}_k$ como una combinación lineal de los otros vectores.

La dependencia del vector $\mathbf{Y}$ respecto a los otros vectores $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ significa que un cierto sistema de ecuaciones lineales tiene soluciones $x_1, \ldots, x_m$. Porque sea $\mathbf{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$, y el vector $\mathbf{A}_k$ dado por

$$\mathbf{A}_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}).$$

Entonces la ecuación vectorial (21), escrita en términos de las componentes, es equivalente al sistema de n ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= y_n \end{aligned} \tag{25}$$

para las cantidades desconocidas $x_1, \ldots, x_m$. Obviamente, $\mathbf{Y}$ depende de $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ si y sólo si el sistema (25) posee por lo menos una solución $x_1, \ldots, x_m$. De modo semejante, los vectores $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ son dependientes si y sólo si el sistema "homogéneo" de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= 0. \end{aligned} \tag{25a}$$

tiene una solución "no trivial" $x_1, \ldots, x_m$, es decir, tiene una solución diferente de la solución trivial[1]

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0.$$

Hemos encontrado ya un conjunto de n vectores en el espacio n dimensional que son independientes, a saber, los vectores coorde-

[1] La ecuaciones del tipo $P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$ donde P es un polinomio homogéneo (ver la p. 38) reciben el nombre de *homogéneas*. Siempre tienen la solución trivial $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$. Es más, cualquier solución $x_1, \ldots, x_m$ sigue siendo una solución si se multiplican todos los x_i por el mismo factor λ.

nados $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n$. Básico para la teoría de los vectores es el hecho de que n es el número máximo de vectores independientes:

Teorema fundamental de la dependencia lineal. *Cualesquiera $n + 1$ vectores en el espacio n dimensional son dependientes.*

Antes de probar este teorema, considérense algunas de sus implicaciones de mucho alcance. Inmediatamente puede concluirse que cualquier conjunto de más de n vectores en el espacio n dimensional es dependiente. Porque cualquier dependencia (24) entre los primeros $n + 1$ de m vectores puede considerarse una dependencia de todos los m vectores, si a los vectores restantes se les asigna el coeficiente 0. Entonces el teorema fundamental implica: *El sistema de ecuaciones lineales homogéneas* (25a) *siempre tiene una solución no trivial si $m > n$, es decir, si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones.*

La última proposición puede plantearse geométricamente en una forma diferente, si se interpreta cada una de las ecuaciones (25a) como si enunciara que cierto producto escalar de dos vectores en el espacio n dimensional se anula. Entonces, una solución no trivial $x_1, \ldots, x_m$ corresponde a un vector $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_m) \neq \mathbf{0}$. La anulación del producto escalar de dos vectores que no se anulan significa que los vectores son mutuamente perpendiculares. Las ecuaciones (25a) afirman que $\mathbf{X}$ es perpendicular a los n vectores $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m}), (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2m}), \ldots, (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nm})$. Entonces se tiene: *Dado un conjunto de vectores que no se anulan, cuyo número es menor que la dimensión del espacio, puede hallarse un vector que sea perpendicular a todos ellos* (y por tanto, por lo establecido en la p. 171 es independiente de ellos).

Regresando a los vectores en el espacio n dimensional, se observa una consecuencia más del teorema fundamental: *Todo vector $\mathbf{Y}$ en el espacio n dimensional depende de n vectores dados $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, siempre que $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ sean independientes.* Puesto que como los $n + 1$ vectores $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, $\mathbf{Y}$ deben ser dependientes, se tiene una relación de la forma

$$z_1\mathbf{A}_1 + z_2\mathbf{A}_2 + \cdots + z_n\mathbf{A}_n + z_{n+1}\mathbf{Y} = 0,$$

donde no todas las cantidades $z_1, \ldots, z_{n+1}$ se anulan. Entonces $z_{n+1} \neq 0$, ya que de lo contrario $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ serían dependientes, lo que sería opuesto a la hipótesis. Se concluye que

(26) $$\mathbf{Y} = x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n$$

donde

$$x_i = -\frac{z_i}{z_{n+1}} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Incidentalmente, los coeficientes x_k en la representación (26) de $\mathbf{Y}$ como una combinación lineal de los vectores independientes $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ están determinados de manera única, porque si hubiera una segunda representación

$$\mathbf{Y} = y_1\mathbf{A}_1 + y_2\mathbf{A}_2 + \cdots + y_n\mathbf{A}_n$$

restando se concluiría que

$$(x_1 - y_1)\mathbf{A}_1 + (x_2 - y_2)\mathbf{A}_2 + \cdots + (x_n - y_n)\mathbf{A}_n = 0.$$

Aquí, para los vectores independientes $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ se concluye que todos los coeficientes se anulan y, por tanto, que $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$.

Por otra parte, si $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ son dependientes, evidentemente puede encontrarse un vector $\mathbf{Y}$ que no dependa de $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, porque, en ese caso, uno de los vectores $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ depende de los otros, digamos $\mathbf{A}_n$ de $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$; entonces, un vector $\mathbf{Y}$ dependiente de $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ también es dependiente de $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$. No obstante, existen vectores $\mathbf{Y}$ en el espacio n dimensional que no dependen de $n - 1$ vectores dados (ver la p. 173).

Como la independencia de $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ es equivalente al hecho de que el sistema correspondiente de ecuaciones lineales homogéneas (25a) tiene sólo la solución trivial, se ha deducido el siguiente teorema básico acerca de la resolubilidad de sistemas de ecuaciones lineales, a partir del teorema fundamental:

El sistema de n ecuaciones lineales

(27)
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned}$$

tiene una solución única $x_1, \ldots, x_n$ para cualesquiera números

dados $y_1, \ldots, y_n$ *siempre que las ecuaciones homogéneas*

$$\text{(27a)}\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

sólo tengan la solución trivial $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. *Si el sistema* (27*a*) *tiene una solución no trivial, pueden hallarse los valores* $y_1, \ldots, y_n$ *para los cuales el sistema* (27) *no tiene solución.*

Aquí se tiene un teorema puramente de existencia, que no da indicación sobre cómo se puede obtener realmente la solución $x_1, x_2 \ldots, x_n$, si existe. Esto puede lograrse por medio de determinantes, como se discute en la Sección 2.3, a continuación.

Procederemos a realizar la demostración del teorema fundamental, aplicando la inducción sobre la dimensión n. El teorema afirma que cualesquiera $n + 1$ vectores $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, $\mathbf{Y}$ en el espacio n dimensional son dependientes. Para $n = 1$, los vectores se vuelven escalares y la proposición que debe probarse es la siguiente: Para dos *números* cualesquiera $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{A}$ pueden hallarse los números x_0, x_1, los cuales no se anulan simultáneamente, tales que

$$x_0\mathbf{Y} + x_1\mathbf{A} = 0.$$

Esto es trivial. Si $\mathbf{Y} = \mathbf{A} = 0$, tómese $x_0 = x_1 = 1$; en todos los demás casos, tómese $x_0 = \mathbf{A}$, $x_1 = -\mathbf{Y}$.

Supóngase que se ha probado que n vectores cualesquiera en el espacio $(n - 1)$ dimensional son dependientes. Sean $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, $\mathbf{Y}$ vectores en el espacio n dimensional. Se desea probar que $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, $\mathbf{Y}$ son dependientes. Esto es evidentemente el caso si $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, solos ya son dependientes. Por tanto, nos restringiremos al caso en el que $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ son independientes; se probará que entonces $\mathbf{Y}$ es dependiente de $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$. Basta con probar que cada uno de los vectores coordenados $\mathbf{E}_1, \ldots \mathbf{E}_n$, que se tienen en (22), depende de $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, porque, por (23), cualquier vector $\mathbf{Y}$ es una combinación lineal de los $\mathbf{E}_i$ y, por tanto, también de los $\mathbf{A}_k$, si los $\mathbf{E}_i$ pueden expresarse en términos de los $\mathbf{A}_k$. Sólo se probará que $\mathbf{E}_n$ depende de $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, ya que la demostración para los otros $\mathbf{E}_i$ es semejante. Basta con demostrar que el sistema de ecuaciones

$$(28)\qquad \begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &= 0 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= 1 \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

tiene una solución $x_1, \ldots, x_n$. Ahora bien, las primeras $n-1$ ecuaciones, las cuales son homogéneas, tienen una solución no trivial $x_1, \ldots, x_n$, como consecuencia de la hipótesis de inducción de que n vectores en el espacio $(n-1)$ dimensional son dependientes. Para esa solución, sea

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c.$$

Aquí $c \neq 0$, ya que de lo contrario los vectores $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ serían dependientes. Dividiendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre c, entonces se obtiene la solución deseada del sistema (28). Esto completa la demostración del teorema fundamental.

Ejercicios 2.1

1. Dar la representación coordenada de la recta que pasa por el punto $P = (-2, 0, 4)$ y en la dirección del vector $\mathbf{A} = (2, 1, 3)$.
2. (a) ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P = (3, -2, 2)$ y $Q = (6, -5, 4)$?
   (b) Dar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos distintos cualesquiera P y Q.
3. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos vectores con punto inicial O y puntos finales P y Q, entonces el vector con O como punto inicial y el punto que divide a PQ en la razón $\lambda: (1-\lambda)$ como punto final, está dado por

$$(1-\lambda)\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}.$$

4. En el Ejercicio 3, ¿para qué valores de λ el vector de posición corresponde a un punto sobre del rayo en la dirección de Q desde P?
5. El centro de masa de los vértices de un tetraedro $PQRS$ puede definirse como el punto que divide a MS en la razón 1.3, donde M es el centro de masa de los vértices PQR. Demostrar que esta definición es independiente del orden en el que se toman los vértices y que concuerda con la definición general del centro de masa (Volumen I, p. 373).
6. Se dice que dos aristas de un tetraedro son opuestas si no tienen vértice en común. Por ejemplo, las aristas PQ y RS del tetraedro del Ejercicio 5 son opuestas. Demostrar que el segmento que une los puntos medios de aristas opuestas de un tetraedro pasa por el centro de masa de los vértices.
7. Sean $A_1, \ldots, A_n$ n partículas arbitrarias en el espacio, con masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, respectivamente. Se G su centro de masa y denotemos

por $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ los vectores con punto inicial G y puntos finales $A_1, \ldots, A_n$. Probar que

$$m_1\mathbf{A}_1 + m_2\mathbf{A}_2 + \cdots + m_n\mathbf{A}_n = 0.$$

8. Los números reales forman un espacio vectorial unidimensional, donde la adición de "vectores" es la adición ordinaria y la multiplicación por escalares es la multiplicación ordinaria. Demostrar que los números reales positivos también forman un espacio vectorial donde la adición de vectores es la multiplicación ordinaria y la multiplicación escalar se define apropiadamente.

9. Verificar que los números complejos forman un espacio vectorial bidimensional donde la adición es la adición ordinaria y los escalares son números reales.

10. Sean P y Q puntos diametralmente opuestos y R cualquier otro punto sobre una esfera. Demostrar que PR se intersecta con QR a ángulos rectos.

11. (a) Obtener la forma normal del plano que pasa por el punto $P = (-3, 2, 1)$ y es perpendicular al vector $\mathbf{A} = (1, 2, -2)$.
(b) ¿Cuál es la distancia del plano al punto $Q = (1, -1, -1)$?
(c) ¿Se encuentran O y Q en el mismo lado o en lados opuestos del plano?

12. (a) Sea la ecuación de un hiperplano dada en la forma (18). Determinar las coordenadas del pie de la perpendicular que baja desde un punto P al hiperplano.
(b) En el Ejercicio 11, dar los pies de las perpendiculares que bajan desde O y Q al plano.

13. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ vectores no paralelos. Demostrar que

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}\mathbf{B}$$

es perpendicualr a $\mathbf{B}$. El vector $\mathbf{C}$ se llama componente de $\mathbf{A}$ perpendicular a $\mathbf{B}$.

14. Encontrar el ángulo ϕ entre el plano

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

y la recta

$$x = x_0 + \alpha t, \; y = y_0 + \beta t, \qquad z = z_0 + \gamma t.$$

2.2 Matrices y transformaciones lineales

a. Cambio de base. Espacios lineales

Todo vector **Y** en el espacio n dimensional R^n puede escribirse como una combinación lineal de los vectores coordenados $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n$ definida por (22); a saber,

$$\mathbf{Y} = y_1\mathbf{E}_1 + \cdots + y_n\mathbf{E}_n, \tag{29}$$

donde los y_i son las componentes de **Y**. Puede generalizarse la noción de vector coordenado y de componentes, considerando m vectores independientes cualesquiera $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ en R^n Si **Y** es un vector dependiente de los $\mathbf{A}_i$, se tiene

$$\mathbf{Y} = x_1\mathbf{A}_1 + \cdots + x_m\mathbf{A}_m \tag{30}$$

donde los coeficientes x_i quedan determinados de modo único por medio de **Y**. A $x_1, \ldots, x_m$ se les da el nombre de *componentes de* **Y** *con respecto a la base* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$. Con respecto a esta base, el vector base $\mathbf{A}_1$ tiene las componentes 1, 0, . . ., 0; el vector base $\mathbf{A}_2$, las componentes 0, 1, . . ., 0; y así sucesivamente. Para cualquier escalar λ, el vector

$$\lambda\mathbf{Y} = \lambda x_1\mathbf{A}_1 + \cdots + \lambda x_m\mathbf{A}_m$$

también es dependiente de los $\mathbf{A}_i$ y tiene las componentes $\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m$. De modo semejante, si

$$\mathbf{Y}' = x_1'\mathbf{A}_1 + \cdots + x_m'\mathbf{A}_m$$

es un segundo vector que depende de los $\mathbf{A}_i$, la suma

$$\mathbf{Y} + \mathbf{Y}' = (x_1 + x'_1)\mathbf{A}_1 + \cdots + (x_m + x_m')\mathbf{A}_m$$

tiene las componentes $x_1 + x_1', \ldots, x_m + x_m'$ con respecto a la base considerada.

Para $m < n$ no todos los vectores **Y** en el espacio n dimensional son dependientes de $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$. Se dice que los vectores dependientes de m vectores independientes forman un *espacio vectorial m dimensional.* Puede imaginarse un espacio así, eligiendo un punto

arbitrario P_0 con vector de posición $\mathbf{B} = \overrightarrow{OP_0}$ como punto inicial para todos los vectores $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$. Sea

$$\mathbf{A}_i = \overrightarrow{P_0P_i} \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{31a}$$

y sea $\mathbf{Y} = \overrightarrow{P_0P}$ el vector dado por (30). Entonces el punto P tiene el vector de posición

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{B} + x_1\mathbf{A}_1 + \cdots + x_m\mathbf{A}_m. \tag{31b}$$

Se dice que los puntos P en la relación (31b) forman la *variedad lineal m dimensional S_m que pasa por P_0 generada por los vectores* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ Cada punto P en S_m determina de manera única los valores $x_1, \ldots, x_m$, los cuales se llaman *coordenadas afines* para P. En este sistema de coordenadas afines para S_m el "origen" —es decir, el punto con $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$— es el punto P_0; el punto con coordenada afines $x_1 = 1, x_2 = \cdots = x_m = 0$ es P_1, el punto extremo del vector $\mathbf{A}_1 = \overrightarrow{P_0P_1}$, y así sucesivamente. Para dos puntos P y P' de S_m con vectores de posición

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{B} + x_1\mathbf{A}_1 + \cdots + x_m\mathbf{A}_m, \qquad \overrightarrow{OP'} = \mathbf{B} + x_1'\mathbf{A}_1 + \cdots + x_m'\mathbf{A}_m,$$

el vector

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP} = (x_1' - x_1)\mathbf{A}_1 + \cdots + (x_m' - x_m)\mathbf{A}_m$$

tiene como componentes con respecto a la base $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ las diferencias de las coordenadas afines de los puntos P y P'.

De acuerdo con la definición dada, una variedad lineal unidimensional S_1 que pasa por el punto P_0 es el lugar geométrico de los puntos P con vectores de posición de la forma

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{B} + x_1\mathbf{A}_1$$

donde $\mathbf{B}$ y $\mathbf{A}_1$ son vectores fijos ($\mathbf{A}_1 \neq 0$) y x_1 varía sobre todos los números relaes. Por supuesto, S_1 es simplemente la recta que pasa por P_0 paralela a la dirección del vector $\mathbf{A}_1$ (ver la p. 163). Una

variedad lineal bidimensional, o *plano* bidimensional, S_2 consiste de los puntos P con vectores de posición

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{B} + x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2$$

donde $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ son vectores fijos ($\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ independientes) y x_1 y x_2 varían sobre todos los números reales. Los espacios lineales n dimensionales S_n son idénticos al espacio completo R^n; porque cualquier vector $\mathbf{Y}$ es dependiente de n vectores linealmente independientes $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ (ver la p. 167) y, por consiguiente, el vector de posición de cualquier punto P es representable en la forma

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{B} + x_1\mathbf{A}_1 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n.$$

Puede verse que las variedades lineales $(n-1)$ dimensionales son idénticas a los hiperplanos definidos en la p. 167: porque dados $n-1$ vectores cualesquiera $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$ en el espacio n dimensional, puede hallarse un vector $\mathbf{A}$ perpendicular a todos ellos (ver la p. 173). Entonces, para

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{B} + x_1\mathbf{A}_1 + \cdots + x_{n-1}\mathbf{A}_{n-1}$$

se tiene la relación

$$\mathbf{A} \cdot \overrightarrow{OP} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + x_1 \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A} + \cdots + x_{n-1}\mathbf{A}_{n-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$
$$= \text{constante},$$

lo cual es precisamente una ecuación lineal para las coordenadas de P.

En general, la determinación de las componentes x_i de un vector $\mathbf{Y}$ con respecto a una base $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ requiere la solución de un sistema de ecuaciones lineales del tipo (25). En un importante caso especial, los x_i pueden hallarse directamente, a saber, cuando los vectores base forman un sistema *ortonormal*. Se dice que los vectores $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ son ortonormales si cada uno de ellos tiene longitud 1 y dos cualesquiera de ellos son ortogonales entre sí, es decir, si

(32) $$\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_k = \begin{cases} 1 \text{ para } i = k \\ 0 \text{ para } i \neq k. \end{cases}$$

Si un vector $\mathbf{Y}$ es de la forma

$$\mathbf{Y} = x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_m\mathbf{A}_m,$$

se encuentra, usando las *relaciones de ortogonalidad* (32), que

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}_i = x_1\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_i + x_2\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_i + \cdots + x_m\mathbf{A}_m \cdot \mathbf{A}_i = x_i \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{33}$$

En particular, $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ implica $x_i = 0$ para $i = 1, \ldots, m$; por tanto, *los vectores ortonormales siempre son independientes*. La fórmula (33) muestra que la componente x_i del vector $\mathbf{Y}$ con respecto a una base ortonormal $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ es igual a la *componente* $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}_i$ del vector $\mathbf{Y}$ *en la dirección de* $\mathbf{A}_i$. Los vectores coordenados $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n$ definidos por las ecuaciones (22) forman precisamente una base ortonormal así, y las componentes del vector $\mathbf{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$ con respecto a esta base son las cantidades $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{E}_i = y_i$.

Una base ortonormal también se distingue por el hecho de que la longitud de un vector y el producto escalar de dos vectores está dada por las mismas fórmulas que las de la base original $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n$. Dados dos vectores cualesquiera $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{Y}'$ de la forma

$$\mathbf{Y} = x_1\mathbf{A}_1 + \cdots + x_m\mathbf{A}_m, \qquad \mathbf{Y}' = x_1'\mathbf{A}_1 + \cdots + x_m'\mathbf{A}_m \tag{34a}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}' &= (x_1\mathbf{A}_1 + \cdots + x_m\mathbf{A}_m) \cdot (x_1'\mathbf{A}_1 + \cdots + x_m'\mathbf{A}_m) \\ &= x_1\mathbf{A}_1 \cdot (x_1'\mathbf{A}_1 + \cdots + x_m'\mathbf{A}_m) + \cdots \\ &\quad + x_m\mathbf{A}_m \cdot (x_1'\mathbf{A}_1 + \cdots + x_m'\mathbf{A}_m) \\ &= x_1x_1' + x_2x_2' + \cdots + x_mx_m'.^{1} \end{aligned} \tag{34b}$$

En el caso particular $\mathbf{Y}' = \mathbf{Y}$ se encuentra, para la longitud del vector $\mathbf{Y}$, la fórmula

$$|\mathbf{Y}| = \sqrt{\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2}. \tag{34c}$$

---

[1]Sin las relaciones de ortogonalidad sólo podría concluirse que $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}'$ está dado por la expresión más complicada

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}' = \sum_{i,k} c_{ik}x_ix_k \qquad \text{donde} \qquad c_{ik} = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_k.$$

Si la variedad lineal m dimensional S_m que pasa por el punto P_0 es generada por los m vectores ortonormales $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$, el sistema correspondiente de coordenadas afines se llama *sistema coordenado cartesiano* para el espacio S_m. Los vectores coordenados $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ son mutuamente perpendiculares y de longitud 1. La distancia d entre dos puntos cualesquiera con coordenadas cartesianas $(x_1, \ldots, x_m)$ y $(x_1', \ldots, x_m')$ está dada por la fórmula

$$d = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + \cdots + (x_m' - x_m)^2}$$

Más generalmente, cualquier relación geométrica basada en la noción de distancia (tales como ángulo, área, volumen) tienen la misma expresión analítica en cualquier sistema coordenado cartesiano.

b. Matrices

La relación

$$\mathbf{Y} = x_1\mathbf{A}_1 + \cdots + x_m\mathbf{A}_m \tag{35a}$$

entre los vectores $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$, $\mathbf{Y}$ en el espacio n dimensional puede escribirse como un sistema de ecuaciones lineales [ver (25), p. 172]

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= y_n \end{aligned} \tag{35b}$$

que relacionan las componentes $y_1, \ldots, y_n$ del vector $\mathbf{Y}$ en el sistema coordenado original con las componentes $x_1, \ldots, x_m$ de $\mathbf{Y}$ con respecto a los vectores base $\mathbf{A}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$ para $i = 1, \ldots, m$. Las relaciones lineales (35b) entre las cantidades x_i y y_j quedan completamente descritas por medio del sistema de $n \times m$ coeficientes a_{ji}. El sistema de coeficientes colocados en un arreglo rectangular

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \tag{36}$$

como aparecen en (35b), se llama *matriz*. (Normalmente, las matrices se denotarán por medio de letras minúsculas negritas.)

La matriz **a** dada en (36) tiene mn "elementos"

$$a_{ji}; \quad j = 1, \ldots, n; \quad i = 1, \ldots, m.$$

Estos elementos se arreglan en m 'columnas"

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

o bien, en n "filas"

$$\begin{array}{l} (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1m}), \\ (a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2m}), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (a_{n1} \quad a_{n2} \quad \cdots \quad a_{nm}). \end{array}$$

Dos matrices se consideran iguales sólo si concuerdan en el número de filas y columnas y si los elementos correspondientes son los mismos.

Las columnas de la matriz **a** pueden identificarse, respectivamente, con el conjunto de componentes de los vectores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$. Con frecuencia la matriz **a**, cuyas columnas se forman a partir de las componentes de los vectores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$, se escribirá como

(37) $$\mathbf{a} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m).$$

El sistema de ecuaciones (35b) que expresa las n cantidades $y_1, \ldots, y_n$ como funciones lineales de las m cantidades $x_1, \ldots, x_m$ puede resumirse en la sencilla ecuación simbólica

(38) $$\mathbf{aX} = \mathbf{Y},$$

donde **X** representa al vector $(x_1, \ldots, x_m)$ y **Y** al vector $(y_1, \ldots, y_n)$. Si los vectores columna $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ de la matriz **a** son independientes, (38) puede interpretarse como la descripción de un *cambio de base*, o un cambio del sistema coordenado, para los vectores.

La ecuación relaciona las componentes $x_1, \ldots, x_m$ del vector con respecto a la base $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ en el subespacio S_m, con las componentes $y_1, \ldots, y_n$ del mismo vector con respecto a la base $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n$ para el espacio completo S_n. Esto podría llamarse la interpretación "pasiva" de (38), en el cual los objetos geométricos —los vectores— permanecen fijos y sólo se cambia el sistema de referencia.

Existe otra interpretación, "activa", en la cual se cambian los vectores en lugar del sistema coordenado. Entonces las ecuaciones (36) describen una *aplicación* de los vectores $(x_1, \ldots, x_m)$ en un espacio m dimensional sobre los vectores $(y_1, \ldots, y_n)$ en un espacio n dimensional. Una aplicación dada por la ecuación (38) o, con más detalle, por el sistema equivalente de ecuaciones (35b), recibe el nombre de *lineal* o *afín.*[1]

Por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$$\text{(38a)} \qquad y_1 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2, \qquad y_2 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2,$$
$$y_3 = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2$$

correspondiente a la matriz

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

[1]En una aplicación afín de vectores, las componentes y_j del vector imagen $\mathbf{Y}$ son funciones lineales *homogéneas* de las componentes x_i del vector original $\mathbf{X}$, como en las fórmulas (35b). Si se identifican $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ como *vectores de posición* de puntos, las fórmulas (35b) definen una aplicación de los puntos $(x_1, \ldots, x_m)$ en el espacio R^m sobre los puntos $(y_1, \ldots, y_n)$ en el espacio R^n. Las aplicaciones de puntos obtenidas en esta forma son las aplicaciones afines especiales que llevan el origen de R^m hacia el origen de R^n. La aplicación afín más general de puntos está dada por las ecuaciones lineales *no homogéneas*

$$(*) \qquad y_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ji}x_i + b_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

(Puede obtenerse a partir de una aplicación especial, llevando el origen hacia el origen por medio de una traslación con componentes b_j). Aplicando la transfor-

puede interpretarse como una aplicación de los vectores $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$ en el plano sobre los vectores $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ en el espacio tridimensional. Aquí los vectores imagen todos satisfarán la relación

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0 \tag{38b}$$

y, por tanto, son ortogonales al vector $\mathbf{N} = (1, 1, 1)$. Identificando los vectores $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ con vectores de posición de puntos, en (38a) se tiene una aplicación del plano $x_1\, x_2$ sobre el plano π en el espacio $y_1\, y_2\, y_3$ con la ecuación (38b). Geométricamente, el punto (y_1, y_2, y_3) se obtiene proyectando el punto $(x_1, x_2, 0)$ perpendicularmente sobre el plano π.[1] Alternativamente, la ecuación (38a) puede interpretarse pasivamente como una representación paramétrica para el plano π, con x_1 y x_2 jugando el papel de parámetros.

Matrices diferentes dan lugar a aplicaciones lineales diferentes porque, por (35b), los vectores coordenados

$$\mathbf{E}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \qquad \mathbf{E}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots$$

se aplican sobre los vectores

$$\mathbf{A}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}), \qquad \mathbf{A}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}), \ldots$$

De donde, los vectores columna $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ de la matriz **a** son precisamente las imágenes de los vectores coordenados $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$. De aquí que la matriz **a** queda determinada de manera única por la aplicación.

De importancia particular son las aplicaciones lineales $\mathbf{Y} = \mathbf{aX}$ del espacio vectorial n dimensional *hacia sí mismo*; éstas aplican un vector $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ sobre un vector $\mathbf{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$ con el mismo número de componentes. Tales aplicaciones corresponden a matrices **a** con tantas filas como columnas, las llamadas *matrices*

mación (*) a dos puntos $P' = (x_1', \ldots, x_m')$, $P'' = (x_1'', \ldots, x_m'')$ con imágenes $Q' = (y_1', \ldots, y_n')$, $Q'' = (y_1'', \ldots, y_n'')$, se ve que la aplicación correspondiente de los vectores $\overrightarrow{P'P''} = (x_1'' - x_1', \ldots, x_m'' - x_m') = (x_1, \ldots, x_m)$ sobre los vectores $\overrightarrow{Q'Q''} = (y_1'' - y_1', \ldots, y_n'' - y_n') = (y_1, \ldots, y_n)$ está dada por las ecuaciones *homogéneas* (35b).

[1]La recta que une a $(x_1, x_2, 0)$ y (y_1, y_2, y_3) es paralela a la normal N de π.

cuadradas.[1] Escrito en términos de las componentes, la aplicación $\mathbf{Y} = \mathbf{aX}$ correspondiente a una matriz cuadrada **a** con n filas y columnas toma la forma (27), p. 174. El teorema básico de la resolubilidad de los sistemas de n ecuaciones lineales para n cantidades desconocidas (p. 174) ahora puede enunciarse alternativamente como sigue:

Para una matriz cuadrada **a** *existen dos posibilidades mutuamente exclusivas:*

(1) $\mathbf{aX} \neq \mathbf{0}$ *para todo vector* $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$

(2) $\mathbf{aX} = \mathbf{0}$ *para algún vector* $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$.

En el caso (1), *para todo vector* **Y** *existe un vector único* **X** *tal que* $\mathbf{Y} = \mathbf{aX}$. *En el caso* (2), *existen vectores* **Y** *para los cuales la ecuación* $\mathbf{Y} = \mathbf{aX}$ *no se cumple para vector* **X** *alguno.*[2]

Se dice que la matriz **a** es *singular* en el caso (2) y *no singular* en el caso (1). Dado que la existencia de una solución no trivial **X** de la ecuación $\mathbf{aX} = \mathbf{0}$ es equivalente a la dependencia de los vectores columna de la matriz **a**, se ve que *una matriz cuadrada* **a** *es singular si y sólo si sus vectores columna son dependientes.*

c. *Operaciones con matrices*

Es costumbre denotar los elementos de una matriz **a** como en (36), por medio de letras que llevan dos subíndices, tales como a_{ji}. Los subíndices indican la *localización* o *dirección* del elemento en la matriz, dando el primer subíndice el número de fila y el segundo el número de columna. Para una matriz con n filas y m columnas que tiene los elementos a_{ji}, el subíndice j varía sobre $1, 2, \ldots, n$ y el subíndice i sobre $1, 2, \ldots, m$. A menudo la ecuación (36) se abrevia en la fórmula

$$\mathbf{a} = (a_{ji}),$$

la cual exhibe los elementos de la matriz **a** pero no muestra los números de filas y columnas, los cuales tienen que deducirse en relación con el contexto.[3] En el ejemplo

[1] Las matrices más generales con números arbitrarios de filas y columnas se conocen como matrices *rectangulares.*

[2] En el caso (1) la ecuación $\mathbf{Y} = \mathbf{aX}$ representa una aplicación uno a uno del espacio vectorial n dimensional sobre sí mismo. En el caso (2) la aplicación no es uno a uno ni sobre.

[3] La letra a en a_{ji} es el nombre de una función real de las variables independientes j e i. El dominio de esta función consiste de los puntos en el plano j, i cuyas coor-

$$\mathbf{a} = (a_{ji}) = \begin{pmatrix} 1! & 2! & 3! & \cdots & m! \\ 2! & 3! & 4! & \cdots & (m+1)! \\ 3! & 4! & 5! & \cdots & (m+2)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n! & (n+1)! & (n+2)! & \cdots & (m+n-1)! \end{pmatrix}$$

se tiene $a_{ji} = (i + j - 1)!$

La adición de matrices y la multiplicación de matrices por escalares se definen en la misma forma que para los vectores. Si $\mathbf{a} = (a_{ji}$ y $\mathbf{b} = (b_{ji})$ son matrices del mismo "tamaño" —es decir, con el mismo número de filas y columnas— se define $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ como la matriz que se obtiene sumando los elementos correspondientes:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_{ji} + b_{ji}).$$

De modo semejante, para un escalar λ se define $\lambda\mathbf{a}$ como la matriz que se obtiene multiplicando cada elemento de $\mathbf{a}$ por el factor λ:

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_{ji}).$$

Se verifican inmediatamente las reglas

(39) $$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{X} = \mathbf{aX} + \mathbf{bX}, \qquad (\lambda\mathbf{a})\,\mathbf{X} = \lambda(\mathbf{aX})$$

para las aplicaciones de los vectores $\mathbf{X}$ determinadas por las matrices.

Más significativo es el hecho de que matrices de tamaños apropiados pueden *multiplicarse* entre sí. Se obtiene una definición natural del producto de dos matrices $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, considerando el *producto simbólico*, o *composición*, de las aplicaciones correspondientes (ver el Volumen I, p. 52). Si $\mathbf{a} = (a_{ji})$ es una matriz con m columnas y n filas, y si $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_m)$ es un vector con m componentes, entonces $\mathbf{a}$ determina las aplicaciones $\mathbf{Y} = \mathbf{aX}$ del vector $\mathbf{X}$ sobre el vector $\mathbf{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$ con las n componentes

$$y_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ji}x_i \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

denadas son enteros, con $1 \leqq j \leqq n$, $1 \leqq i \leqq m$. Normalmente una función f de dos variables independientes x, y se escribe como $f(x, y)$, y, aquí, una notación más consistente sería $a(j, i)$ en lugar de la acostumbrada a_{ji}.

Si ahora $\mathbf{b} = (b_{kj})$ es una matriz con n columnas y p filas, entonces la aplicación $\mathbf{Z} = \mathbf{bY}$ aplicará a $\mathbf{Y}$ sobre el vector $\mathbf{Z} = (z_1, \ldots, z_p)$ con las p componentes

$$z_k = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}\, y_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{kj}\, a_{ji}\, x_i = \sum_{i=1}^{m} c_{ki}\, x_i,$$

donde

(40)
$$c_{ki} = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}\, a_{ji} \quad (k = 1, \ldots, p;\, i = 1, \ldots, m).$$

Por tanto, $\mathbf{Z} = \mathbf{cX}$, donde $\mathbf{c} = \mathbf{ba} = (c_{ki})$ es la matriz con p filas y m columnas y cuyos elementos están dados por la fórmula (40). En consecuencia, se define el producto $\mathbf{c} = \mathbf{ba}$ de las matrices $\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}$ como la matriz con elementos c_{ki} dados por (40).

Se observa que el producto **ba** está definido sólo si el número de columnas de **b** es el mismo que el número de filas de **a**. Esto corresponde al hecho obvio de que el producto simbólico de dos aplicaciones sólo se puede formar si el dominio del primer factor contiene al recorrido del segundo. Por tanto, pudiera suceder muy bien que esté definido el producto **ba** pero no el producto **ab** con los factores en orden inverso. Pero incluso cuando tanto **ba** como **ab** están definidos, *en general no se cumple la ley conmutativa de la multiplicación,* $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ *para las matrices*. Por ejemplo, para

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

se tiene

$$\mathbf{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{ba} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, fácilmente se verifica a partir de la fórmula (40) que la multiplicación de matrices obedece las leyes asociativa y distributiva

(41a)
$$\mathbf{a}(\mathbf{bc}) = (\mathbf{ab})\mathbf{c},$$

(41b)
$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}, \qquad (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc},$$

(para las matrices de tamaños apropiados). Podría decirse que están permitidas todas las manipulaciones algebraicas para las matrices, mientras estén definidos los productos que intervienen y no se intercambien los factores.

La aplicación de vectores determinada por la matriz **a**, la cual se ha escrito como $\mathbf{Y} = \mathbf{aX}$, puede considerarse como un ejemplo especial de la multiplicación matricial *siempre que* se escriban **X** y **Y** como "vectores columna", es decir, como matrices con una sola columna y con m y n filas, respectivamente:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

d. Matrices cuadradas. La recíproca de una matriz. Matrices ortogonales

De importancia particular en las aplicaciones son las matrices con el mismo número de filas y columnas, las llamadas *matrices cuadradas* (las matrices más generales, con números arbitrarios de filas y columnas, se conocen como matrices *rectangulares*). El *orden* de una matriz cuadrada es el número de sus filas o columnas. Dos matrices cuadradas cualesquiera del mismo orden n pueden sumarse o multiplicarse. En particular, pueden formarse potencias de una matriz de este tipo:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{aa}, \qquad \mathbf{a}^3 = \mathbf{aaa}, \cdot \cdot \cdot .$$

La matriz cero, **0**, de orden n es la matriz en la que todos los elementos son 0, o bien, en la que todas las columnas son vectores cero:

(42a) $$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0).$$

Esta matriz tiene las propiedades obvias

(42b) $$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}, \qquad \mathbf{a0} = \mathbf{0a} = \mathbf{0}$$

(para todas las matrices **a** de n-ésimo orden);

(42c) $\mathbf{0X} = \mathbf{0}$ para todos los vectores $\mathbf{X}$ con n componentes.

La *matriz unidad* de orden n, denotada por $\mathbf{e}$, es la matriz correspondiente a la aplicación identidad de vectores $\mathbf{X}$:

(43a) $$\mathbf{eX} = \mathbf{X}$$

para todo vector $\mathbf{X}$. Como entonces, en particular, $\mathbf{eE}_k = \mathbf{E}_k$ para todos los vectores coordenados $\mathbf{E}_k$, se encuentra que la matriz unidad tiene a los vectores coordenados como columnas:

(43b) $$\mathbf{e} = (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Inmediatamente se verifica que $\mathbf{e}$ juega el papel de una "unidad" en la multiplicación de matrices:

(43c) $$\mathbf{ae} = \mathbf{ea} = \mathbf{a}$$

para toda $\mathbf{a}$ de n-ésimo orden.

Se dice que una matriz $\mathbf{b}$ de n-ésimo orden es la *recíproca* de la matriz $\mathbf{a}$ de n-ésimo orden, si

(44) $$\mathbf{ab} = \mathbf{e}.$$

Si $\mathbf{b}$ es la recíproca de $\mathbf{a}$, entonces $\mathbf{a}$ corresponde a la inversa de la aplicación de vectores proporcionada por $\mathbf{b}$, porque si $\mathbf{b}$ aplica un vector $\mathbf{Y}$ sobre $\mathbf{X}$, (es decir, si $\mathbf{X} = \mathbf{bY}$), entonces $\mathbf{a}$ aplica a $\mathbf{X}$ de vuelta sobre $\mathbf{Y}$, ya que $\mathbf{aX} = \mathbf{abY} = \mathbf{eY} = \mathbf{Y}$. Más concretamente, si se conoce una recíproca $\mathbf{b}$ de la matriz $\mathbf{a} = (a_{ji})$, puede escribirse una solución $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned}$$

para cualquier $(y_1, \ldots, y_n) = \mathbf{Y}$ dado. En efecto, puesto que $\mathbf{abY} = \mathbf{eY} = \mathbf{Y}$, se tiene una solución dada por $\mathbf{X} = \mathbf{bY}$, es decir, por

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + \cdots + b_{1n}y_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= b_{n1}y_1 + \cdots + b_{nn}y_n. \end{aligned}$$

Todo número real a, excepto cero, tiene un recíproco b para el cual $ab = 1$. No obstante, existen matrices diferentes de la matriz cero que no tienen recíproca. Si $\mathbf{a}$ tiene una recíproca $\mathbf{b}$, la ecuación $\mathbf{aX} = \mathbf{Y}$ tiene, para cada vector $\mathbf{Y}$, la solución $\mathbf{X} = \mathbf{bY}$, ya que

$$\mathbf{abY} = \mathbf{eY} = \mathbf{Y}.$$

Por tanto (ver la p. 186), la matriz $\mathbf{a}$ debe ser no singular; es decir, las columnas de $\mathbf{a}$ son vectores independientes. *Las matrices singulares no tienen recíproca.* La condición $\mathbf{ab} = \mathbf{e}$ para la matriz recíproca $\mathbf{b}$ de $\mathbf{a}$ puede escribirse en la forma

$$\sum_{r=1}^{n} a_{jr}b_{rk} = e_{jk}, \tag{45}$$

donde a_{jr}, b_{rk}, e_{jk} denotan, respectivamente, los elementos generales de las matrices $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{e}$. Para k fija, se tiene en (45) un sistema de n ecuaciones lineales para el vector $\mathbf{B}_k = (b_{1k}, b_{2k}, \ldots, b_{nk})$, el cual representa la k-ésima columna de la matriz $\mathbf{b}$. Si la matriz $\mathbf{a}$ es no singular, existe una solución única $\mathbf{B}_k$ de (45) para cada k. *De aquí que una matriz* $\mathbf{a}$ *no singular tiene una y sólo una recíproca* $\mathbf{b}$.

Sea $\mathbf{a}$ cualquier matriz no singular y $\mathbf{b}$ su recíproca; ésto es, $\mathbf{ab} = \mathbf{e}$. Tómese un vector arbitrario $\mathbf{X}$ y póngase $\mathbf{Y} = \mathbf{aX}$. Puesto que tanto $\mathbf{Z} = \mathbf{X}$ como $\mathbf{Z} = \mathbf{bY}$ son soluciones de las ecuaciones $\mathbf{Y} = \mathbf{aZ}$ y como la solución es única, debe tenerse

$$\mathbf{bY} = \mathbf{X}$$

para todo vector $\mathbf{X}$. De donde (ver la p 185), $\mathbf{a}$ es la recíproca de $\mathbf{b}$.

$$\mathbf{ba} = \mathbf{e}.$$

Comúnmente, la recíproca de una matriz $\mathbf{a}$ no singular se denota

por $\mathbf{a}^{-1}$. Se tiene

(46) $$\mathbf{aa}^{-1} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{a} = \mathbf{e},$$

donde $\mathbf{e}$ es la matriz unidad. La recíproca puede calcularse resolviendo el sistema de ecuaciones lineales (45) para las b_{rk}. Como los elementos e_{jk} de la matriz unidad tienen el valor 0 para $j \neq k$ y 1 para $j = k$, las ecuaciones (45) afirman que el producto escalar de la j-ésima fila de la matriz $\mathbf{a}$ con la k-ésima columna de la matriz $\mathbf{a}^{-1}$ tiene el valor 0 para $j \neq k$ y 1 para $j = k$. Es más, como $\mathbf{a}^{-1}\,\mathbf{a} = \mathbf{e}$ se ve que el producto escalar de la j-ésima fila de $\mathbf{a}^{-1}$ con la k-ésima columna de $\mathbf{a}$ también tiene el valor 0 para $j \neq k$ y 1 para $j = k$.

La multiplicación por las recíprocas nos permite "dividir" una ecuación entre matrices por una matriz no singular. Por ejemplo, la ecuación matricial

$$\mathbf{ab} = \mathbf{c},$$

donde $\mathbf{a}$ es una matriz no singular, puede resolverse para $\mathbf{b}$ multiplicando la ecuación *desde la izquierda* por $\mathbf{a}^{-1}$:

$$\mathbf{a}^{-1}\mathbf{c} = \mathbf{a}^{-1}(\mathbf{ab}) = (\mathbf{a}^{-1}\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{eb} = \mathbf{b}.$$

De modo semejante, la ecuación

$$\mathbf{ba} = \mathbf{c}$$

conduce a

$$\mathbf{ca}^{-1} = \mathbf{b}.$$

Desde el punto de vista de la geometría euclidiana, las matrices cuadradas más importantes son las llamadas matrices *ortogonales*, las cuales corresponden al paso de un sistema coordenado cartesiano hacia otro sistema del mismo tipo, o bien, a transformaciones lineales que conservan la longitud. Se dice que una matriz cuadrada $\mathbf{a}$ es ortogonal si sus vectores columna $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ forman un sistema ortonormal:

(47) $$\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_k = \begin{cases} 0 \text{ para } i \neq k \\ 1 \text{ para } i = k \end{cases}$$

(ver la p. 180). Como los vectores que forman un sistema ortonormal son independientes, se concluye que *las matrices ortogonales siempre son no singulares.* La relación vectorial $\mathbf{aX} = \mathbf{Y}$ correspondiente a la matriz $\mathbf{a}$, interpretada pasivamente, describe cómo están relacionadas las componentes $y_1, \ldots, y_n$ de un vector con respecto a los vectores coordenados $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n$ con las componentes del mismo vector con respecto a la base $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$. Para una matriz ortogonal $\mathbf{a}$, la base $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ consiste de n vectores mutuamente ortogonales de longitud 1, formando un sistema coordenado "cartesiano", en el cual la distancia está dada por la expresión usual (ver la p. 182). Interpretada activamente, $\mathbf{Y} = \mathbf{aX}$ representa una aplicación lineal en la que los vectores coordenados $\mathbf{E}_i$ se aplican sobre los vectores $\mathbf{A}_i$. Esta aplicación lleva un vector

$$\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n) = x_1\mathbf{E}_1 + \cdots + x_n\mathbf{E}_n$$

hacia el vector

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} = \mathbf{aX} &= \mathbf{a}(x_1\mathbf{E}_1 + \cdots + x_n\mathbf{E}_n) = x_1\mathbf{aE}_1 + \cdots + x_n\mathbf{aE}_n \\ &= x_1\mathbf{A}_1 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n.\end{aligned}$$

La aplicación conserva la longitud de cualquier vector ya que, por (47),

$$\begin{aligned}|\mathbf{Y}|^2 &= \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y} = (x_1\mathbf{A}_1 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n) \cdot (x_1\mathbf{A}_1 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n) \\ &= x_1^2 + \cdots + x_n^2 = |\mathbf{X}|^2.\end{aligned}$$

Más generalmente, la aplicación conserva el producto escalar de dos vectores cualesquiera y, por consiguiente, también los ángulos entre las direcciones, como se verifica fácilmente. Estas aplicaciones que conservan la longitud se conocen como *transformaciones ortogonales* o *movimientos rígidos*. En dos dimensiones se identifican fácilmente con los cambios de ejes coordenados que se discutieron en el Volumen I (p. 361). Un vector $\mathbf{A}_1$ de longitud 1 en dos dimensiones es de la forma $\mathbf{A}_1 = (\cos\gamma, \operatorname{sen}\gamma)$, con algún ángulo γ apropiado. Los únicos vectores $\mathbf{A}_2$ de longitud 1 que son perpendiculares a $\mathbf{A}_1$ son

$$\mathbf{A}_2 = \left(\cos\left(\gamma + \frac{\pi}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\gamma + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(-\operatorname{sen}\gamma, \cos\gamma\right)$$

y

$$A_2 = \left(\cos\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right), \text{ sen}\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\text{sen}\, \gamma, \ -\cos \gamma\right).$$

Por tanto, la matriz general ortogonal de segundo orden es de cualquiera de las dos formas

(48) $$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\text{sen}\, \gamma \\ \text{sen}\, \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \text{ o bien, } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \text{sen}\, \gamma \\ \text{sen}\, \gamma & -\cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Las relaciones de ortogonalidad (47) permiten escribir de inmediato la inversa $\mathbf{a}^{-1}$ de una matriz ortogonal $\mathbf{a}$. Simplemente se toma como $\mathbf{a}^{-1}$ la matriz que tenga los $\mathbf{A}_k$ como vectores *fila*; el producto escalar de la j-ésima fila de $\mathbf{a}^{-1}$ con la k-ésima columna de $\mathbf{a}$ es entonces 0 para $j \neq k$ y 1 para $j = k$, como es requerido por la relación $\mathbf{a}^{-1}\mathbf{a} = \mathbf{e}$. En general, para cualquier matriz $\mathbf{a} = (a_{jk})$, se define la *transpuesta* $\mathbf{a}^T = (b_{jk})$ como la matriz que se obtiene de $\mathbf{a}$ intercambiando filas y columnas. Más precisamente, $b_{jk} = a_{kj}$.[1] Para una matriz ortogonal simplemente se tiene

(49) $$\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a}^T.$$

Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} \cos \gamma & -\text{sen}\, \gamma \\ \text{sen}\, \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \text{sen}\, \gamma \\ -\text{sen}\, \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

De acuerdo con (46), puede escribirse (49) como

(49a) $$\mathbf{a}^T\mathbf{a} = \mathbf{e}, \qquad \mathbf{a}\mathbf{a}^T = \mathbf{e}.$$

La segunda relación muestra que en una matriz ortogonal, el producto escalar de la j-ésima fila es 0 para $j \neq k$ y 1 para $j = k$. Así, *en una matriz ortogonal los vectores fila también forman un sistema ortonormal.*

[1] Pensando en $\mathbf{a}$ escrita como un arreglo rectangular, se define la "diagonal principal" de $\mathbf{a}$ como la línea que va de la esquina superior izquierda hacia abajo con pendiente -1. Es la línea que contiene a los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$. La transpuesta de $\mathbf{a}$ se obtiene "reflejándola" en la diagonal principal.

Ejercicios 2.2

1. En cada caso, describir el espacio que pasa por P generado por los vectores $\mathbf{A}_k$.

   (a) $P = (-1, 2, 1)$; $\mathbf{A}_1 = (4, 0, 3)$

   (b) $P = (2, 1, -4)$ $\mathbf{A}_1 = (3, -2, 1)$, $\mathbf{A}_2 = (1, 0, -1)$

   (c) $P = (2, 1, -4, 2)$, $\mathbf{A}_1 = (3, -2, 1, 2)$, $\mathbf{A}_2 = (1, 0, -1, 2)$.

2. Verificar que $\mathbf{E}_1 = (2/3, 2/3, -1/3)$, $\mathbf{E}_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$, $\mathbf{E}_3 = (\sqrt{2}/6, \sqrt{2}/6, 2\sqrt{2}/3)$ forman una base ortonormal y obtener las representaciones de los vectores dados en términos de esta base:

   (a) $\mathbf{A}_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$

   (b) $\mathbf{A}_2 = (3, -3, 3)$

   (c) $\mathbf{A}_3 = (1, 0, 0)$

3. Dados los vectores linealmente independientes $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$, construir los vectores unitarios mutuamente perpendiculares $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_m$ con la propiedad de que $\mathbf{E}_k$ sea una combinación lineal de $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$, para $k = 1, 2, \ldots, m$.

4. A partir del resultado del Ejercicio 3, probar el teorema fundamental de la dependencia lineal.

5. ¿Cuál es la distancia al punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ desde la recta dada por

$$x = at + b, \quad y = ct + d, \quad z = et + f?$$

   (*Sugerencia:* Encontrar el pie de la perpendicular bajada desde P a la recta.)

6. ¿Tiene una solución no trivial el siguiente sistema de ecuaciones?

$$x + 2y + 3z = 0$$
$$2x + 3y + z = 0$$
$$3x + y + 2z = 0$$

7. Hallar la representación del vector (a_1, a_2, a_3) con respecto a la base $\mathbf{A}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{A}_2 = (2, 3, 1)$, $\mathbf{A}_3 = (3, 1, 2)$.

8. Determinar la matriz para pasar de las coordenadas cartesianas para la base $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ hacia las coordenadas afines para la base $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ dada en el Ejercicio 7.

9. Probar que si la matriz $\mathbf{a}$ es singular, existen vectores $\mathbf{Y}$ para los cuales $\mathbf{Y} = \mathbf{aX}$ no tiene solución.

10. Obtener los productos $\mathbf{ab}$ y $\mathbf{ba}$ para las matrices

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

11. Encontrar las condiciones para que la matriz de 2×2

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

tenga una recíproca y dar esa recíproca si existe.

12. Demostrar que sólo existe una matriz unidad.
13. Hallar la recíproca de **ab**, si tanto **a** como **b** son no singulares.
14. A veces se define una matriz singular de $n \times n$ como una matriz que aplica el espacio n dimensional sobre un espacio de dimensión inferior. Demostrar que esta definición es equivalente a la dada aquí.
15. Interpretar geométricamente las matrices dadas en (48).
16. Probar que a es ortogonal si y sólo si $\mathbf{a}^T = \mathbf{a}^{-1}$.
17. Demostrar que la transpuesta de un producto **ab** es el producto $\mathbf{b}^T\mathbf{a}^T$ de las matrices transpuestas en orden inverso.
18. Demostrar que el producto de matrices ortogonales es ortogonal.
19. Verificar que la aplicación por medio de una matriz ortogonal conserva el producto escalar; es decir, si **a** es ortogonal, entonces $(\mathbf{aX}) \cdot (\mathbf{aY}) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$
20. Demostrar que cualquier matriz que conserva la longitud es ortogonal.
21. Probar que una transformación afín lleva el centro de masa de un sistema de partículas hacia el centro de masa de las partículas imagen.

2.3 Determinantes

a. Determinantes de segundo y tercer orden

El análisis matemático incluye el estudio de aplicaciones no lineales en espacios de varias dimensiones. No obstante, tal estudio tiene que ser precedido por el de las aplicaciones lineales $\mathbf{Y} = \mathbf{aX}$, donde **X** y **Y** son vectores y **a** una matriz. En particular, es de gran importancia el analizar la estructura de la inversa de una aplicación de este tipo o —lo que es lo mismo— analizar la estructura de las soluciones de un sistema de n ecuaciones lineales

$$\text{(50)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

para n cantidades desconocidas $x_1, \ldots, x_n$.

El proceso de resolver n ecuaciones lineales en n variables conduce a ciertas expresiones algebraicas llamadas *determinantes*, los cuales tienen un gran número de términos. Al principio, la definición explícita y las propiedades de los determinantes parecen ser un tanto mistificadas. El misterio desaparecerá cuando basemos la definición de determinante en una sola propiedad, la de ser una forma multilineal alternante de n vectores en el espacio n dimensional. De este punto de vista conceptual se pueden deducir con facilidad todas las propiedades importantes de los determinantes. En capítulos posteriores de este libro se verá que los determinantes tienen una importancia extrema al extender el cálculo diferencial e integral hacia dimensiones superiores.

Resulta instructivo escribir completamente la solución explícita de las ecuaciones (50) para unos cuantos de los primeros valores de n. Para $n = 1$ se tiene únicamente la ecuación

$$a_{11}x_1 = y_1$$

con la solución

$$\text{(50a)} \qquad x_1 = \frac{y_1}{a_{11}}.$$

Para $n = 2$ se tiene el sistema

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2.$$

Multiplicando la primera ecuación por a_{22}, la segunda por a_{12} y restando, se elimina x_2 y se encuentra una sola ecuación para x_1; de modo semejante, multiplicando la primera ecuación por a_{21} y la segunda por a_{11} y restando se elimina x_1. De esta manera se encuentran para x_1, x_2 las expresiones

(50b) $$x_1 = \frac{a_{22}y_1 - a_{12}y_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}y_2 - a_{21}y_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Para $n = 3$ se tiene el sistema

(50c) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = y_3. \end{cases}$$

Puede reducirse este sistema a dos ecuaciones para x_1, x_2, eliminando así a x_3, multiplicando la segunda ecuación por a_{13}/a_{23} y restándola de la primera, y multiplicando la tercera ecuación por a_{13}/a_{33} y restándola de la primera. Entonces pueden resolverse, como se hizo antes, las dos ecuaciones resultantes para x_1, x_2 únicamente. Después de un poco de manipulación algebraica se encuentra que

(50d)
$$x_1 = \frac{a_{22}a_{33}y_1 + a_{12}a_{23}y_2 + a_{13}a_{32}y_2 - a_{13}a_{22}y_3 - a_{23}a_{32}y_1 - a_{12}a_{33}y_2}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}},$$

con fórmulas semejantes para x_2 y x_3. Para $n = 4$, los cálculos se hacen completamente pesados y resulta evidente que sólo un procedimiento sistemático puede traer orden a los resultados.

Se observa que, en cada caso, la solución x_i toma la forma de un cociente, donde el denominador es una función de los coeficientes a_{ji} únicamente, es decir, una función de la matriz $\mathbf{a} = (a_{ji})$. Para $n = 1$ esta función es simplemente el propio coeficiente a_{11}. Para $n = 2$, el denominador

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

formado a partir de los elementos de la matriz

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

se llama *determinante de la matriz* **a** y se escribe

(51a) $$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Es evidente que los numeradores en (50b) también pueden escribirse como determinantes, dando lugar a las expresiones

$$(51b)\qquad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} \\ y_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{12} & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Por supuesto, estas fórmulas sólo tienen sentido si el determinante del denominador no tiene el valor 0.

La fórmula (50d) sugiere introducir como determinante de la matriz de tercer orden

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a la expresión

$$(52a)\qquad a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= \det(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

La ley de formación de un determinante de tercer orden de este tipo puede expresarse por medio de la "regla de la diagonal" (Fig. 2.5a), la cual es muy fácil de recordar. Se repiten las dos primeras columnas después de la tercera; se forma el producto de cada triada de números que se encuentran en las diagonales, multiplicando los productos asociados con las diagonales inclinadas hacia abajo a la derecha por $+1$ y hacia abajo a la izquierda por -1; y se suma. (¡Esta regla sólo se cumple para los determinantes de tercer orden!).

Con la ayuda de los determinantes de tercer orden se puede escribir la solución del sistema (50c) en la forma más concisa

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & a_{13} \\ y_2 & a_{22} & a_{23} \\ y_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & y_1 & a_{13} \\ a_{21} & y_2 & a_{23} \\ a_{31} & y_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & y_2 \\ a_{31} & a_{32} & y_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

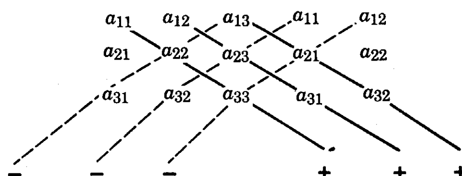


Figura 2.5a

Por analogía, se define el determinante de la matriz de primer orden

$$\mathbf{a} = (a_{11})$$

con base en (50a), como

$$a_{11} = \det(\mathbf{a}).$$

Entonces se ve que en cada uno de los casos $n = 1,2,3$ la solución $(x_1, \ldots, x_n)$ del sistema (50) puede describirse como sigue ("regla de Cramer"): *Cada incógnita x_i es el cociente de dos determinantes. En el denominador se tiene el determinante de la matriz* $\mathbf{a} = (a_{jk})$*; en el numerador se tiene el determinante de la matriz obtenida remplazando la i-ésima columna de la matriz* $\mathbf{a}$ *por las cantidades $y_1, y_2, \ldots, y_n$ que aparecen en el segundo miembro de las ecuaciones.*

b. Formas lineales y multilineales de vectores

Con el fin de definir los determinantes de orden superior y enunciar sus propiedades principales, es necesario hacer uso de algunas nociones algebraicas generales.

Una función $f(a_1, \ldots, a_n)$ de las n variables independientes $a_1, \ldots, a_n$ puede considerarse como una *función del vector* $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ y *escribirse* en la forma $f(\mathbf{A})$. Se dice que f es una *forma lineal* en $\mathbf{A}$ si

(53a) $$f(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f(\mathbf{A}) + f(\mathbf{B})$$

para dos vectores cualesquiera **A, B** y

(53b) $$f(\lambda\mathbf{A}) = \lambda f(\mathbf{A})$$

para cualquier vector **A** y cualquier escalar λ.

Las dos reglas (53a, b) pueden resumirse en el requerimiento único de que

(54a) $$f(\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}) = \lambda f(\mathbf{A}) + \mu f(\mathbf{B})$$

para cualesquiera vectores **A, B** y escalares λ, μ. Escrita con detalle, la regla (54a) se convierte en

(54b) $$f(\lambda a_1 + \mu b_1, \ldots, \lambda a_n + \mu b_n) = \lambda f(a_1, \ldots, a_n) + \mu f(b_1, \ldots, b_n).$$

Por ejemplo, la función

$$f(\mathbf{A}) = 3a_2 - 27a_3$$

es una forma lineal, mientras que

$$f(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$

no lo es.

La relación (54a) implica inmediatamente la regla más general para las formas lineales

(54c) $$f(\lambda_1\mathbf{A}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{A}_m) = \lambda_1 f(\mathbf{A}_1) + \cdots + \lambda_m f(\mathbf{A}_m)$$

válidas para cualesquiera vectores $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ y escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Esta regla proporciona una expresión explícita para la forma lineal más general en el vector **A**. Usando los vectores coordenados $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n$, se tiene, por (2b), la representación

$$\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n) = a_1\mathbf{E}_1 + a_2\mathbf{E}_2 + \cdots + a_n\mathbf{E}_n$$

para el vector **A**. De aquí que, por (54c), f es de la forma

(55a) $$f(\mathbf{A}) = a_1 f(\mathbf{E}_1) + a_2 f(\mathbf{E}_2) + \cdots + a_n f(\mathbf{E}_n) = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_n a_n$$

donde los c_i tienen los valores constantes

(55b) $$c_i = f(\mathbf{E}_i).$$

Combinando los coeficientes c_i en el vector $\mathbf{C} = (c_1, \ldots, c_n)$, se tiene

(55c) $$f(\mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}.$$

La forma lineal más general en un vector **A** *es el producto escalar de* **A** *con un vector constante apropiado* **C**.

Una función $f(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ de dos vectores $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathbf{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ recibe el nombre de *forma bilineal* en **A, B** si f es una forma lineal en **A** para **B** fijo y una forma lineal en **B** para **A** fijo; ésto significa que se requiere que

(56a) $$f(\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}, \mathbf{C}) = \lambda f(\mathbf{A}, \mathbf{C}) + \mu f(\mathbf{B}, \mathbf{C})$$

(56b) $$f(\mathbf{A}, \lambda\mathbf{B} + \mu\mathbf{C}) = \lambda f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) + \mu f(\mathbf{A}, \mathbf{C})$$

para cualesquiera vectores **A, B, C** y escalares λ, μ. El ejemplo más sencillo de una forma bilineal es el producto escalar

$$f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

En este ejemplo, las reglas (56a, b) se reducen simplemente a las leyes asociativa y distributiva (15b, c), p. 165, para los productos escalares.

A partir de (56a, b), más generalmente se encuentra que

(56c) $$f(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}, \gamma\mathbf{C} + \delta\mathbf{D}) = \alpha f(\mathbf{A}, \gamma\mathbf{C} + \delta\mathbf{D}) + \beta f(\mathbf{B}, \gamma\mathbf{C} + \delta\mathbf{D}) = \alpha\gamma f(\mathbf{A}, \mathbf{C}) + \alpha\delta f(\mathbf{A}, \mathbf{D}) + \beta\gamma f(\mathbf{B}, \mathbf{C}) + \beta\delta f(\mathbf{B}, \mathbf{D}).$$

Por tanto, puede operarse con las formas bilineales como con los productos ordinarios al "multiplicar" las expresiones. Usando nuevamente la descomposición

$$\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n) = a_1\mathbf{E}_1 + \cdots + a_n\mathbf{E}_n$$
$$\mathbf{B} = (b_1, \ldots, b_n) = b_1\mathbf{E}_1 + \cdots + b_n\mathbf{E}_n$$

para los vectores **A, B**, se llega a la fórmula

$$f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = f(a_1\mathbf{E}_1 + a_2\mathbf{E}_2 + \cdots + a_n\mathbf{E}_n,\ b_1\mathbf{E}_1 + b_2\mathbf{E}_2 + \cdots + b_n\mathbf{E}_n)$$
$$= \sum_{j,k=1}^{n} a_j b_k f(\mathbf{E}_j, \mathbf{E}_k).$$

De aquí que la forma bilineal más general en **A, B** está dada por

$$f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk} a_j b_k \tag{57a}$$

con coeficientes constantes

$$c_{jk} = f(\mathbf{E}_j, \mathbf{E}_k). \tag{57b}$$

Para $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, la forma bilineal f pasa a la *forma cuadrática*

$$f(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk} a_j a_k. \tag{57c}$$

De manera semejante se definen las formas *trilineales* $f(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ en los tres vectores **A, B, C** como funciones que son formas lineales en cada vector por separado. Se encuentra, exactamente como antes, que la forma trilineal, más general está dada por una expresión

$$f(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \sum_{j,k,r=1}^{n} c_{jkr} a_j b_k c_r, \tag{58a}$$

donde

$$c_{jkr} = f(\mathbf{E}_j, \mathbf{E}_k\ \mathbf{E}_r). \tag{58b}$$

Pueden definirse formas *multilineales* f más generales en cualquier número m de vectores, en una manera obvia. Lo único nuevo es sólo cuestión de notación, ya que no se asocian letras diferentes con vectores diferentes. Se denotan los vectores por $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ y se introducen sus componentes a_{jk} mediante

$$\mathbf{A}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}), \qquad \mathbf{A}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}), \ldots,$$

$$\mathbf{A}_m = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{nm}).$$

La función f es una forma multilineal $f(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m)$ en $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ si es una forma lineal en cada vector cuando los otros se mantienen fijos. También puede considerarse a f como función de la matriz

$$\mathbf{a} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m) = (a_{jk})$$

que tiene a $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ como vectores columna. Análogamente a (58a), la forma multilineal más general en $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ está dada por

(59a) $$f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m) = \sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_m \\ = 1, \ldots, n}} c_{j_1 j_2 \cdots j_m} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_m m}$$

donde[1]

(59b) $$c_{j_1 j_2 \cdots j_m} = f(\mathbf{E}_{j_1}, \mathbf{E}_{j_2}, \ldots, \mathbf{E}_{j_m}).$$

c. *Formas multilineales alternantes. Definición de los determinantes*

Los determinantes de segundo y tercer orden definidos en las fórmulas (51a) y (52a) son formas multilineales especiales. El determinante de segundo orden en (51a), p. 198, es una forma bilineal de los dos vectores bidimensionales

(60a) $$\mathbf{A}_1 = (a_{11}, a_{21}), \qquad \mathbf{A}_2 = (a_{12}, a_{22});$$

[1] El uso de subíndices para los subíndices en estas fórmulas es un tanto incómodo. Aquí $j_1, j_2, \ldots, j_m$ representa cualquier combinación de m números seleccionados del conjunto de números 1, 2, ..., n. Una combinación de este tipo también podría considerarse como una función $j(k)$ cuyo dominio es el conjunto de números $k = 1, 2, \ldots, m$ y cuyo recorrido está en el conjunto de números $j = 1, 2, \ldots, n$. Cualquiera de estas combinaciones o funciones da lugar a un término en la suma dada en la fórmula (59a).

el determinante de tercer orden en (52a) es una función trilineal de los vectores tridimensionales

(60b) $$\mathbf{A}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}), \qquad \mathbf{A}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}),$$
$$\mathbf{A}_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33}).$$

(La linealidad de los determinantes separadamente en cada vector se deduce por inspección, a partir del hecho de que cada producto en el desarrollo explícito contiene exactamente un factor con un segundo subíndice dado.) La característica extra que coloca a los determinantes aparte de las otras formas multilineales es su carácter *alternante.*

Se dice que una función de varios argumentos (que pueden ser vectores o escalares) es *alternante,* si cambia solamente de signo cuando se intercambian dos cualesquiera de los argumentos. Ejemplos de funciones alternantes de argumentos escalares son

(61a) $$\phi(x, y) = y - x$$

(61b) $$\phi(x, y, z) = (z - y)(z - x)(y - x).$$

Una función f de dos vectores n dimensionales $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ es alternante si

$$f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = -f(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1)$$

para todos $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$. Esto implica, en particular para $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}$, que

$$f(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = 0.$$

Sea $n = 2$ y f una función alternante de los vectores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ dados por (60a), la cual también es una forma bilineal. Entonces

$$f(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1) = f(\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2) = 0, \qquad f(\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1) = -f(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2).$$

De (57a, b) se deduce que

(62a) $$\begin{aligned} f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) &= f(a_{11}\mathbf{E}_1 + a_{21}\mathbf{E}_2,\ a_{12}\mathbf{E}_1 + a_{22}\mathbf{E}_2) \\ &= c(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = c \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2), \end{aligned}$$

donde la constante c tiene el valor

$$c = f(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2). \tag{62b}$$

Por tanto, *toda forma bilineal alternante de dos vectores* $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ *en el espacio bidimensional difiere del determinante de la matriz con columnas* $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ *sólo en un factor constante* c.

Más generalmente, una forma bilineal alternante de dos vectores en n dimensiones puede escribirse

$$f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk} a_{j1} a_{k2},$$

donde

$$c_{jk} = -c_{kj}, \qquad c_{jj} = 0.$$

Combinando los términos con subíndices que difieren sólo en una permutación, puede expresarse f como una combinación lineal de determinantes de segundo orden:

$$f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n} c_{jk}(a_{j1}a_{k2} - a_{k1}a_{j2}) \tag{62c}$$
$$= \sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n} c_{jk} \begin{vmatrix} a_{j1} & a_{k1} \\ a_{j2} & a_{k2} \end{vmatrix}.$$

Para una función alternante f de tres vectores, se tienen las relaciones

$$f(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = -f(\mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{C}) = -f(\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{B}) = -f(\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{A}), \tag{63a}$$

de lo cual se deduce que también

$$f(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = f(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A}) = f(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}). \tag{63b}$$

En particular, f se anula siempre que dos de sus argumentos sean iguales. Sean $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ los vectores tridimensionales dados por (60b). Por (58a, b), la forma trilineal alternante general f en $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ es

$$f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) = \sum_{j,k,r=1}^{3} c_{jkr} a_{j1} a_{k2} a_{r3} .$$

Aquí, usando (63a, b),

$$c_{jkr} = f(\mathbf{E}_j, \mathbf{E}_k, \mathbf{E}_r) = \varepsilon_{jkr} f(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3),$$

con $\varepsilon_{jkr} = 0$, si dos de los números j, k, r son iguales y

(64a) $$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \qquad \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1.$$

Haciendo uso del hecho de que la función $\phi(x, y, z)$ de la fórmula (61b) cambia de signo siempre que se intercambian dos de sus argumentos, para ε_{jkr} se encuentra la expresión concisa

(64b) $$\begin{aligned} \varepsilon_{jkr} &= \operatorname{sgn} \phi(j, k, r) \\ &= \operatorname{sgn} (r - k)(r - j)(k - j). \end{aligned}$$

Comparando con la expresión (52a), p. 199 para un determinante de tercer orden se encuentra que

(64c) $$f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

donde $c = f(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ es una constante. Se tiene el mismo resultado que en dos dimensiones: *La forma trilineal alternante más general en tres vectores tridimensionales* $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ *difiere del determinante de la matriz con columnas* $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, *sólo en un factor constante* c. Entonces, obviamente, el determinante de tercer orden de la matriz con columnas $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ es esa forma trilineal alternante en los vectores $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, determinada de manera única, que tiene el valor 1 cuando $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ son respectivamente iguales a los vectores coordenados $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$.[1]

Ahora resulta evidente la manera en que pueden definirse los determinantes de orden superior. Sea a la matriz

[1]La última condición expresa que la matriz unitaria **e** tiene el determinante 1.

(65a)
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

con vectores columna $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$. Sea f una forma alternante multilineal en $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$. Entonces f está dada por (59a). Aquí los coeficientes $c_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ tienen la forma

(65b)
$$c_{j_1 j_2 \ldots j_n} = f(\mathbf{E}_{j_1}, \mathbf{E}_{j_2}, \ldots, \mathbf{E}_{j_n}).$$

Estos cambian de signo siempre que se intercambian dos cualesquiera de los números $j_1, j_2, \ldots, j_n$. Denotemos por $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ el producto

(65c)
$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (x_n - x_{n-1})\,(x_n - x_{n-2}) \cdots (x_n - x_2)\,(x_n - x_1) \\ &\qquad (x_{n-1} - x_{n-2}) \cdots (x_{n-1} - x_2)\,(x_{n-1} - x_1) \\ &\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\qquad (x_3 - x_2)\,(x_3 - x_1) \\ &\qquad (x_2 - x_1) \\ &= \prod_{\substack{j,k=1,\ldots,n \\ j<k}} (x_k - x_j). \end{aligned}$$

Fácilmente se ve que ϕ es una función alternante de los escalares $x_1, \ldots, x_n$ que se anula sólo cuando dos de esos escalares son iguales. Entonces,

(65d)
$$\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \operatorname{sgn} \phi(j_1, j_2, \ldots, j_n)$$

es una función alternante de $j_1, \ldots, j_n$, la cual sólo toma los valores $+1, 0, -1$. Para $j_1, \ldots, j_n$ restringidos a los valores $1, 2, \ldots, n$, se tiene $\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = 0$, a menos que los números $j_1, \ldots, j_n$ sean distintos, es decir, a menos que formen una *permutación* de los números $1, 2, \ldots, n$. Se dice que $j_1, \ldots, j_n$ es una *permutación par* de $1, 2, \ldots, n$ si $\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = +1$, y que es una *permutación impar* si $\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = -1$. Una permutación par puede reacomodarse en el orden $1, 2, \ldots, n$ por medio de un número par de intercambios de dos

elementos; una permutación impar, por medio de un número impar de tales intercambios.

Obviamente, por (65b),

$$c_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} f(\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n). \tag{65e}$$

Se define el determinante de la matriz **a** dada en (65a) como

$$\det(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{66a}$$

$$= \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^{n} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n}.$$

Entonces se tiene el resultado: *La forma multilineal alternante f más general en n vectores n dimensionales* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *difiere del determinante de la matriz con columnas* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *sólo en el factor constante* $c = f(\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n)$.

d. Propiedades principales de los determinantes

La fórmula (66a) da el desarrollo explícito de un determinante de n-ésimo orden en términos de sus n^2 elementos a_{jk}. Contando sólo los términos con coeficientes $\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n}$, que no se anulan, el determinante es una forma de n-ésimo grado en los a_{jk} que consiste de $n!$ términos. Cada término (aparte del coeficiente $\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \pm 1$) es un producto de n de los elementos, uno de cada columna y de cada fila. En principio, la fórmula de desarrollo hace posible calcular un determinante para cualesquiera valores dados de los elementos. En la práctica, sin embargo, la fórmula tiene demasiados elementos que deben tomarse en cuenta (120 en el caso de los determinantes de quinto orden; 3 628 800 en el caso de los determinantes de décimo orden) como para ser útil para llevar a cabo cálculos numéricos, y se han ideado métodos más eficientes para evaluar los determinantes.

Las propiedades básicas de los determinantes se han incorporado ya en su definición como formas multilineales alternantes de n vectores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ en el espacio n dimensional. Si **a** es la matriz con estos vectores como vectores columna, se escribe

$$\det(\mathbf{a}) = \det(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n).$$

Inmediatamente se concluye que *el determinante de la matriz cuadrada* **a** *cambia de signo si se intercambian dos columnas cualesquiera de* **a**; *en particular, el determinante de una matriz* **a** *con dos columnas idénticas se anula.* Aplicando la linealidad del determinante en cada uno de sus vectores columna separadamente, se encuentra que *multiplicar una columna de la matriz* **a** *por un factor* λ *tiene el efecto de multiplicar el* determinante de **a** por λ.[1] Por ejemplo,

(67a) $$\det(\lambda \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n) = \lambda \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n).$$

En particular, para $\lambda = 0$ y $\mathbf{A}_1$ arbitrario, se encuentra que

(67b) $$\det(\mathbf{0}, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n) = 0.$$

Por supuesto, se aplican las mismas consideraciones a cualquier otra columna y se encuentra que *el determinante de una matriz* **a** *se anula si cualquier columna de* **a** *es el vector cero.* A partir de la multilinealidad de los determinantes, con más generalidad se concluye que

(67c) $$\begin{aligned} &\det(\mathbf{A}_1 + \lambda \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n) \\ &\quad = \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n) + \lambda \det(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n) \\ &\quad = \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n), \end{aligned}$$

dado que la matriz $(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$ tiene dos columnas idénticas. En general, *el valor del determinante de la matriz* **a** *no cambia si se suma un múltiplo de una columna de* **a** *a una columna diferente.*[2]

De importancia fundamental es la ley de multiplicación para los determinantes:

El determinante del producto de dos matrices **a** *y* **b** *de n-ésimo orden es el producto de sus determinantes:*

(68a) $$\det(\mathbf{ab}) = \det(\mathbf{a}) \cdot \det(\mathbf{b}).$$

Escrito en sus elementos, la regla toma la forma

---

[1]Multiplicar todos los elementos de la matriz de n-ésimo orden **a** por el factor λ es equivalente a multiplicar cada una de sus n columnas por λ y, por tanto, conduce a multiplicar el determinante de a por λ^n. De donde, $(\lambda \mathbf{a}) = \lambda^n \det(\mathbf{a})$.

[2]Obviamente, multiplicar una columna por el factor λ y sumarla a la *misma* columna cambia el valor del determinante en el factor $1 + \lambda$.

$$(68b)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

donde

$$(68c)\quad c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk} = \sum_{r=1}^{n} a_{jr}b_{rk}.$$

Esta ley es una consecuencia sencilla de la definición dada para los determinantes. Sea $\mathbf{c} = \mathbf{ab}$ la matriz producto. Manténgase la matriz $\mathbf{a}$ fija y considérese el determinante $\mathbf{c}$ en su dependencia respecto a $\mathbf{b}$. Por (68c), el k-ésimo vector columna de la matriz $\mathbf{c}$

$$\mathbf{C}_k = (c_{1k}, c_{2k}, \ldots, c_{nk})$$

tiene los elementos c_{jk} que son formas lineales en el k-ésimo vector columna $\mathbf{B}_k$ de la matriz $\mathbf{b}$. Se concluye que $\det(\mathbf{c})$ es una forma lineal en el vector $\mathbf{B}_k$ cuando se mantienen fijas las otras columnas de $\mathbf{b}$. También resulta evidente que intercambiar dos columnas de $\mathbf{b}$ corresponde exactamente a intercambiar las columnas correspondientes de $\mathbf{c}$. De aquí que $\det(\mathbf{c})$ es una forma multilineal alternante en los vectores columna de la matriz $\mathbf{b}$. Por consiguiente (ver la p. 209).

$$\det(\mathbf{c}) = \gamma \det(\mathbf{b}),$$

donde γ es el valor de $\det(\mathbf{c})$ para el caso en el que

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{E}_1, \mathbf{B}_2 = \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{B}_n = \mathbf{E}_n,$$

o bien, donde $\mathbf{b}$ es la matriz unidad $\mathbf{e}$. Ahora bien, si $\mathbf{b} = \mathbf{e}$, entonces obviamente $\mathbf{c} = \mathbf{ab} = \mathbf{ae} = \mathbf{a}$, y, como consecuencia, $\gamma = \det(\mathbf{a})$. Esto prueba (68a).

En la p. 157 se definió la transpuesta $\mathbf{a}^T$ de la matriz $\mathbf{a}$ como la matriz obtenida a partir de $\mathbf{a}$ intercambiando filas y columnas. Se tiene entonces el sorprendente hecho de que una matriz cuadrada y su transpuesta tienen el mismo determinante:

(68d) $$\det(\mathbf{a}^T) = \det(\mathbf{a})$$

o bien,

(68e) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Para $n = 2,3$ fácilmente se verifica esta identidad a partir de las expresiones explícitas (51a), (52a), pp. 161-2. Para n general solamente se indicará la demostración, la cual puede basarse en la fórmula del desarrollo (66a) para det(a). En cada término de la suma con coeficiente que no se anule, pueden reacomodarse los factores de acuerdo con los primeros subíndices de modo que

$$a_{j_1 1}a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = a_{1k_1}a_{2k_2} \cdots a_{nk_n},$$

donde $k_1, k_2, \ldots, k_n$ forman nuevamente una permutación de los números $1, 2, \ldots, n$.[1] Fácilmente se demuestra que

$$\varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} = \varepsilon_{k_1 k_2 \cdots k_n}$$

(ésto se deja como un ejercicio para el lector). Por tanto,

$$\det(\mathbf{a}) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{n} \varepsilon_{k_1 k_2 \cdots k_n} a_{1k_1}a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} = \det(\mathbf{a}^T).$$

Una consecuencia inmediata de la fórmula (68d) es que un determinante puede considerarse como una función multilineal alternante de sus vectores fila. En particular, *un determinante cambia de signo si se intercambian dos filas cualesquiera.*

[1] Mirando a $j_1, j_2, \ldots, j_n$ como una función que aplica al conjunto $1, 2, \ldots, n$ sobre sí mismo, se tiene en $k_1, k_2, \ldots, k_n$ precisamente la función inversa; es decir, la ecuación $j_r = s$ es equivalente a $k_s = r$.

La regla de multiplicación (68a) afirma que *el producto de los determinantes de dos matrices cuadradas* **a**, **b** *es igual al determinante de la matriz* **ab** *cuyos elementos son los productos escalares de los vectores fila de* **a** *con los vectores columna de* **b**. Se hace uso ahora del hecho de que el determinante de una matriz **a** es igual al determinante de su transpuesta $\mathbf{a}^T$, la cual se obtiene intercambiando las filas y columnas de **a**. Entonces se deduce que

$$\det(\mathbf{a}) \cdot \det(\mathbf{b}) = \det(\mathbf{a}^T) \cdot \det(\mathbf{b}) = \det(\mathbf{a}^T\mathbf{b}).$$

De donde, *el producto de los determinantes de las matrices* **a** *y* **b** *también es igual al determinante de la matriz* $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$, *obtenida formando los productos escalares de las columnas de* **a** *con las columnas de* **b**. Si

$$\mathbf{a} = (\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{b} = (\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n),$$

se obtiene la identidad

$$\text{(68f)} \quad \det(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) \cdot \det(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_2 & \ldots & \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_n \\ \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_2 & \ldots & \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{B}_2 & \ldots & \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{B}_n \end{vmatrix}$$

Una aplicación simple de estas reglas a las *matrices ortogonales* **a**, para las cuales [ver la fórmula (49), p. 194] $\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a}^T$ o bien, $\mathbf{a}^T\mathbf{a} = \mathbf{e}$, da

$$\det(\mathbf{a}^T\mathbf{a}) = \det(\mathbf{a}^T) \cdot \det(\mathbf{a}) = [\det(\mathbf{a})]^2 = \det(\mathbf{e}) = 1.$$

Consecuentemente, *el determinante de una matriz ortogonal sólo puede tener los valores* $+1$ o -1. En la p. 245 se dará la interpretación geométrica de este resultado.

e. Aplicación de los determinantes a los sistemas de ecuaciones lineales

Los determinantes proporcionan una herramienta conveniente para decidir cuándo n vectores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ en el espacio n dimensional son dependientes o, lo que es equivalente, cuándo la matriz cuadrada **a** con columnas $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ es singular.

La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada sea singular es que su determinante se anule.

Sea, en efecto, **a** singular. Entonces los vectores columna $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ son dependientes. Por tanto, uno de los vectores columna, digamos $\mathbf{A}_1$ es dependiente de los otros:

$$\mathbf{A}_1 = \lambda_2\mathbf{A}_2 + \lambda_3\mathbf{A}_3 + \cdots + \lambda_n\mathbf{A}_n.$$

De la multilinealidad de los determinantes se concluye que

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{a}) &= \det(\lambda_2\mathbf{A}_2 + \lambda_3\mathbf{A}_3 \cdots + \lambda_n\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots, \mathbf{A}_n)\\ &= \lambda_2\det(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots, \mathbf{A}_n) + \lambda_3 \det(\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_n),\\ &\quad + \cdots + \lambda_n \det(\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots, \mathbf{A}_n)\\ &= 0,\end{aligned}$$

ya que cada una de las matrices tiene una columna repetida.[1]

Inversamente, si **a** es no singular, existe (ver la p. 191) una recíproca $\mathbf{b} = \mathbf{a}^{-1}$ de **a**:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{e},$$

donde **e** es la matriz unidad. Por la regla de multiplicación para los determinantes, se deduce que

$$\det(\mathbf{a}) \cdot \det(\mathbf{b}) = \det(\mathbf{e}) = 1$$

y, por tanto, $\det(\mathbf{a}) \neq 0$. Esto prueba que **a** es singular si y sólo si $\det(\mathbf{a}) = 0$.

Considérese ahora el sistema de ecuaciones lineales

[1] Más generalmente, este argumento demuestra que una forma multilineal alternante en m vectores en el espacio n dimensional se anula idénticamente para $m > n$, dado que entonces los vectores son necesariamente dependientes.

$$\text{(69a)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

correspondiente a la matriz **a**. Siguiendo la discusión de la p. 185 tienen que distinguirse los dos casos: (1) det (**a**) $\neq 0$ y (2) det (**a**) $= 0$. En el caso (1), las ecuaciones (69a) tienen una solución única para cada $y_1, \ldots, y_n$. En el caso (2), no siempre existe una solución y nunca es única. Ahora no sólo tenemos una prueba explícita para distinguir entre los dos casos con la ayuda de los determinantes, sino que también encontraremos los medios para calcular la solución en el caso (1). Introduciendo el vector

$$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n),$$

puede escribirse el sistema (69a) en la forma

$$\text{(69b)} \qquad x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{Y},$$

donde los $\mathbf{A}_k$ son los vectores columna de la matriz **a**. Entonces,

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{Y}, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots, \mathbf{A}_n) \\ &= \det(x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots, \mathbf{A}_n) \\ &= x_1 \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots, \mathbf{A}_n) + x_2 \det(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots, \mathbf{A}_n) \\ &\qquad + x_3 \det(\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots, \mathbf{A}_n) + \cdots \\ &\qquad + x_n \det(\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_2\ \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n) \\ &= x_1 \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n) \end{aligned}$$

y, de modo semejante,

$$\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{Y}, \mathbf{A}_3, \ldots, \mathbf{A}_n) = x_2 \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n),$$

y así sucesivamente. Si la matriz **a** es no singular, puede dividirse entre su determinante y obtener la solución $x_1, x_2, \ldots, x_n$ expresada *por medio de determinantes:*

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{Y}, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)}{\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)}, \qquad x_2 = \frac{\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{Y}, \ldots, \mathbf{A}_n)}{\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)},$$

$$\ldots, x_n = \frac{\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{Y})}{\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)}.$$

Este es la *regla de Cramer* para la solución de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

Ejercicios 2.3

1. Evaluar los determinantes siguientes:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix}$

2. Encontrar la relación que debe existir entre a, b, c con el fin de que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 5z &= a \\ 4x + 5y + 6z &= b \\ 5x + 6y + 7z &= c \end{aligned}$$

pueda tener una solución.

3. (a) Verificar que el determinante de la matriz unidad es 1.
(b) Demostrar que si **a** es no singular, entonces $\det(\mathbf{a}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{a})$.

4. Obtener los valores de

(a) ε_{321}, (b) ε_{2143}, (c) ε_{4231}, (d) ε_{54321}

5. Demostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

siempre puede reducirse a la forma

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}$$

simplemente por medio de la aplicación repetida de los procesos siguientes: (1) intercambiar dos filas o dos columnas y (2) sumar un múltiplo de una de las filas (o columnas) a otra fila (o columna).

Una matriz es diagonal si $a_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$. Demostrar que el determinante de la matriz diagonal (a_{ij}) de $n \times n$ es el producto $a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$.

La matriz (a_{ij}) *es triangular superior si* $a_{ij} = 0$ siempre que $j < i$. Demostrar que

$$\det(a_{ij}) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Evaluar

(a)
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

(b)
$$\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 2! & 3! & 4! \\ 3! & 4! & 5! \end{vmatrix}$$

(c)
$$\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! & 4! \\ 2! & 3! & 4! & 5! \\ 3! & 4! & 5! & 6! \\ 4! & 5! & 6! & 7! \end{vmatrix}$$

Resolver las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 4 \\ 4x - 9y + 16z &= 10 \\ 8x - 27y + 64z &= 34. \end{aligned}$$

Probar la identidad

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$$

formando el producto de los determinantes

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} c & d \\ -d & c \end{vmatrix}$$

11. Si $A = x^2 + y^2 + z^2$, $B = xy + yz + zx$, demostrar que

$$D = \begin{vmatrix} B & A & B \\ B & B & A \\ A & B & B \end{vmatrix} = (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)^2.$$

12. Demostrar que

$$\Delta = \begin{vmatrix} t_1 + x & a + x & a + x & a + x \\ b + x & t_2 + x & a + x & a + x \\ b + x & b + x & t_3 + x & a + x \\ b + x & b + x & b + x & t_4 + x \end{vmatrix}$$

es de la forma $A + Bx$, donde A y B son independientes de x. Dando valores particulares a x probar que

$$A = \frac{af(\mathrm{b}) - bf(a)}{a - b}, \qquad B = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

donde

$$f(t) = (t_1 - t)\,(t_2 - t)\,(t_3 - t)\,(t_4 - t).$$

13. Probar que cualquier forma bilineal f en **A** y **B** puede escribirse

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{cB}) = (\mathbf{c}^T\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$$

14. Probar que en una transformación afín no singular la imagen de una cuádrica

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

es otra cuádrica.

15. Si los tres determinantes

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

no se anulan todos, entonces probar que la condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución de las tres ecuaciones

$$a_1x + a_2y = d$$
$$b_1x + b_2y = e$$
$$c_1x + c_2y = f$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & d \\ b_1 & b_2 & e \\ c_1 & c_2 & f \end{vmatrix} = 0.$$

16. Enunciar la condición para que las dos rectas $x = a_1t + b_1$, $y = a_2t + b_2$, $z = a_3t + b_3$ y $x = c_1t + d_1$, $y = c_2t + d_2$, $z = c_3t + d_3$ se intersecten o sean paralelas.

17. Probar (68d), verificando que no importa si los factores en cada término *del desarrollo (66a) están ordenados por sus índices primero o segundo,* o sea, con

$$a_{j_1 1}\, a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = a_{1k_1}\, a_{2k_2} \cdots a_{nk_n},$$

obtener que

$$\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \varepsilon_{k_1 k_2 \ldots k_n}.$$

18. Probar que la transformación afín

$$x' = ax + by + cz$$
$$y' = dx + ey + fz$$
$$z' = gx + hy + kz$$

deja por lo menos una dirección inalterada.

2.4 Interpretación geométrica de los determinantes

a. *Productos vectoriales y volúmenes de paralelepípedos en el espacio tridimensional*

En el Volumen I (p. 388) se definió el "producto cruz" de dos vectores $\mathbf{A} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{B} = (b_1, b_2)$ en el plano como el escalar

(70a) $$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Aquí $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ representa el doble del área del triángulo con vértices P_0, P_1, P_2, donde $\mathbf{A} = \overrightarrow{P_0P_1}$, $\mathbf{B} = \overrightarrow{P_0P_2}$. A $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ se le da el nombre de área del paralelogramo *definido* por los vectores **A**, **B**, es decir, del paralelogramo con vértices sucesivos P_0, P_1, Q, P_2. El signo de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ determina la orientación del paralelogramo.[1] En notación de determinantes el producto cruz toma la forma

[1] Se tiene $\mathbf{A} \times \mathbf{B} > 0$ si el sentido (en el mismo o en el contrario al movimiento de las manecillas del reloj) en el que se siguen los vértices sucesivamente es el mismo que el del "cuadrado coordenado" con vértices sucesivos (0, 0), (1, 0), (1, 1,), (0, 1).

(70b)
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \det(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

Por tanto, $|\det(\mathbf{A}, \mathbf{B})|$ puede interpretarse geométricamente como el área del paralelogramo definido por los vectores **A, B.** Se encontrarán interpretaciones análogas para los determinantes de orden superior.

Para los tres vectores $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{C} = (c_1, c_2, c_3)$ en el espacio tridimensional, resulta natural formar el determinante

$$\det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Escrito como una forma lineal en el vector **C** se tiene, por (52a),

(71a)
$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 \\ &= \mathbf{Z} \cdot \mathbf{C}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{Z} = (z_1, z_2, z_3)$ es el vector con componentes

(71b)
$$z_1 = a_2b_3 - a_3b_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},$$

$$z_2 = a_3b_1 - a_1b_3 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix},$$

$$z_3 = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Al vector **Z** se le da el nombre de "producto vectorial" o "producto cruz" de los vectores **A, B** y se escribe $Z = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$.[1] Entonces, por definición,

(71c)
$$\det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}.$$

[1]El producto vectorial de dos vectores en tres dimensiones es nuevamente un *vector*, en contraste con los productos cruz de los vectores en dos dimensiones y los productos escalares en cualquier número de dimensiones, los cuales son *escalares*.

Debido a esta fórmula, a veces se da el nombre de *triple producto vectorial* de **A**, **B**, **C** al escalar det(**A**, **B**, **C**).

Las componentes z_i del vector $\mathbf{Z} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ son a su vez determinantes de segundo orden y, por tanto, son formas bilineales alternantes de los vectores **A**, **B**. Esto conduce inmediatamente a las leyes para la multiplicación de vectores:

(72a) $$(\lambda\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (\lambda\mathbf{B}) = \lambda(\mathbf{A} \times \mathbf{B});$$

(72b) $$(\mathbf{A}' + \mathbf{A}'') \times \mathbf{B} = \mathbf{A}' \times \mathbf{B} + \mathbf{A}'' \times \mathbf{B};$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B}' + \mathbf{B}'') = \mathbf{A} \times \mathbf{B}' + \mathbf{A} \times \mathbf{B}'';$$

(72c) $$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}.$$

La relación (72c) podría llamarse la ley "anticonmutativa" de la multiplicación. Esta ley tiene la importante consecuencia de que

(72d) $$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0 \quad \text{para todos los vectores } \mathbf{A}.$$

Con más generalidad, *el producto vectorial de dos vectores* **A**, **B** *se anula si y sólo si* **A** *y* **B** *son dependientes.* Porque, por (71c), la relación $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ es equivalente a

$$\det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = 0 \quad \text{para todos los vectores } \mathbf{C},$$

o bien, al hecho (ver la p. 214) de que **A**, **B**, **C** son dependientes para todo **C**. Ahora bien, siempre puede hallarse un vector **C** que sea independiente de **A** y **B** (ver la p. 173). Entonces, la dependencia de **A**, **B**, **C** implica que **A** y **B** son dependientes.

El producto vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es perpendicular tanto al vector **A** como al **B**, ya que por (71c),

(72e) $$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A}) = 0, \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} = \det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{B}) = 0.$$

De aquí que, para $\mathbf{A} = \overrightarrow{P_0P_1}$ y $\mathbf{B} = \overrightarrow{P_0P_2}$ independientes, la dirección de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es una de las dos direcciones perpendiculares a cualquier plano $P_0P_1P_2$ definido por **A** y **B**. La longitud del vector $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ también tiene una interpretación geométrica sencilla. Por (71b), se tiene

(72f) $$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = (a_2b_3 - {}_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$
$$- (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$
$$= |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2.$$ [1]

Usando el hecho [fórmula (14), p. 131] de que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \cos\gamma,$$

donde γ es el ángulo entre las direcciones de **A** y **B**, de (72f) se encuentra que

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2\cos^2\gamma} = |\mathbf{A}|\mathbf{B}|\operatorname{sen}\gamma$$

Para $\mathbf{A} = \overrightarrow{P_0P_1}$, $\mathbf{B} = \overrightarrow{P_0P_2}$ en $|\mathbf{B}|\operatorname{sen}\gamma$ (donde a γ se le asigna un valor entre 0 y π) se tiene la distancia de la recta P_0P_1 al punto P_2 (Fig. 2.6). De aquí que (exactamente como en dos dimensiones), la cantidad $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ da el área del paralelogramo con vértices P_0, P_1, Q, P_2 "definido" por los vectores **A**, **B**, o el doble del área del triángulo con vértices P_0, P_1, P_2.

Las componentes individuales del producto $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (z_1, z_2, z_3)$ también pueden interpretarse geométricamente. Por ejemplo, la expresión

$$z_3 = a_1b_2 - a_2b_1$$

es precisamente el producto cruz de los vectores bidimensionales (a_1, a_2) y (b_1, b_2) [ver (70a)]. Si P_0 tiene las coordenadas ξ_1, ξ_2, ξ_3, en $|z_3|$ se tiene el área del paralelogramo en el plano x_1, x_2 con vértices (ξ_1, ξ_2), $(\xi_1 + a_1, \xi_2 + a_2)$, $(\xi_1 + a_1 + b_1, \xi_2 + a_2 + b_2)$, $(\xi_1 + b_1, \xi_2 + b_2)$. Este paralelogramo es precisamente la proyección sobre el plano x_1, x_2 del paralelogramo con vértices P_0, P_1, Q, P_2, definido en el espacio por los vectores **A**, **B** (ver la Fig. 2.7). Si $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ tiene los cosenos directores $\cos\beta_1$, $\cos\beta_2$, $\cos\beta_3$, se tiene [ver (9), p. 162]

$$|z_3| = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|\,|\cos\beta_3|.$$

[1] Esta identidad incidentalmente proporciona una demostración inmediata de la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| \leqq |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$$

(ver la p. 166). También suministra la información adicional de que el signo de igualdad se cumple si y sólo si los vectores **A** y **B** son dependientes.

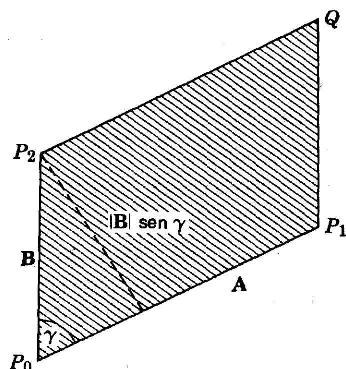


Figura 2.6 Area $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ del paralelogramo generado por los dos vectores **A**, **B** .

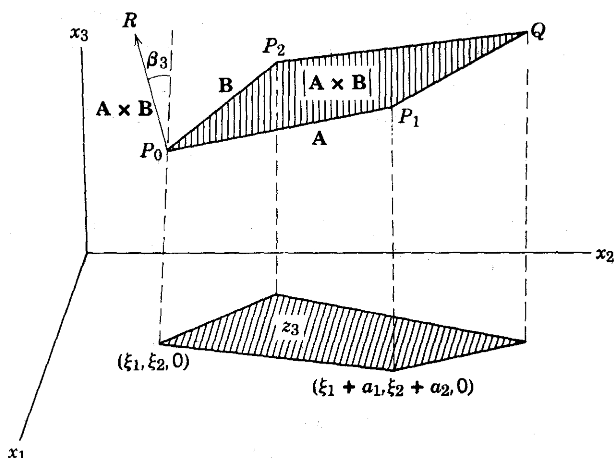


Figura 2.7 Componentes del producto vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (z_1, z_2, z_3)$interpretadas como áreas proyectadas.

Por tanto, $|\cos \beta_3|$ da la razón del área del paralelogramo definido por **A** y **B** al área de su proyección sobre el plano x_1, x_2. Aquí β_3 es *el ángulo entre la normal al plano que pasa por* P_0, P_1, P_2 y el eje x_3. Por supuesto, éste es el mismo ángulo que se encuentra entre el plano que contiene al paralelogramo definido por **A** y **B** y el plano x_1, x_2.[1]

[1]En general, el área de la proyección de una figura plana sobre un segundo plano es igual al producto del área de la figura original por el coseno del ángulo entre los dos planos, lo que se aclarará cuando se discutan las transformaciones de las integrales.

Si $\mathbf{A} = \overrightarrow{P_0P_1}$ y $\mathbf{B} = \overrightarrow{P_0P_2}$ son vectores independientes, se tiene $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \overrightarrow{P_0R}$, donde el punto R se encuentra sobre la recta que pasa por P_0 perpendicular al plano $P_0P_1P_2$ y a una distancia de P_0 igual al doble del área del triángulo $P_0P_1P_2$. Esto fija a R casi de modo único. Sólo existen dos puntos con estas propiedades, que se encuentran en lados opuestos del plano. Puede decidirse cuál de estos puntos es el punto final R del vector $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \overrightarrow{P_0R}$ por medio del siguiente argumento de "continuidad". El producto vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ depende continuamente de los vectores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, ya que sus componentes son funciones bilineales de las de $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$. Entonces la dirección de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ también depende continuamente de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, con tal que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, es decir, con tal que se evite que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se hagan $\mathbf{0}$ o queden paralelos. Siempre pueden cambiarse los dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ continuamente, de tal manera que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ nunca sean $\mathbf{0}$ o queden paralelos hasta que, por último, $\mathbf{A}$ coincida con el vector coordenado $\mathbf{E}_1 = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{B}$ con el vector $\mathbf{E}_2 = (0, 1, 0)$. Esto equivale a deformar el triángulo $P_0P_1P_2$ continuamente y sin degeneración, de modo que P_0 vaya hacia el origen y P_1, P_2 queden, respectivamente, sobre los ejes positivos x_1 y x_2 a la distancia 1 del origen. En el proceso, el punto R sobre la recta que pasa por P_0 perpendicular al plano $P_0P_1P_2$ nunca cruza ese plano. Ahora bien, por (71b),

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 = (0, 0, 1) = \mathbf{E}_3$$

En un sistema coordenado "derecho", el tipo que comúnmente se usa, la dirección de E_3 se fija sin ambigüedad como normal a $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$, en tal forma que la rotación de 90° alrededor del eje x_3 que lleva $\mathbf{E}_1$ hacia $\mathbf{E}_2$ se ve como *en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj* desde el punto (0,0,1). Entonces, generalmente, si el sistema coordenado es derecho la dirección de $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \overrightarrow{P_0R}$ es tal que la rotación alrededor de la recta $\overrightarrow{P_0R}$ del vector $\mathbf{A} = \overrightarrow{P_0P_1}$ hacia el vector $\mathbf{B} = \overrightarrow{P_0P_2}$ en un ángulo γ entre 0 y π se ve como en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj cuando se observa desde R (ver la Fig. 2.8). De modo semejante, en un sistema coordenado izquierdo la rotación por 90° de $\mathbf{E}_1$ hacia $\mathbf{E}_2$ se ve como si fuera en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj observada desde (0, 0, 1), y lo mismo acontece entonces con la

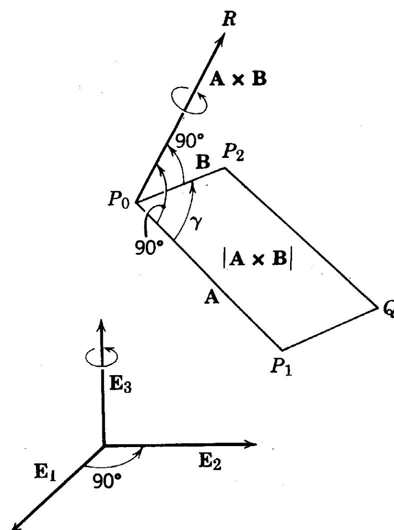


Figura 2.8 Producto vectorial A × B en un sistema coordenado derecho.

rotación de **A** hacia **B**, observada desde el punto final R de $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \overrightarrow{P_0R}$.

Generalmente, una terna ordenada de tres vectores independientes **A**, **B**, **C** define un cierto *sentido* u *orientación*. Si $\mathbf{A} = \overrightarrow{P_0P_1}$, $\mathbf{B} = \overrightarrow{P_0P_2}$, y $\mathbf{C} = \overrightarrow{P_0P_3}$, puede girarse la dirección de **A** hacia **B** en un ángulo entre 0 y π en el plano $P_0P_1P_2$. Por definición, el sentido de la terna **A**, **B**, **C** es el que parece tener (en sentido contrario o en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj) esa rotación, cuando se observa desde el lado del plano hacia el cual apunta **C**.[1] La terna **B**, **A**, **C** tiene la orientación *opuesta. La orientación de la terna* **A**, **B**, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *siempre es la misma que la de los vectores coordenados* $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$.

Se dice que la terna **A**, **B**, **C** está orientada positivamente con respecto al sistema coordenado x_1, x_2, x_3 si tiene la misma orientación

[1]El mismo tipo de orientación determina la diferencia entre los tornillos izquierdos y derechos. El movimiento de un tornillo consiste de una combinación de un movimiento de traslación a lo largo de un eje y de uno de rotación alrededor de ese eje. La distinción entre los dos tipos de tornillos se define por el sentido de la rotación, en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj o contrario a él, cuando se observa desde esa dirección del eje en la cual avanza la traslación.

que la de la terna de vectores $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$, y que está orientada negativamente si tiene la orientación opuesta. *Para que la terna* **A, B, C** *esté orientada positivamente con respecto a las coordenadas* x_1, x_2, x_3, *es necesario y suficiente que*

$$\det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) > 0 \tag{73}$$

Porque, sea $\mathbf{A} = \overrightarrow{P_0P_1}$, $\mathbf{B} = \overrightarrow{P_0P_1}$, $\mathbf{C} = \overrightarrow{P_0P_3}$. la relación (73) significa que

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} > 0,$$

es decir, que las direcciones de los vectores $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ forman un ángulo agudo. Como $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es normal al plano $P_0P_1P_2$, ésto implica que el vector $\overrightarrow{P_0P_3}$ apunta hacia el mismo lado del plano que el vector $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. De aquí que **A, B, C** y **A, B,** $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ tienen la misma orientación, que es la de $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$.

Los tres vectores independientes **A, B, C,** cuando se les da el mismo punto inicial $\mathbf{P}_0$ "definen" o "generan" un cierto paralelepípedo, a saber, el que tiene los puntos finales P_1, P_2, P_3 de **A, B, C** como vértices adyacentes al vértice P_0. Se dice que el paralelepípedo está orientado positiva o negativamente con respecto al sistema coordenado x_1, x_2, x_3 según sea la orientación de la terna **A, B, C.** Un intercambio de dos cualesquiera de los vectores **A, B, C** invierte la orientación para el paralelepípedo generado por los vectores.[1]

Sea θ el ángulo formado por la dirección de los vectores **C** y $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Por (71c),

$$\det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|\,|\mathbf{C}| \quad \cos\theta \tag{74a}$$

[1] La orientación del paralelepípedo puede imaginarse como una orientación atribuída a cada cara del paralelepípedo (es decir, como un sentido asignado al polígono frontera de la cara) de manera tal que a una arista común de dos caras vecinas se le asignan sentidos opuestos en la orientación de las dos caras. La orientación de todas las caras queda determinada de manera única si se prescribe el sentido de una de las aristas para una sola cara. Para la orientación del paralelepípedo generado por **A, B, C,** el sentido de la arista P_0P_1 en la cara definida por los vectores $\overrightarrow{P_0P_2}$ y $\overrightarrow{P_0P_1}$ es el que va de P_0 hacia P_1 (ver la Fig. 2.9).

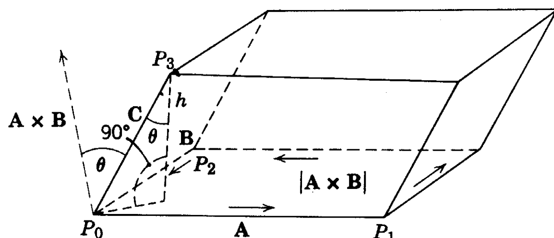


Figura 2.9 Volumen $V = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|h$ del paralelepípedo.

Como $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es perpendicular al plano $P_0P_1P_2$, el ángulo entre la recta P_0P_3 y el plano $P_0P_1P_2$ es $\frac{1}{2}\pi - \theta$. De donde,

$$(74\text{b}) \qquad h = |\mathbf{C}|\,|\cos\theta| = |\mathbf{C}|\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right|$$

es la distancia del plano $P_0P_1P_2$, al punto P_3 es decir, la *altura* del paralelepípedo desde P_3. Dado que el volumen V del paralelepípedo es igual al área $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ de una de las caras multiplicada por la altura correspondiente h, de (74a, b) se concluye que

$$(74\text{c}) \qquad V = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|h = |\det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})|.$$

O sea, *el volumen de un paralelepípedo generado por los tres vectores* **A**, **B**, **C** *es el valor absoluto del determinante de la matriz con columnas* **A**, **B**, **C**. Por lo tanto, el valor de det(**A**, **B**, **C**) determina tanto el volumen como la orientación del paralelepípedo generado por **A**, **B**, **C**. Este hecho se expresa por medio de la fórmula

$$(74) \qquad \det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \varepsilon V,$$

donde V es el volumen del paralelepípedo generado por los vectores **A**, **B**, **C**; $\varepsilon = +1$ si el paralelepípedo está orientado positivamente con respecto a las coordenadas $x_1, x_2 x_3$, y $\varepsilon = -1$ si está orientado negativamente.

b. Desarrollo de un determinante respecto a una columna. Productos vectoriales en dimensiones superiores

Sólo en tres dimensiones puede definirse un producto $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ de

dos vectores **A**, **B** que dé nuevamente un vector.[1] El análogo más aproximado en n dimensiones sería un "producto vectorial" de $n - 1$ vectores. Tomando n vectores,

$$\mathbf{A}_1 = (a_{11}, \ldots, a_{n1}), \ldots, \mathbf{A}_n = (a_{1n}, \ldots, a_{nn})$$

en el espacio n dimensional, puede formarse el determinante de la matriz $(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n)$ con esos vectores como columnas. El determinante de esta matriz es una forma lineal en el último vector $\mathbf{A}_n$ y puede escribirse como un producto escalar

$$(75) \qquad \det(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) = z_1a_1 + z_2a_2 + \cdots + z_na_n = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{A}_n,$$

donde el vector $\mathbf{Z} = (z_1, \ldots, z_n)$ sólo depende de los $n - 1$ vectores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$. Obviamente, **Z** es lineal en cada uno de los vectores $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$ por separado, y es alternante. A **Z** se le da el nombre de *producto vectorial* de $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$ y se denota por

$$(76) \qquad \mathbf{Z} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \cdots \times \mathbf{A}_{n-1}.$$

Por (75), es evidente que

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{A}_1 = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{A}_2 = \ldots = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{A}_{n-1} = 0;$$

se ve que *el producto vectorial de $n - 1$ vectores es ortogonal a cada uno de ellos,* como en tres dimensiones. La longitud del producto vectorial **Z** también puede interpretarse geométricamente como el volumen del paralelepípedo orientado $(n - 1)$ dimensional generado por los vectores $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$, como se verá posteriormente.

Precisamente como en tres dimensiones, las componentes de **Z** pueden escribirse como determinantes, en analogía con la fórmula (71b). Primero deduzcamos esa expresión como determinante para la componente z_n de **Z**. Por (75),

$$z_n = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{E}_n = \det(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{E}_n),$$

[1] En dimensiones superiores no es posible asociar con los dos vectores **A**, **B** un tercer vector **C** hacia afuera del plano generado por **A**, **B**, de una manera geométrica, es decir, mediante una construcción que determina a **C** de modo único y no cambia bajo los movimientos rígidos.

donde

$$\mathbf{E}_n = (0,0, \ldots, 0,1)$$

es el n-ésimo vector coordenado. Tomar $\mathbf{A}_n = \mathbf{E}_n$ en la fórmula general de desarrollo (66a), p. 209, para los determinantes equivale a remplazar el último factor $a_{j_n n}$ en cada término por 1, para $j_n = n$ y por 0, para $j_n \neq n$. Para $j_n = n$, el coeficiente $\varepsilon_{j_1 \ldots j_{n-1} j_n}$ se anula, a menos que $j_1, \ldots, j_{n-1}$ constituyan una permutación de los números1, 2, . . ., $n - 1$. En ese caso el coeficiente (65c, d) se reduce a

$$\begin{aligned}\varepsilon_{j_1 \ldots j_{n-1} j_n} = \varepsilon_{j_1 \ldots j_{n-1} n} &= \operatorname{sgn} \phi (j_1, \ldots, j_{-1}, n) \\ &= \operatorname{sgn} (n - j_{n-1}) \cdots (n - j_1) \phi (j_1, \ldots, j_{n-1}) \\ &= \operatorname{sgn} \phi (j_1, \ldots, j_{n-1}) = \varepsilon_{j_1 \ldots j_{n-1}}.\end{aligned}$$

De (66a) se deduce que

$$\text{(77a)} \qquad z_n = \sum_{j_1, \ldots, j_{n-1}=1}^{n-1} \varepsilon_{j_1 \cdots j_{n-1}} a_{j_1 1}\, a_{j_2 2} \cdots a_{j_{n-1} n-1}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\, n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\, n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1\, 1} & a_{n-1\, 2} & \ldots & a_{n-1\, n-1} \end{vmatrix}.$$

Se ve que z_n es igual al determinante de la matriz obtenida a partir de la matriz $(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n)$ omitiendo la última fila y la última columna. Generalmente, se define un *menor* de una matriz **a** como el determinante de una matriz cuadrada obtenida a partir de **a** omitiendo algunas de las filas y columnas, mientras que se conservan las posiciones relativas de los elementos restantes. El menor *complementario a un elemento* a_{jk} de una matriz cuadrada **a** es el que se obtiene a partir de **a** omitiendo la fila y la columna que contienen al elemento a_{jk}. *Por tanto,* z_n *es igual al menor complementario a* a_{nn}.

Las otras componentes del vector **Z** tienen representaciones semejantes. Por ejemplo, por (75), se tiene

$$z_{n-1} = \det(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{E}_{n-1}).$$

Con el fin de evaluar este determinante se intercambian las dos últimas filas (ver la p. 212) lo cual cambia el signo del mismo. Entonces la última columna E_{n-1} pasa hacia E_n y, a partir del resultado anterior, se encuentra que $-z_{n-1}$ es igual al determinante que se obtiene omitiendo la última fila y la última columna de la nueva matriz o, lo que es equivalente, es igual al menor complementario al elemento $a_{n-1\,n}$ en la matriz original. De modo semejante se encuentra que $\pm z_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$ es igual al menor complementario al elemento a_{in}, donde el signo positivo se aplica para $n - i$ par y el negativo para $n - i$ impar.

Por tanto, la fórmula (75) constituye un desarrollo de un determinante de n-ésimo orden en términos de determinantes de $(n - 1)$-ésimo orden, los menores complementarios a los elementos de la última columna. Por ejemplo, para $n = 4$ se tiene la fórmula

(77b)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$= -a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} + a_{24}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$
$$-a_{34}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} + a_{44}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Intercambiando las columnas se pueden deducir fórmulas semejantes para desarrollar un determinante en términos de los menores complementarios a los elementos de cualquier columna dada. Los desarrollos de este tipo juegan un papel en muchas demostraciones basadas en la inducción sobre la dimensión del espacio, como se verá posteriormente en las secciones que siguen.

c. Areas de paralelogramos y volúmenes de paralelepípedos en dimensiones superiores

Las superficies en el espacio se pueden construir a partir de paralelogramos infinitesimales. Por consiguiente, las fórmulas para

las áreas de superficies curvas y para las integrales sobre superficies requieren el conocimiento de una expresión para el área de un paralelogramo en el espacio. De modo semejante, las fórmulas para los volúmenes o las integrales de volumen sobre variedades curvas se tienen que basar en expresiones para volúmenes de paralelepípedos en dimensiones superiores. Tales expresiones se deducen fácilmente con la máxima generalidad, con la ayuda de los determinantes.

La cantidad básica asociada con los vectores es el producto escalar de dos vectores

$$\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = (b_1, \ldots, b_n),$$

el cual en cualquier sistema coordenado cartesiano está dado por

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1 b_1 + \cdots a_n b_n.$$

Mientras que las componentes individuales a_j y b_k de **A** y **B** dependen del sistema coordenado cartesiano especial que se use, el producto escalar tiene un significado *geométrico* independiente:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \cos \gamma,$$

donde $|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{B}|$ son las longitudes de los vectores **A** y **B** y γ es el ángulo entre ellos. Se deduce que cualquier cantidad que se puede expresar en términos de productos escalares tiene un significado geométrico *invariante* y no depende del sistema coordenado cartesiano especial que se use.

La cantidad más sencilla expresable en términos de productos escalares es la distancia entre dos puntos P_0, P_1, que es la longitud del vector $\mathbf{A} = \overrightarrow{P_0P_1}$. El cuadrado de esa distancia está dado por

$$|\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}. \tag{78a}$$

Con los dos vectores **A, B** en el espacio n dimensional, puede asociarse *el área de un paralelogramo generado por los dos vectores* si se les da un punto inicial común P_0. Sea $\mathbf{A} = \overrightarrow{P_0P_1}$ y $\mathbf{B} = \overrightarrow{P_0P_2}$. Los vectores entonces generan un paralelogramo P_0, P_1, Q, P_2 que tiene a P_1 y P_2 como vértices adyacentes al vértice P_0. Por la geometría elemental, el área α del paralelogramo es igual al producto de los lados adyacentes multiplicado por el seno del ángulo γ que forman:

$$\begin{aligned}\alpha &= |A||B| \operatorname{sen} \gamma \\ &= \sqrt{|A|^2|B|^2 - |A|^2|B|^2 \cos^2 \gamma} \\ &= \sqrt{|A|^2|B|^2 - (A \cdot B)^2}\end{aligned}$$

como ya se encontró en la p. 222 para el caso especial $n = 3$. se puede escribir esta fórmula para el área α de manera más adecuada, en la forma de un determinante para el cuadrado de α:

$$\text{(78b)} \qquad \alpha^2 = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} & \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \end{vmatrix}$$

El determinante que aparece aquí a la derecha se llama *determinante de Gram* de los vectores **A, B** y se denota por $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Es evidente, con base en la deducción, que

$$\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \geqq 0$$

para todos los vectores **A, B,** y que sólo se cumple la igualdad si **A** y **B** son dependientes.[1]

Puede deducirse una expresión semejante para el cuadrado del volumen V de un paralelepípedo generado por los tres vectores **A, B, C** en el espacio n dimensional. Represéntense los vectores en la forma

$$\mathbf{A} = \overrightarrow{P_0P_1}, \qquad \mathbf{B} = \overrightarrow{P_0P_2}, \qquad \mathbf{C} = \overrightarrow{P_0P_3}$$

y considérese el paralelepípedo que tiene a P_1, P_2, P_3 como vértices adyacentes al vértice P_0. Su volumen V puede definirse como el producto del área α de una de sus caras multiplicado por la altura h correspondiente. Eligiendo como α el área del paralelogramo generado por los vectores **A** y **B**, tiene que tomarse como h la distancia del plano que pasa por P_0, P_1, P_2 al punto P_3. De donde,

$$V^2 = h^2\alpha^2 = h^2\Gamma(A,B) = h^2 \begin{vmatrix} A \cdot A & A \cdot B \\ B \cdot A & B \cdot B \end{vmatrix}.$$

[1] Es decir, si cualquiera de los vectores se anula ($|\mathbf{A}|$ o bien, $|\mathbf{B}| = 0$) o si son paralelos ($\operatorname{sen} \gamma = 0$).

Se interpreta h como la distancia "perpendicular" del plano $P_0 P_1 P_2$ a P_3, es decir, la longitud de ese vector $\mathbf{D} = \overrightarrow{PP_3}$ que es perpendicular al plano y tiene su punto inicial P en el plano. Para un punto P en el plano $P_0P_1P_2$ el vector $\overrightarrow{P_0P}$ debe ser dependiente de $\mathbf{A} = \overrightarrow{P_0P_1}$ y $\mathbf{B} = \overrightarrow{P_0P_2}$ (ver la p. 179)

$$\overrightarrow{P_0P} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}.$$

De aquí que el vector $\mathbf{D}$ tiene la forma

$$\mathbf{D} = \overrightarrow{PP_3} = \overrightarrow{P_0P_3} - \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{C} - \lambda\mathbf{A} - \mu\mathbf{B}$$

con las constantes λ, μ apropiadas. Si $\mathbf{D}$ tiene que ser perpendicular al plano generado por $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, se debe tener

(79a) $$\mathbf{A} \cdot \mathbf{D} = 0, \qquad \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} = 0.$$

Esto conduce a un sistema de ecuaciones lineales para determinar λ y μ:

(79b) $$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \lambda\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mu\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \qquad \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \lambda\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mu\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}.$$

El determinante de estas ecuaciones es precisamente el determinante de Gram $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Suponiendo que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son vectores independientes, se tiene $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \neq 0$. Entonces, existe una solución determinada de manera única λ, μ de las ecuaciones (79) y, de aquí, un vector único $\mathbf{D} = \overrightarrow{PP_3}$ perpendicular al plano $P_0P_1P_2$ y con punto inicial en ese plano. La longitud de ese vector es igual a la distancia h, de modo que, por (79a)

$$\begin{aligned} h^2 = |\mathbf{D}|^2 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} &= (\mathbf{C} - \lambda\mathbf{A} - \mu\mathbf{B}) \cdot \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} - \lambda\mathbf{A} \cdot \mathbf{D} - \mu\mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} - \lambda\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} - \mu\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Esto conduce a la expresión

(79c) $$V^2 = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} - \lambda\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} - \mu\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\, \Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B}).$$

Esta expresión para el cuadrado del volumen del paralelepípedo definido por **A,B,C** puede escribirse en forma más adecuada como el determinante de Gram formado a partir de los vectores **A,B,C:**

$$\text{(79d)} \qquad V^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} \\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} \\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{A} & \mathbf{C}\cdot\mathbf{B} & \mathbf{C}\cdot\mathbf{C} \end{vmatrix} = \Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}).$$

Con el fin de demostrar la identidad de las expresiones (79c) y 79d) para V^2, se hace uso del hecho de que el valor del determinante $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ no cambia si de la última columna se resta λ veces la primera columna y μ veces la segunda columna:

$$\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} - \lambda\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} - \mu\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} - \lambda\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} - \mu\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} \\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{A} & \mathbf{C}\cdot\mathbf{B} & \mathbf{C}\cdot\mathbf{C} - \lambda\mathbf{C}\cdot\mathbf{A} - \mu\mathbf{C}\cdot\mathbf{B} \end{vmatrix}.$$

De (79b) se deduce que

$$\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{A} & \mathbf{C}\cdot\mathbf{B} & \mathbf{C}\cdot\mathbf{C} - \lambda\mathbf{C}\cdot\mathbf{A} - \mu\mathbf{C}\cdot\mathbf{B} \end{vmatrix}.$$

Desarrollando este determinante en términos de la última columna, se regresa inmediatamente a la expresión (79c).

La fórmula (79d) muestra que el volumen V del paralelepípedo generado por los vectores **A, B, C** no depende de la elección de la cara ni de la altura correspondiente usadas en el cálculo, porque el valor de $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ no cambia cuando se permutan **A, B, C**. Por ejemplo, puede obtenerse $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ intercambiando las dos primeras filas y, a continuación, las dos primeras columnas en el determinante para $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$.

La fórmula (79c) puede escribirse como

$$\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}) = |\mathbf{D}|^2 \Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B}).$$

Se deduce que

$$\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}) \geqq 0$$

para cualesquiera vectores **A**, **B**, **C**. Aquí sólo puede cumplirse el signo igual si $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0$ o bien, $\mathbf{D} = 0$. La relación $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0$ implicaría que **A** y **B** son dependientes. Si $\mathbf{D} = 0$, se tendría $\mathbf{C} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}$, de modo que **C** dependería de **A** y **B**. *De aquí que el determinante de Gram* $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ *se anula si y sólo si los vectores* **A,B,C** *son dependientes.*

Para $n = 3$, la fórmula (79d) se deduce inmediatamente a partir de la fórmula (74c) para el volumen V de un paralelepípedo orientado generado por los tres vectores **A,B,C** en el espacio tridimensional. Esta es una consecuencia de la identidad (68f), p. 213, de acuerdo con la cual

$$\det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}).$$

La expresión para V^2 como un determinante de Gram tiene la ventaja de mostrar que V es independiente del sistema coordenado cartesiano especial que se use, y de aquí que V tiene un significado geométrico.

Puede proseguirse hacia los "volúmenes" V de paralelepípedos tetradimensionales generados por cuatro vectores $\mathbf{A} = \overrightarrow{P_0P_1}$, $\mathbf{B} = \overrightarrow{P_0P_2}$, $\mathbf{C} = \overrightarrow{P_0P_3}$, $\mathbf{D} = \overrightarrow{P_0P_4}$ en el espacio n dimensional ($n \geqq 4$). Definiendo V como el volumen del paralelepípedo tridimensional generado por los tres vectores **A**, **B**, **C** multiplicado por la distancia del "plano" tridimensional que pasa por los puntos P_0, P_1, P_2, P_3 al punto P_4, se llega, exactamente a través de los mismos pasos anteriores, a una expresión para V^2 en la forma de un determinante de Gram:

$$V^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{D} \\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{D} \\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{A} & \mathbf{C}\cdot\mathbf{B} & \mathbf{C}\cdot\mathbf{C} & \mathbf{C}\cdot\mathbf{D} \\ \mathbf{D}\cdot\mathbf{A} & \mathbf{D}\cdot\mathbf{B} & \mathbf{D}\cdot\mathbf{C} & \mathbf{D}\cdot\mathbf{D} \end{vmatrix} = \Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) \tag{80a}$$

Si aquí $n = 4$, el determinante de Gram se convierte en el cuadrado del determinante de la matriz con columnas **A**, **B**, **C**, **D**, y se encuentra que

$$V = |\det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})|. \tag{80b}$$

Más generalmente, m vectores $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ en el espacio n dimensional, a los cuales se les asigna un punto inicial común P_0,

generan un paralelepípedo m dimensional. El cuadrado del volumen V de ese paralelepípedo está dado por el determinante de Gram

(81a) $$V^2 = \begin{vmatrix} A_1 \cdot A_1 & A_1 \cdot A_2 & \cdots & A_1 \cdot A_m \\ A_2 \cdot A_1 & A_2 \cdot A_2 & \cdots & A_2 \cdot A_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_m \cdot A_1 & A_m \cdot A_2 & \cdots & A_m \cdot A_m \end{vmatrix} = \Gamma(A_1, \ldots, A_m)$$

Si $m = n$ se obtiene, para el volumen del paralelepípedo generado por n vectores en el espacio n, la fórmula

(81b) $$V = |\det(A_1, \ldots, A_n)|.$$

Por inducción sobre m se prueba que

$$\Gamma(A_1, \ldots, A_m) \geqq 0,$$

donde la igualdad se cumple si y sólo si los vectores $A_1, \ldots, A_m$ son dependientes.[1]

d. Orientación de paralelepípedos en el espacio n dimensional

Posteriormente, en el Capítulo 5, cuando necesitemos un método consistente para fijar el signo de las integrales múltiples, tendremos que hacer uso de los volúmenes con signo y las orientaciones de los paralelepípedos en el espacio n dimensional.

Para el volumen definido por n vectores $A_1, \ldots, A_n$ en el espacio n dimensional se tiene, por (81b), la expresión

$$V = |\det A_1, \ldots, A_n)|.$$

$\det(A_1, \ldots, A_n)$ recibe el nombre de volumen en las coordenadas $(x_1 \cdots x_n)$ del paralelepípedo, *orientado* generado por $A_1, \ldots, A_n$. Se dice que el paralelepípedo, o que el conjunto de vectores $A_1, \ldots,$

[1] En el caso de los vectores dependientes $A_1, \ldots, A_m$ con punto inicial común P_0 el paralelepípedo generado por estos vectores "se contrae" hacia una variedad lineal de $m-1$ dimensiones o menos y tiene un volumen m dimensional igual a 0.

$\mathbf{A}_n$ esta orientado positivamente con respecto al sistema coordenado si $\det(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n)$ es positivo, negativamente si el determinante es negativo. Por tanto,

$$\det(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) = \varepsilon V, \tag{81c}$$

donde V es el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ y $\varepsilon = +1$ o bien, -1 de acuerdo con que el paralelepípedo esté orientado positiva o negativamente con respecto al sistema coordenado.

Mientras que el cuadrado de $\det(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n)$ tiene un significado geométrico independiente del sistema coordenado cartesiano, éste no es el caso para el signo del determinante. El intercambio, por ejemplo, de los ejes x_1 y x_2 conduce al intercambio de las dos primeras filas del determinante y, por tanto, a un cambio del signo en el $\det(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n)$. Sin embargo, lo que tiene un significado geométrico independiente es la afirmación de que *dos* paralelepípedos n dimensionales en el espacio n dimensional tienen la *misma* orientación u orientaciones *puestas*.

Considérense dos conjuntos ordenados de vectores $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$ en el espacio n dimensional, donde se supone que cada conjunto consiste de vectores independientes. Obviamente, los dos conjuntos tienen la misma orientación —es decir, ambos están orientados positivamente o ambos negativamente con respecto al sistema $x_1 \cdots x_n$ si y sólo si se satisface la condición

$$\det(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) \cdot \det(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n) > 0\,. \tag{82a}$$

Usando la identidad (68f), esta condición puede escribirse en la forma

$$[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n;\ \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n] > 0, \tag{82b}$$

donde el símbolo de la izquierda denota la función de $2n$ vectores definida por

$$(82c)\ [\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n; \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n] = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_n \\ \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{B}_n \end{vmatrix}$$

Nótese que para $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{B}_n = \mathbf{A}_n$, el símbolo $[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n; \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n]$ se reduce al determinante de Gram $\Gamma(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n)$. Las fórmulas (82b, c) hacen evidente que tener la misma orientación es una propiedad geométrica que no depende del sistema coordenado cartesiano específico que se use. Esta propiedad se denota simbólicamente por

$$(82d) \qquad \Omega(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) = \Omega(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n)$$

y la propiedad de tener la orientación opuesta[1] por

$$(82e) \qquad \Omega(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) = -\Omega(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n).$$

Entonces, generalmente, para dos conjuntos de n vectores independientes en el espacio n dimensional,

$$(82f) \quad \Omega(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n) = \operatorname{sgn}[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n; \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n]\Omega(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n).$$

[1] La orientación individual Ω de una n-ada de vectores no representa un "número" La fórmula (82f) sólo asocia un valor ± 1 con la razón de dos *orientaciones,* mientras que las fórmulas (82d, e) expresan la igualdad o la desigualdad de las orientaciones. Por supuesto, es posible describir las dos diferentes orientaciones posibles de las n-adas completamente por medio de valores numéricos, digamos, dando el valor $\Omega = +1$ a una de las orientaciones, el valor $\Omega = -1$ a la otra. No obstante, esto involucra la selección arbitraria de una "orientación estándar" que llamamos $+1$ — por ejemplo, la dada por los vectores coordenados —mientras que las relaciones (82d, e, f) tienen un significado independiente de cualquier valor numérico que se le asigne a Ω. Situaciones análogas son comunes en toda la extensión de las matemáticas. Por ejemplo, en la geometría euclidiana la igualdad de las distancias e incluso la razón de las distancias tienen un significado, aun cuando no se les asignan valores numéricos a las distancias (como en los *Elementos* de Euclides). Es cierto que las distancias pueden describirse por medio de números reales tales que la razón de las distancias es precisamente la de los números reales correspondientes. Esto requiere la selección arbitraria de una "distancia estándar" (por ejemplo, un metro), a la cual se refieren todas las demás distancias y, en consecuencia, en cierto sentido introduce un elemento "no geométrico".

El conjunto $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ está orientado positiva o negativamente con respecto a las coordenadas $x_1 \cdots x_n$ según que

(83a) $$\Omega(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) = \Omega(\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n)$$

o bien que

(83b) $$\Omega(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) = -\Omega(\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n),$$

donde $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n$ son los vectores coordenados. En ocasiones se denotará la orientación $\Omega(\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n)$ del sistema coordenado, por

$$\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Para dos conjuntos de n vectores en el espacio n dimensional, $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ y $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ se tiene, por (82c), (81b),

(84a) $$[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n; \mathbf{A}_1', \ldots, \mathbf{A}_n'] = \varepsilon\varepsilon' VV'$$

Aquí V y V' son, respectivamente, los volúmenes de los paralelepípedos generados por los dos conjuntos de vectores; los factores ε, ε' dependen de sus orientaciones y de la de los vectores coordenados:

(84b) $$\varepsilon = \operatorname{sgn}[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n; \mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n]$$

(84c) $$\varepsilon' = \operatorname{sgn}[\mathbf{A}_1', \ldots, \mathbf{A}_n'; \mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n].$$

El producto

(84d) $$\varepsilon\varepsilon' = \operatorname{sgn}[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n; \mathbf{A}_1', \ldots, \mathbf{A}_n']$$

es independiente de la elección del sistema coordenado y tiene el valor $+1$ si los paralelepípedos tienen la misma orientación, pero es -1 si sus orientaciones son opuestas.

Usando la definición en términos de productos escalares, se puede formar la expresión

(85a) $$[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m; \mathbf{A}_1', \ldots, \mathbf{A}_m']$$

$$
= \begin{vmatrix}
A_1 \cdot A_1' & A_1 \cdot A_2' & \cdots A_1 \cdot A_m' \\
A_2 \cdot A_1' & A_2 \cdot A_2' & \cdots A_2 \cdot A_m' \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
A_m \cdot A_1' & A_m \cdot A_2' & \cdots A_m \cdot A_m'
\end{vmatrix}
$$

para cualesquiera $2m$ vectores $A_1, \ldots, A_m'$ en el espacio n dimensional. Es evidente, a partir de la definición, que esta expresión es una forma multilineal en los $2m$ vectores. Por ejemplo, el vector A_1' sólo en la primera columna y los elementos de esa columna son formas lineales en A_1'. Dado que el determinante completo es una forma lineal en los elementos de la primera columna, se concluye que es una forma lineal en A_1'. También es evidente, de (85a), que la expresión es una función alternante de los vectores $A_1', \ldots, A_m'$ para $A_1, \ldots, A_m$ fijos, y una función alternante de $A_1, \ldots, A_m$ para $A_1', \ldots, A_m'$ fijos. Se concluye (ver la nota al pie de la p. 236) que

(85b) $$[A_1, \ldots, A_m; A_1', \ldots, A_m'] = 0$$

siempre que los m vectores $A_1, \ldots, A_m$ o los m vectores $A_1', \ldots, A_m'$ sean dependientes. En particular, (85b) siempre se cumple cuando $m > n$.

Supóngase entonces que $m \leqq n$ y que los vectores $A_1, \ldots, A_m$ y loa vectores $A_1', \ldots, A_m'$ son independientes. Puede suponerse que a todos estos vectores se les da el mismo punto inicial, digamos el origen 0 del espacio n dimensional. Entonces $A_1. \ldots, A_m$ generan una variedad lineal m dimensional, π que pasa por 0, y $A_1', \ldots, A_m'$ otro plano π' de este tipo. Introdúzcase un sistema ortonormal de vectores $E_1, \ldots, E_m$ como vectores coordenados en π y otro sistema ortonormal de vectores $E_1', \ldots, E_m'$ en π'.[1] Para $A_1, \ldots, A_m$ fijos, la función (85b) es una forma multilineal alternante en los vectores $A_1', \ldots, A_m'$ y, por tanto (ver la p. 185) está dada por

$$
\begin{aligned}
&[A_1, \ldots, A_m; A_1', \ldots, A_m'] \\
&= [A_1, \ldots, A_m; E_1', \ldots, E_m'] \det(A_1', \ldots, A_m'),
\end{aligned}
$$

[1]Estos dos sistemas de vectores coordenados en π y π' no tienen que estar relacionados entre sí de modo alguno, ni con el sistema coordenado al cual el espacio n dimensional completo que contiene a π y π' está referido.

donde $\det(\mathbf{A}_1', \ldots, \mathbf{A}_m')$es el determinante de la matriz formada por las componentes de los vectores $\mathbf{A}_1', \ldots, \mathbf{A}_m'$ referidas a $\mathbf{E}_1', \ldots, \mathbf{E}_m'$ como vectores coordenados. Obviamente, el propio coeficiente $[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m; \mathbf{E}_1', \ldots, \mathbf{E}_m']$ es una forma multilineal alternante en $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ y, por tanto, dada por

$$[\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_m; \mathbf{E}_1', \ldots, \mathbf{E}_m'] \det(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m),$$

donde el último determinante se forma a partir de la matriz de las componentes de $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ referidas a los vectores coordenados $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_m$.

Usando la fórmula (8¿c) se obtiene la identidad

(85c) $$[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m; \mathbf{A}_1', \ldots, \mathbf{A}_m'] = \mu\varepsilon\varepsilon' \, VV'.$$

Aquí V y V' son, respectivamente, los volúmenes de los paralelepípedos generados por los vectores $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ y $A_1', \ldots, A_m'$. Los factores ε, ε' establecen la relación entre las orientaciones de los paralelepípedos con las de los sistemas coordenados en π y π':

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} [\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m; \mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_m],$$

$$\varepsilon' = \operatorname{sgn} \mathbf{A}_1', \ldots, \mathbf{A}_m'; \mathbf{E}_1', \ldots, \mathbf{E}_m'].$$

Por último, el coeficiente

$$\mu = [\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_m; \mathbf{E}_1', \ldots, \mathbf{E}_m']$$

sólo depende de los espacios π y π' y de los sistemas coordenados elegidos en esos espacios. Si $\pi = \pi'$ puede elegirse

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_m' = \mathbf{E}_m;$$

en ese caso $\mu = 1$, como en la fórmula (84a).

Para $\mu \neq 0$, puede usarse la fórmula (85c) para establecer la relación entre orientaciones en dos variedades lineales m dimensionales distintas π y π' estando ambas en el mismo espacio n di-

mensional.[1] Remplazando, si es necesario, uno de los vectores coordenados por su opuesto, siempre puede lograrse que $\mu > 0$. Entonces, por (85c),

$$\text{(85d)} \qquad \operatorname{sgn}[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m; \mathbf{A}_1', \ldots, \mathbf{A}_m'] = \varepsilon\varepsilon'.$$

Así, la condición

$$[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m; \mathbf{A}_1', \ldots, \mathbf{A}_m'] > 0$$

para cualesquiera $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ en π y $\mathbf{A}_1', \ldots, \mathbf{A}_m'$ en π' significa que ambos conjuntos de vectores están orientados positivamente o que ambos están orientados negativamente con respecto a los sistemas coordenados en esos espacios.

e. Orientación de planos e hiperplanos

La elección de un sistema coordenado cartesiano particular en una variedad lineal m dimensional π determina un cierta orientación

$$\Omega(\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_m),$$

donde $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_m$ son los vectores coordenados. Esta elección fija cuáles conjuntos de m vectores $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ en π se dice que están orientados positivamente, a saber, aquellos con la misma orientación que $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_m$. Denotamos por π^* la combinación del espacio lineal π con la selección de una orientación particular en π y a π^* se le da el nombre de *variedad lineal orientada*. Se escribe $\Omega(\pi^*)$ para la orientación seleccionada y se dice que m vectores independientes $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ en π están orientados positivamente si

$$\Omega(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m) = \Omega(\pi^*).$$

Se dice que π^* *está orientada positivamente con respecto a* un sistema coordenado cartesiano particular si la orientación de los vectores coordenados es la misma que la de π^*.

Un plano bidimensional orientado π^* puede imaginarse como un plano con un *sentido positivo de rotación* distinguido. Si una pareja

[1] Se verifica fácilmente que $\mu = 0$ sólo cuando π y π' son *perpendiculares entre sí*, es decir, cuando π' contiene un vector ortogonal a todos los vectores en π. Con mayor generalidad, el coeficiente μ puede interpretarse como el coseno del ángulo entre las dos variedades (ver el problema 13, p. 246).

de vectores **A**, **B** está orientada "positivamente" con respecto a π^* el sentido positivo de rotación de π^* es el sentido de la rotación en un ángulo menor que 180° que lleva la dirección de **A** hacia la de **B**.[1]

Si el plano bidimensional orientado π^* se encuentra en un plano tridimensional orientado σ^*, pueden distinguirse un lado *positivo* y uno *negativo* de π^*. Sea P_0 cualquier punto de π^*. Tómense dos vectores independientes $\mathbf{B} = \overrightarrow{P_0P_1}$, $\mathbf{C} = \overrightarrow{P_0P_2}$ en π^* para los cuales

(86a) $$\Omega(\mathbf{B}, \mathbf{C}) = \Omega(\pi^*).$$

Se dice que un tercer vector $\mathbf{A} = \overrightarrow{P_0P_3}$, independiente de **B**, **C**, apunta hacia el *lado positivo de* π^* si

(86b) $$\Omega(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \Omega(\sigma^*).$$

Si σ^* está orientado positivamente con respecto a un sistema coordenado cartesiano, puede remplazarse la condición (86b) por

(86c) $$\det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) > 0$$

en ese sistema. Si σ^* está orientado positivamente con respecto al sistema coordenado derecho usual, entonces el lado positivo de un plano orientado π^* es aquél desde el cual el sentido positivo de rotación en π^* se ve como en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

La misma terminología se aplica a los hiperplanos orientados π^* en el espacio orientado n dimensional σ^*. Dados $n - 1$ vectores $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ en π^* con

(87a) $$\Omega(\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n) = \Omega(\pi^*),$$

se dice que un vector $\mathbf{A}_1$ apunta hacia el lado positivo de π^* si

[1]Nótese que la orientación de π^* sólo puede describirse señalando una pareja específica de vectores **B**, **C** en π orientada positivamente, o bien, un objeto giratorio específico en π (por ejemplo, un reloj) que tenga el sentido de rotación que se distingue. No existe manera abstracta de decidir si una rotación dada es *en el sentido* o *en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj,* como tampoco existe una manera abstracta de decir lo que es la *derecha* y lo que es la *izquierda.* Estas cuestiones sólo pueden decidirse por referencia a algunos *objetos estándar.*

(87b) $$\Omega(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{A}_n) = \Omega(\sigma^*),$$

f. Cambio de volumen de los paralelepípedos en las transformaciones lineales

Una matriz cuadrada $\mathbf{a} = (a_{jk})$ con n filas y columnas determina una transformación o aplicación lineal $\mathbf{Y} = \mathbf{aX}$ de los vectores $\mathbf{X}$ en el espacio n dimensional hacia los vectores $\mathbf{Y}$ del mismo espacio. Aquí se supone que $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ están referidos a los mismos vectores coordenados $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n$. Para $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$, la transformación, escrita en sus componentes, tiene la forma

$$y_j = \sum_{r=1}^{n} a_{jr}x_r \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Un conjunto de n vectores $\mathbf{B}_1 = (b_{11}, \ldots, b_{n1}), \ldots, \mathbf{B}_n = (b_{1n}, \ldots, b_{nn})$ se transforma en el conjunto de n vectores $\mathbf{C}_1 = (c_{11}, \ldots, c_{n1}), \ldots, \mathbf{C}_n = (c_{1n}, \ldots, c_{nn})$, donde

$$c_{jk} = \sum_{r=1}^{n} a_{jr}b_{rk}\,.$$

Por la regla para el determinante de un producto de matrices (p. 210), se tiene

(88a) $$\det(\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n) = \det(\mathbf{a}) \cdot \det(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n).$$

Esta fórmula contiene las dos fórmulas

(88b) $$|\det(\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n)| = |\det(\mathbf{a})|\,|\det(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n)|$$

(88c) $$\operatorname{sgn}\det(\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n) = [\operatorname{sgn}\det(\mathbf{a})][\operatorname{sgn}\det(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n)].$$

Estas dos reglas pueden enunciarse inmediatamente en lenguaje geométrico:

La transformación lineal del espacio n dimensional sobre sí mismo correspondiente a una matriz cuadrada $\mathbf{a}$, *multiplica el volumen de todo paralelepípedo generado por n vectores por el mismo factor constante* $\det(\mathbf{a})$. *Esta transformación conserva la orientación de todos los paralelepípedos n dimensionales si* $\det(\mathbf{a}) > 0$, *y cambia la*

orientación de todos ellos si det (**a**) < 0.[1]

Para un movimiento rígido la matriz **a** es ortogonal y, por tanto (ver la p. 213), su determinante es $+1$, o bien, -1. Por tanto, *los movimientos rígidos conservan el volumen de los paralelepípedos.* Aquéllos para los que $\det(\mathbf{a}) = +1$ conservan el sentido; los otros lo invierten.

Ejercicios 2.4

1. Tratar el número 5 de los Ejercicios 2.2 en términos de productos vectoriales.

2. En una rotación uniforme, sean (α, β, γ) los cosenos directores del eje de rotación, el cual pasa por el origen, y ω la velocidad angular. Hallar la velocidad del punto (x, y, z).

3. Demostrar que el plano que pasa por los tres puntos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) está dado por

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix} = 0.$$

4. Encontrar la distancia más corta entre las dos rectas l y l' en el espacio, dadas por las ecuaciones $x = at + b$, $y = ct + d$, $z = et + f$ y $x = a't + b'$, $y = c't + d'$, $z = e't + f'$

5. Demostrar que el área de un polígono convexo con los vértices sucesivos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, . . ., $P_n(x_n, y_n)$ está dada por la mitad del valor absoluto de

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \cdot \cdot \cdot + \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix}$$

6. Probar que el área del triángulo con vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2), y (x_3, y_3) es

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

7. Si los vértices del triángulo del ejercicio anterior tienen coordenadas racionales, probar que el triángulo no puede ser equilátero.

---

[1]Es importante hacer resaltar las hipótesis en este teorema. Sólo los volúmenes de paralelepípedos n dimensionales se multiplican por el mismo factor; los de dimensiones inferiores se multiplican por factores que varían con su localización. También tiene que suponerse que imagen y original se refieren al mismo sistema coordenado, si es que ha de cumplirse la proposición acerca de las orientaciones.

8. (a) Probar la desigualdad

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \leqq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)(a''^2 + b''^2 + c''^2)}.$$

(b) ¿Cuándo se cumple el signo de igualdad?

9 Probar las identidades vectoriales

(a) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\,\mathbf{C}$

(b) $(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{X}' \times \mathbf{Y}') = (\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}')\,(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}') - (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}')\,(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}')$

(c) $[\mathbf{X} \times (\mathbf{Y} \times \mathbf{Z})] \cdot \{[\mathbf{Y} \times (\mathbf{Z} \times \mathbf{X})] \times [\mathbf{Z} \times (\mathbf{X} \times \mathbf{Y})]\} = 0.$

10. Dar la fórmula para una rotación en un ángulo ϕ alrededor del eje $x : y : z = 1 : 0 : -1$ tal que la rotación del plano $x = z$ sea positiva cuando se observa desde el punto $(-1,\ 0,\ 1)$.

11. Si **A**, **B** y **C** son independientes, usar las dos representaciones de $\mathbf{X} = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ obtenidas en el Ejercicio 9a para expresar **D** como una combinación lineal de **A**, **B** y **C**.

12. Sean Ox, Oy, Oz y Ox', Oy', Oz' dos sistemas coordenados derechos. Supóngase que Oz y Oz' no coinciden; sea θ el ángulo zOz' $(0 < \theta < \pi)$.
Trácese la semirrecta Ox_1 a ángulos rectos tanto con Oz como con Oz' y tal que el sistema Ox_1, Oz, Oz' tengan la misma orientación que Ox, Oy, Oz. La Ox_1 es la recta de intersección de los planos Oxy y $Ox'y'$. Sea ϕ el ángulo xOx_1 y ψ el ángulo x_1Ox' y supóngase que se miden en el sentido positivo usual en sus respectivos planos Oxy y $Ox'y'$. Encontrar la matriz para el cambio de coordenadas.

13. Sean π y π' dos subespacios lineales m dimensionales del mismo espacio n dimensional, con las respectivas bases ortonormales $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_m$ y $\mathbf{E}_1', \mathbf{E}_2', \ldots, \mathbf{E}_m'$. Demostrar que $\mu = [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_m; \mathbf{E}_1', \mathbf{E}_2', \ldots, \mathbf{E}_m'] = 0$ si y sólo si π y π' son ortogonales, es decir, uno de los espacios contiene un vector perpendicular a todos los vectores del otro.

2.5 Nociones vectoriales en el análisis

a. Campos vectoriales

El análisis matemático entra en juego cuando nos interesamos en una *variedad vectorial* dependiente de uno o más parámetros que varían de manera continua.

Si, por ejemplo, se considera un material que ocupa una porción de espacio y que se encuentra en estado de movimiento, entonces en un instante dado cada partícula del material tendrá una velocidad definida que se representa por medio de un vector $\mathbf{U}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$. Se dice que estos vectores forman un *campo vectorial* en la región en

cuestión. Entonces, las tres componentes del vector del campo aparecen como tres funciones

$$u_1(x_1, x_2, x_3), \quad u_2(x_1, x_2, x_3), \quad u_3(x_1, x_2, x_3)$$

de las tres coordenadas x_1, x_2, x_3 de la posición de la partícula en el instante en cuestión. Comúnmente se representaría **U** como un vector con punto inicial (x_1, x_2, x_3).

Del mismo modo, las fuerzas que actúan en puntos diferentes del espacio forman un campo vectorial. Como ejemplo de un *campo de fuerzas* considérese la fuerza gravitacional por unidad de masa ejercida por una partícula pesada, de acuerdo con la ley de atracción de Newton. De acuerdo con esa ley, el campo vectorial $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$ en cada punto (x_1, x_2, x_3) está dirigido hacia la partícula que atrae y su magnitud es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula al punto.

Los campos vectoriales, como **U** o **F**, tienen un significado físico independiente de las coordenadas. En un sistema coordenado cartesiano x_1, x_2, x_3 dado, el vector **U** tiene las componentes u_1, u_2, u_3 que dependen del sistema coordenado. En un sistema coordenado cartesiano diferente, el punto que originalmente tuvo las coordenadas x_1, x_2, x_3 recibe las coordenadas y_1, y_1, y_3 donde las y_i y las x_k están relacionadas por medio de ecuaciones de la forma

$$\text{(89a)} \qquad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3, \end{cases}$$

o bien,

$$\text{(89b)} \qquad y_j = \sum_{k=1}^{3} a_{jk}x_k + b_j \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Entonces, las componentes v_1, v_2, v_3 del vector **U** en el nuevo sistema coordenado están dadas por las relaciones *homogéneas* correspondientes:

$$\text{(89c)} \qquad v_j = \sum_{k=1}^{3} a_{jk}u_k \qquad (j = 1, 2, 3).$$

La matriz $\mathbf{a} = (a_{jk})$ es ortogonal, de modo que (ver la p. 194) su recíporca es igual a su transpuesta. En consecuencia, las soluciones

de las ecuaciones (89b), (89c) para x_k y u_k toman la forma

$$x_k = \sum_{j=1}^{3} a_{jk}(y_j - b_j) \qquad (k = 1, 2, 3), \tag{89d}$$

$$u_k = \sum_{k=1}^{3} a_{jk}v_j \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{89e}$$

Tres funciones cualesquiera u_1, u_2, u_3 de las variables x_1, x_2, x_3 determinan un campo de vectores **U** con componentes u_1, u_2, u_3 en las coordenadas x_1, x_2, x_3. Si el campo ha de tener un significado independiente de la elección de los sistemas coordenados, las componentes v_i de **U** en un sistema coordenado cartesiano y_1, y_2, y_3 deben estar dadas por la fórmula (89c), siempre que las y_i y las x_i estén relacionadas por las fórmulas (89a).

b. Gradiente de un escalar

Un escalar es una función $s = s(P)$ de los puntos P en el espacio. En cualquier sistema coordenado cartesiano en el que el punto P esté descrito por sus coordenadas x_1, x_2, x_3, el escalar s se convierte en una función $s = f(x_1, x_2, x_3)$. Las tres derivadas parciales

$$u_1 = \frac{\partial s}{\partial x_1} = f_{x_1}(x_1, x_2, x_3),$$

$$u_2 = \frac{\partial s}{\partial x_2} = f_{x_2}(x_1, x_2, x_3),$$

$$u_3 = \frac{\partial s}{\partial x_3} = f_{x_3}(x_1, x_2, x_3).$$

pueden considerarse como componentes, en las coordenadas x_1, x_2, x_3 de un vector $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$.

En cualquier nuevo sistema coordenado cartesiano y_1, y_2, y_3 enlazado, con el original por medio de las relaciones (89a), o bien, (89d), el escalar s queda representado por la función

$$\begin{aligned} s &= g(y_1, y_2, y_3) \\ &= f\left(\sum_{k=1}^{3} a_{k1}(y_k - b_k),\ \sum_{k=1}^{3} a_{k2}(y_k - b_k),\ \sum_{k=1}^{3} a_{k3}(y_k - b_k)\right). \end{aligned}$$

Por la *regla de la cadena de la derivación* (p. 55), se tiene

$$v_j = \frac{\partial s}{\partial y_j} = g_{y_j}(y_1, y_2, y_3)$$
$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial s}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j}$$
$$= \sum_{k=1}^{3} u_k a_{jk}.$$

Usando las relaciones (89c), se ve que el vector **U** tiene las componentes $v_j = \partial s/\partial y_j$ en el sistema y_1, y_2, y_3. Así, las derivadas parciales del escalar s formado en cualquier sistema coordenado cartesiano, constituyen las componentes de un vector **U** que no depende del sistema. A **U** se le da el nombre de *gradiente del escalar* s y se escribe

$$\mathbf{U} = \text{grad } s.$$

Por la fórmula (14b), p. 73, la derivada de s en la dirección con cosenos directores α_1, cos α_2, cos α_3 está dada en las coordenadas x_1, x_2, x_3 por

(90) $$D_{(\alpha)}s = \frac{\partial s}{\partial x_1} \cos \alpha_1 + \frac{\partial s}{\partial x_2} \cos \alpha_2 + \frac{\partial s}{\partial x_3} \cos \alpha_3.$$

Introduciendo el vector unitario $\mathbf{R} = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3)$ en la dirección con ángulos directores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, puede escribirse la derivada de s en esa dirección, en notación vectorial, como

(90b) $$D_{(\alpha)}s = \mathbf{R} \cdot \text{grad } s.$$

A partir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz (ver la p. 132) se encuentra, para $|\mathbf{R}| = 1$.

$$|D_{(\alpha)}s| \leqq |\mathbf{R}|\,|\text{grad } s| = |\text{grad } s|$$

De donde, *la derivada de s en cualquier dirección nunca es mayor que la longitud del gradiente de s.* Tomando como **R** al vector unitario en la dirección de grad s, se encuentra para la derivada direccional el valor

$$D_{(\alpha)}s = \frac{1}{|\text{grad } s|} (\text{grad } s) \cdot (\text{grad } s) = |\text{grad } s|$$

Por tanto, *la longitud del vector gradiente de s es igual a la rapidez máxima de cambio de s en cualquier dirección. La dirección del gradiente es aquella en la que el escalar s crece más rápidamente, mientras que en la dirección opuesta s decrece con mayor rapidez.*

En el Capítulo 3 regresaremos a la interpretación geométrica del gradiente. No obstante, inmediatamente puede darse una idea intuitiva de la *dirección* del gradiente. Restringiéndonos primero a los vectores en dos dimensiones, tenemos que considerar el gradiente de un escalar $s = f(x_1, x_2)$. Se supondrá que s se representa por medio de las curvas de nivel (o líneas de contorno)

$$s = f(x_1, x_2) = \text{constante} = c$$

en el plano x_1, x_2.Entonces, obviamente, la derivada de s en un punto P en la dirección de la curva de nivel que pasa por P es 0, porque si Q es otro punto sobre la misma curva de nivel se cumple la ecuación $s(Q) - s(P) = 0$; dividiendo por la distancia ρ entre $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{P}$ y haciendo que ρ tienda a 0, en el límite (ver la p. 72) se encuentra que la derivada de s en la dirección tangencial a la curva de nivel en P es 0. Así, por (90b), $\mathbf{R}$. grad $s = 0$ si $\mathbf{R}$ es un vector unitario en la dirección de la tangente a la curva de nivel y, por lo tanto, *en todo punto el vector gradiente de s es perpendicular a la curva de nivel que pasa por ese punto.* Se cumple una proposición exactamente análoga para el gradiente en tres dimensiones. Si se representa el escalar s por medio de sus *superficies de nivel*

$$s = f(x_1, x_2, x_3) = \text{constante} = c,$$

el gradiente tiene componente cero en toda dirección tangencial a la superficie de nivel y, por consiguiente, es perpendicular a la superficie de nivel.

En las aplicaciones frecuentemente se encuentran campos vectoriales que representan el gradiente de una función escalar. Puede tomarse como un ejemplo el campo gravitacional de fuerzas debido a una partícula de masa M concentrada en un punto $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ Denotemos por $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$ la fuerza ejercida por la masa atractiva M sobre una partícula de masa m localizada en el punto $P = (x_1, x_2, x_3)$. Denótese por $\mathbf{R}$ el vector

$$\mathbf{R} = \overrightarrow{QP} = (x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3).$$

Por la ley de Newton de la gravitación, **F** tiene la dirección de $-\mathbf{R}$ y la magnitud $C/|\mathbf{R}|^2$, donde $C = \gamma m M$ (aquí γ denota la constante universal de gravitación). De donde,

$$\mathbf{F} = -\frac{C}{|\mathbf{R}|^3}\mathbf{R}$$

o bien,

$$f_j = C\frac{\xi_j - x_j}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}^3} \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Derivando, inmediatamente se verifica que

$$f_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{C}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}} \qquad (j = 1, 2, 3).$$

De aquí que

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad}\frac{C}{r}, \tag{91}$$

donde

$$r = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2} = |\mathbf{R}|$$

es la distancia entre las dos partículas en P y Q.

Si un campo de fuerzas es el gradiente de una función escalar, a menudo esta función escalar recibe el nombre de *función de potencial* del campo. En el estudio del trabajo y la energía (pp. 728 y 788 se considerará este concepto desde un punto de vista más general.

c. Divergencia y rotacional de un campo vectorial

Derivando, a cada escalar se le ha asignado un campo vectorial: el gradiente. De modo semejante, a cada campo vectorial **U** se le puede asignar un cierto escalar, conocido como *divergencia* del campo vectorial **U**. Para un sistema coordenado cartesiano x_1, x_2, x_3 específico en el que $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$, se define la divergencia del vector **U** como la función

$$\operatorname{div}\mathbf{U} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \tag{92}$$

es decir, como la suma de las derivadas parciales de las tres componentes con respecto a las coordenadas correspondientes. Puede demostrarse que el escalar div **U** definido de esta manera no depende de la elección particular del sistema coordenado cartesiano.[1] Supóngase que las coordenadas y_1, y_2, y_3 de un punto en un sistema coordenado diferente están relacionadas con x_1, x_2, x_3 por medio de las ecuaciones (89b); entonces, las componentes v_1, v_2, v_3 de **U** en el nuevo sistema están dadas por las relaciones (89c). A partir de la regla de la cadena para la derivación se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{U} &= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \sum_{k,j=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} \\ &= \sum_{j,k=1}^{3} a_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_j} \sum_{k=1}^{3} a_{jk} u_k \\ &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_j},\end{aligned}$$

lo cual demuestra que se llega al mismo escalar div **U** en cualquier otro sistema coordenado.

Aquí nos restringiremos a la definición formal de la divergencia; posteriormente (Capítulo V, Sección 9) se discutirá su interpretación física.

Adoptaremos el mismo procedimiento para el llamado *rotacional* de un campo vectorial **U**. El rotacional es a su vez un vector

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{U}.$$

Si en un sistema coordenado x_1, x_2, x_3 el vector **U** tiene las componentes u_1, u_2, u_3, se definen las componentes b_1, b_2, b_3 de rot **U** por

$$(93) \qquad b_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad b_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad b_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

[1] Este no sería el caso para otras expresiones formadas a partir de las primeras derivadas de las componentes del vector **U**, por ejemplo,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

o bien,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_1}.$$

Puede verificarse, como en los otros casos, que la definición dada del rotacional de un vector **U** en realidad proporciona un vector independiente del sistema coordenado particular, siempre que todos los sistemas coordenados cartesianos considerados tengan la misma orientación. No obstante, se omiten estos cálculos aquí en virtud de que en el Capítulo 5, p. 683, se dará una interpretación física del rotacional que ilustra claramente su carácter vectorial.

Los tres conceptos de gradiente, divergencia y rotacional pueden relacionarse entre sí si se usa un vector simbólico con las componentes

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ \frac{\partial}{\partial x_2}, \ \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Comúnmente, este *operador diferencial vectorial* se denota por medio del símbolo ∇ (pronúnciese "del"). El gradiente de un escalar s es el producto del vector simbólico ∇ con la cantidad escalar s; es decir, es el vector

(94) $$\operatorname{grad} s = \nabla s = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} s, \ \frac{\partial}{\partial x_2} s, \ \frac{\partial}{\partial x_3} s\right).^1$$

La divergencia de un vector $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$ es el producto escalar

(94b) $$\operatorname{div} \mathbf{U} = \nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} u_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} u_3.$$

Por último, el rotacional del vector **U** es el producto vectorial

(94c) $$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{U} &= \nabla \times \mathbf{U} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_2} u_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} u_2, \ \frac{\partial}{\partial x_3} u_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} u_3, \ \frac{\partial}{\partial x_1} u_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} u_1\right) \end{aligned}$$

[ver (71b), p. 219]. El hecho de que el vector ∇ es independiente del sistema coordenado que se use para definir sus componentes, se deduce de la regla de la cadena para la derivación; bajo la transformación de coordenadas (89d), por la regla de la cadena se tiene

[1] Nos vemos forzados a escribir aquí el vector antes del escalar en el producto ∇s, en contraposición con nuestra costumbre, en virtud de que las componentes del vector simbólico ∇ no son conmutativas con los escalares ordinarios.

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{3} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k},$$

lo cual muestra que las componentes de ∇ se transforman de acuerdo con la regla (89c) para los vectores. Esto hace obvio que también ∇s, $\nabla \cdot \mathbf{U}$ y $\nabla \times \mathbf{U}$ no dependen del sistema de coordenadas.[1]

Para concluir, se mencionarán unas cuantas relaciones que se presentan continuamente. *El rotacional de un gradiente es cero;* en símbolos,

(95a) $$\text{rot grad } s = \nabla \times (\nabla s) = 0.$$

La divergencia de un rotacional es cero; en símbolos,

(95b) $$\text{div rot } \mathbf{U} = = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) = 0.$$

Como se ve con facilidad, estas relaciones se deducen a partir de las definiciones de divergencia, rotacional y gradiente, usando la intercambiabilidad de las derivaciones. Las relaciones (95a, b) también se deducen formalmente si se aplican las reglas ordinarias para los vectores al vector simbólico ∇, ya que entonces

$$\nabla \times (\nabla s) = (\nabla \times \nabla)s = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) = \det(\nabla, \nabla, \mathbf{U}) = 0.$$

Otra combinación extremadamente importante de los operadores diferenciales vectoriales es la *divergencia de un gradiente:*

(95c) $$\text{div grad } s = \nabla \cdot (\nabla s) = \frac{\partial^2 s}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial x_3^2} = \Delta s.$$

Aquí

---

[1] Esta proposición tiene que restringirse en el caso del rotacional. En general, la magnitud y la dirección del producto vectorial de dos vectores tiene un significado geométrico, como se explicó en la p. 225, excepto que el producto cambia hacia el opuesto cuando se cambia la orientación del sistema coordenado cartesiano que se usa. Esto implica, para un vector $\mathbf{U}$, que rot $\mathbf{U} = \nabla \times \mathbf{U}$ se comporta como un vector mientras no se cambie la orientación del sistema coordenado (es decir, mientras sólo se usen tranformaciones ortogonales con determiante $+1$. Cambiar la orientación del sistema coordenado conduce a cambiar rot $\mathbf{U}$ hacia su opuesto.
combianción

(95d) $$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

se conoce como "operador de Laplace" o "laplaciano" La ecuación diferencial parcial

(95e) $$\Delta s = \frac{\partial^2 s}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial x_3^2} = 0$$

satisfecha por muchos escalares importantes s en la fisicomatemática se conoce como "ecuación de Laplace" o "ecuación del potencial".

A veces también se usa la terminología del "análisis vectorial" cuando el número de variables independientes es diferente de tres. Un sistema de n funciones $u_1, \ldots, u_n$ de n variables independientes $x_1, \ldots, x_n$ determina un *campo vectorial* en el espacio n dimensional. Entonces, los conceptos de gradiente de un escalar y del operador de Laplace conservan su significado. Nociones análogas a la de rotacional de un vector se vuelven más complicadas. La formulación más satisfactoria para las análogas de las relaciones (95a, b) en n dimensiones es mediante el cálculo de las *formas diferenciales exteriores,* el cual se describirá en el capítulo siguiente.

d. Familia de vectores. Aplicación a la teoría de las curvas en el espacio y al movimiento de partículas

Además de los campos vectoriales también consideraremos a las variedades uniparamétricas de vectores, llamadas *familias de vectores,* donde los vectores $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$ no corresponden a cada punto de una región en el espacio sino a cada valor de un solo parámetro t. Se escribe $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$. La derivada del vector $\mathbf{U}$ puede definirse naturalmente como

(96a) $$\frac{dU}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [\mathbf{U}(t+h) - \mathbf{U}(t)].$$

Es obvio que esta derivada tiene las componentes

(96b) $$\frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}, \frac{du_3}{dt}.$$

Fácilmente se verifica que esta derivación vectorial satisface leyes análogas a las ordinarias para las derivadas:

(97a) $$\frac{d}{dt}(\mathbf{U}+\mathbf{V}) = \frac{d}{dt}\mathbf{U} + \frac{d}{dt}\mathbf{V}; \qquad \frac{d}{dt}(\lambda\mathbf{U}) = \frac{d\lambda}{dt}\mathbf{U} + \lambda\frac{d}{dt}\mathbf{U}$$

(97b) $$\frac{d}{dt}(\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}) = \mathbf{U}\cdot\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{d\mathbf{U}}{dt}\cdot\mathbf{V}$$

(97c) $$\frac{d}{dt}(\mathbf{U}\times\mathbf{V}) = \mathbf{U}\times\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{d\mathbf{U}}{dt}\times\mathbf{V}.$$

Estas nociones se aplican al caso en el que la familia de vectores consiste de los *vectores de posición* $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t) = \overrightarrow{OP}$ de los puntos P sobre una curva en el espacio dada en representación paramétrica como:

$$x_1 = \phi_1(t), \; x_2 = \phi_2(t), \; x_3 = \phi_3(t).$$

Entonces

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)).$$

El vector $d\mathbf{X}/dt$ tiene la dirección de la *tangente* a la curva en el punto correspondiente a t; puesto que el vector $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}(t+\Delta t) - \mathbf{X}(t)$ tiene la dirección del segmento rectilíneo que une los puntos con valores del parámetro t $t+\Delta t$.Lo mismo se cumple para el vector $\Delta\mathbf{X}/\Delta t$, cuando $\Delta t > 0$. A medida que $\Delta t \to 0$ la dirección de esta cuerda se aproxima a la dirección de la tangente. Si en lugar de t se introduce como parámetro la longitud de arco s de la curva, medida desde un punto de partida definido, puede probarse que

(98) $$\left|\frac{d\mathbf{X}}{ds}\right|^2 = \frac{d\mathbf{X}}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{X}}{ds} = 1.$$

La demostración sigue exactamente los mismos lineamientos que la demostración correspondiente para las curvas planas (ver Volumen I, p. 354). Por tanto, $d\mathbf{X}/ds$ es un vector unitario. Derivando ambos miembros de la ecuación (98) con respecto a s, usando la regla (97b), se obtiene

(99) $$\frac{d\mathbf{X}}{ds}\cdot\frac{d^2\mathbf{X}}{ds^2} + \frac{d^2\mathbf{X}}{ds^2}\cdot\frac{d\mathbf{X}}{ds} = 2\frac{d\mathbf{X}}{ds}\cdot\frac{d^2\mathbf{X}}{ds^2} = 0.$$

Esta ecuación afirma que el vector

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{ds^2} = \left(\frac{d^2x_1}{ds^2}, \frac{d^2x_2}{ds^2}, \frac{d^2x_3}{ds^2}\right)$$

es *perpendicular a la tangente.* Este vector recibe el nombre de *vector curvatura* o *vector normal principal* y su longitud

(100) $$k = \frac{1}{\rho} = \left|\frac{d^2\mathbf{X}}{ds^2}\right|$$

se llama *curvatura* de la curva en el punto correspondiente. El recíproco $\rho = 1/k$ de la curvatura se llama *radio de curvatura,* como antes. El punto que se obtiene midiendo desde el punto sobre la curva una longitud ρ en la dirección del vector normal principal se llama *centro de curvatura.*

Se demostrará que esta definición de curvatura concuerda con la dada para las curvas planas en el Volumen I (p. 354). Para cada s, el vector $\mathbf{Y} = d\mathbf{X}/ds$ tiene longitud 1 y se encuentra en la dirección de la tangente. Si se piensa en los vectores $\mathbf{Y}(s + \Delta s)$ y $\mathbf{Y}(s)$ como si tuvieran el origen como punto inicial común, entonces la diferencia $\Delta\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(s + \Delta s) - \mathbf{Y}(s)$ queda representada por el vector que une los puntos finales. El ángulo β entre las tangentes a la curva en los puntos con parámetros s y $s + \Delta s$ es igual al ángulo entre los vectores $\mathbf{Y}(s)$ y $\mathbf{Y}(s + \Delta s)$. Entonces

$$|\Delta\mathbf{Y}| = |\mathbf{Y}(s + \Delta s) - \mathbf{Y}(s)| = 2 \operatorname{sen}\frac{\beta}{2},$$

dado que

$$|\mathbf{Y}(s)| = |\mathbf{Y}(s + \Delta s)| = 1.$$

Usando

$$\frac{2 \operatorname{sen} \beta/2}{\beta} \to 1 \quad \text{para} \quad \beta \to 0,$$

se encuentra que

$$\left|\frac{d^2\mathbf{X}}{ds^2}\right| = \left|\frac{d\mathbf{Y}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\mathbf{Y}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\beta}{\Delta s}$$

De aquí que k es el límite de la razón del ángulo entre las tangentes

en dos puntos de la curva y la longitud de arco entre esos puntos a medida que los puntos tienden a unirse. Pero este límite define la curvatura para las curvas planas.[1]

El vector curvatura cumple una función importante en la mecánica. Supóngase que una partícula que se mueve a lo largo de una curva tiene el vector de posición $\mathbf{X}(t)$ en el instante t. Entonces la velocidad del movimiento está dada tanto en magnitud como en dirección por el vector $d\mathbf{X}/dt$. De modo semejante, la aceleración está dada por el vector $d^2\mathbf{X}/dt^2$. Por la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{X}}{ds}$$

y

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\frac{d\mathbf{X}}{ds} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2\mathbf{X}}{ds^2}. \tag{101}$$

En vista de lo que ya se sabe acerca de la primera y segunda derivadas del vector $\mathbf{X}$ con respecto a s, la ecuación (101) expresa los siguientes hechos: el *vector aceleración* del movimiento es la suma de dos vectores. Uno de éstos está dirigido a lo largo de la tangente a la curva y su longitud es igual a d^2s/dt^2, es decir, a la aceleración del punto en su trayectoria (la rapidez de cambio de la magnitud de la velocidad o *aceleración tangencial*). El otro es normal a la trayectoria, está dirigido hacia el centro de curvatura y su longitud es igual al cuadrado de la magnitud de la velocidad multiplicado por la curvatura (la *aceleración normal*). Para una partícula de masa unitaria, el vector aceleración es igual a la fuerza que actúa sobre la partícula. Si no actúa fuerza alguna en la dirección de la curva (como es el caso para una partícula restringida a moverse a lo largo de una curva, sujeta únicamente a las fuerzas de reacción que actúan normales a la curva), la aceleración tangencial se anula y la aceleración total es normal a la curva y de magnitud igual al cuadrado de la velocidad multiplicado por la curvatura.

[1]En el caso de curvas en el espacio no es posible, como para las curvas planas, identificar β con el incremento $\Delta\alpha$ de un ángulo de inclinación α. La razón es que el ángulo entre $\mathbf{Y}(s)$ y $\mathbf{Y}(s + \Delta s)$ generalmente no es igual a la diferencia entre los ángulos que los vectores $\mathbf{Y}(s)$ y $\mathbf{Y}(s + \Delta s)$ forman con alguna tercera dirección fija. *Los ángulos entre las direcciones en el espacio no son aditivos* como lo son en el plano.

Ejercicios 2.5

1. Verificar que el vector de posición $\overrightarrow{PQ}$ de un punto Q con respecto a un punto P se comporta como un vector en un cambio de coordenadas.
2. Deducir las identidades siguientes.

   (a) $\text{grad}\,(\alpha\beta) = \alpha\,\text{grad}\,\beta + \beta\,\text{grad}\,\alpha$
   (b) $\text{div}\,(\alpha\mathbf{U}) = \mathbf{U}\cdot\text{grad}\,\alpha + \alpha\,\text{div}\,\mathbf{U}$
   (c) $\text{rot}\,(\alpha\mathbf{U}) = \text{grad}\,\alpha \times \mathbf{U} + \alpha\,\text{rot}\,\mathbf{U}$
   (d) $\text{div}\,(\mathbf{U}\times\mathbf{V}) = \mathbf{V}\cdot\text{rot}\,\mathbf{U} - \mathbf{U}\cdot\text{rot}\,\mathbf{V}.$

3. Sea $\mathbf{U}\cdot\nabla$ el símbolo para el operador

$$\mathbf{U}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{U}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{U}_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

   Demostrar que

   (a) $\text{grad}\,(\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}) = \mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{V} + \mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{U} + \mathbf{U}\times\text{rot}\,\mathbf{V} + \mathbf{V}\times\text{rot}\,\mathbf{U}$
   (b) $\text{rot}\,(\mathbf{U}\times\mathbf{V}) = \mathbf{U}\,\text{div}\,\mathbf{V} - \mathbf{V}\,\text{div}\,\mathbf{U} + \mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{U} - \mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{V}.$

4. Para el operador laplaciano Δ establecer que

$$\Delta\mathbf{U} = \text{grad}\,\text{div}\,\mathbf{U} - \text{rot}\,\text{rot}\,\mathbf{U}$$

5. Hallar la ecuación del llamado plano osculador de una curva $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ en el punto t_0, es decir, el límite de los planos que pasan por tres puntos de la curva, a medida que estos puntos se aproximan al punto con parámetro t_0.
6. Demostrar que tanto el vector curvatura como el vector tangente se encuentran en el plano osculador.
7. Sea C una curva suave con una tangente que gira de manera continua. Sea d la distancia más corta entre dos puntos sobre la curva y l la longitud del arco entre los dos puntos. Probar que $d - l = o(d)$ cuando d es pequeña.
8. Probar que la curvatura de la curva $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$, siendo t un parámetro arbitrario, está dada por

$$k = \frac{\{|\mathbf{X}'|^2\,|\mathbf{X}''|^2 - (\mathbf{X}'\cdot\mathbf{X}'')^2\}^{1/2}}{|\mathbf{X}'|^3}.$$

9. Si $\mathbf{X} = \mathbf{X}(s)$ es cualquier representación paramétrica de una curva, probar que el vector $d^2\mathbf{X}/dt^2$ con punto inicial $\mathbf{X}$ se encuentra en el plano osculador en $\mathbf{X}$.
10. Si C es una curva cerrada continuamente diferenciable y $\mathbf{A}$ un punto no sobre C, existe un punto B sobre de C que se encuentra a una distancia más corta de A que cualquier otro punto sobre de C. Probar que la recta AB es normal a la curva.

11. Se traza una curva sobre del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ tal que el ángulo entre el eje z y la tangente en cualquier punto P de la curva es igual al ángulo entre el eje y y el plano tangente en P al cilindro. Probar que las coordenadas de cualquier punto P de la curva pueden expresarse en términos de un parámetro θ por medio de las ecuaciones

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \operatorname{sen} \theta, \quad z = c \pm a \log \operatorname{sen} \theta,$$

y que la curvatura de la curva es $(1/a) \operatorname{sen} \theta \, (1 + \sin^2 \theta)^{1/2}$.

12. Encontrar la ecuación del plano osculador (ver el Ejercicio 5) en el punto θ de la curva $x = \cos \theta$, $y = \operatorname{sen} \theta$, $z = f(\theta)$. Demostrar que $f(\theta) = (\cosh A\theta)/A$, cada plano osculador toca a una esfera cuyo centro es el origen y cuyo radio es $\sqrt{(1 + 1/A^2)}$.

13. (a) Probar que la ecuación del plano que pasa por los tres puntos t_1, t_2, t_3 sobre la curva

$$x = \frac{1}{3}at^3, \quad y = \frac{1}{2}bt^2, \quad z = ct$$

es

$$\frac{3x}{a} - 2(t_1 + t_2 + t_3)\frac{y}{b} + (t_2t_3 + t_3t_1 + t_1t_2)\frac{z}{c} - t_1t_2t_3 = 0.$$

(b) Demostrar que el punto de intersección de los planos osculadores en t_1, t_2, t_3 se encuentra en este plano.

14. Sea $\mathbf{X} = \mathbf{X}(s)$ una curva arbitraria en el espacio, tal que el vector $\mathbf{X}(s)$ es tres veces continuamente diferenciable (s es la longitud de arco). Hallar el centro de la esfera de contacto más cercano con la curva en el punto s.

15. Si $\mathbf{X} = \mathbf{X}(s)$ es una curva sobre una esfera de radio unitario, donde s es la longitud de arco, entonces se cumple

$$|\dddot{\mathbf{X}}|^2 - |\ddot{\mathbf{X}}|^4 = |\dddot{\mathbf{X}}|^2 - (\dot{\mathbf{X}} \cdot \dddot{\mathbf{X}})^2 = (\ddot{\mathbf{X}} \cdot [\dot{\mathbf{X}} \times \dddot{\mathbf{X}}])^2.$$

16. El límite de la razón del ángulo entre los planos osculadores en dos puntos cercanos de una curva, a la longitud de arco entre estos dos puntos (es decir, la derivada del vector normal unitario con respecto al arco s) se llama *torsión* de la curva. Denotemos por $\xi_1(s)$, $\xi_2(s)$ el vector unitario a lo largo de la tangente y el vector curvatura de la curva $\mathbf{X}(s)$; por $\xi_3(s)$ denotemos el vector unitario ortogonal a ξ_1 y ξ_2 (el llamado vector *binormal*), el cual está dado por $[\xi_1 \times \xi_2]$. Probar las fórmulas de Frenet

$$\dot{\xi}_1 = \frac{\xi_2}{\rho},$$
$$\dot{\xi}_2 = -\frac{\xi_1}{\rho} + \frac{\xi_3}{\tau},$$
$$\dot{\xi}_3 = -\frac{\xi_2}{\tau},$$

donde $1/\rho = k$ es la curvatura y $1/\tau$ la torsión de $x(s)$.

17. Usando los vectores ξ_1, ξ_2, ξ_3 del Ejercicio 16 como vectores coordenados, hallar expresiones para (a) el vector $\dddot{\mathbf{X}}$, (b) vector que va del punto **X** al centro de la esfera de contacto más cercano en **X**.

18. Demostrar que una curva de torsión cero es una curva plana.

19. Considérese un punto fijo A en el espacio y un punto variable P cuyo movimiento está dado como una función del tiempo. Denotando por $\dot{\mathbf{P}}$ el vector velocidad de P y por **a** un vector unitario en la dirección de P hacia A, demostrar que

$$\frac{d}{dt}|\overrightarrow{PA}| = -\mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{P}}$$

20. (a) Sean A, B, C tres puntos fijos no colineales y P un punto en movimiento. Sean **a**, **b**, **c** vectores unitarios en las direcciones PA, PB, PC, respectivamente; expresar el vector velocidad $\dot{\mathbf{P}}$ como una combinación lineal de estos vectores:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{a}u + \mathbf{b}v + \mathbf{c}w.$$

Probar que

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{1}{|\mathbf{A}-\mathbf{P}|}\{[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})v + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})w]\,\mathbf{a} - v\mathbf{b} - w\mathbf{c}\}.$$

(b) Probar que el vector aceleración $\ddot{\mathbf{P}}$ del punto P es

$$\ddot{\mathbf{P}} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c},$$

donde

$$\alpha = \dot{u} + uv\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|A-P|} - \frac{1}{|B-P|}\right) + uw\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{|A-P|} - \frac{1}{|C-P|}\right),$$

con expresiones similares para β y γ.

21. Probar que si $z = u(x, y)$ representa la superficie formada por las tangentes de una curva arbitraria, entonces (a) todo plano osculador de la curva es un plano tangente a la superficie y (b) $u(x, y)$ satisface la ecuación

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}{}^2 = 0.$$

CAPITULO 3

Desarrollos y aplicaciones del cálculo diferencial

3.1 Funciones implícitas

a. Observaciones generales

Frecuentemente, en la geometría analítica se da la ecuación de una curva no en la forma $y = f(x)$ sino en la forma $F(x, y) = 0$. Una recta puede representarse de esta manera por medio de la ecuación $ax + by + c = 0$, y una elipse, por la ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Para obtener la ecuación de la curva en la forma $y = f(x)$ debe "resolverse" la ecuación $F(x, y) = 0$ para y. En el Volumen I se consideró el problema especial de encontrar la inversa de una función $y = f(x)$, es decir, el problema de resolver la ecuación $F(x, y) = y$ $f(x) = 0$ para la variable x.

Estos ejemplos sugieren la importancia de los métodos para resolver una ecuación $F(x, y) = 0$ para x, o bien, para y. Tales métodos se encontrarán incluso para ecuaciones que comprenden funciones de más de dos variables.

En los casos más sencillos, como los de las ecuaciones antes mencionadas para la recta y la elipse, puede hallarse fácilmente la solución en términos de funciones elementales. En otros casos puede hallarse una aproximación de la solución, tan exacta como se desee. No obstante, para muchos fines resulta preferible no trabajar con la forma resuelta de la ecuación o con estas aproximaciones sino, por el contrario, sacar conclusiones acerca de la solución estudiando directamente la función $F(x, y)$, en la cual no se da preferencia a ninguna de las variables x, y sobre la otra.

No toda ecuación $F(x, y) = 0$ es la representación implícita de una función $y = f(x)$, o bien, $x = \phi(y)$. Es fácil dar ejemplos de

ecuaciones $F(x, y) = 0$ que no permiten solución alguna en términos de funciones de una variable. Así, la ecuación $x^2 + y^2 = 0$ sólo es satisfecha por la pareja de valores $x = 0, y = 0$, mientras que la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$ no es satisfecha por valores reales en lo absoluto. Por lo tanto, es necesario investigar con mayor cuidado las circunstancias bajo las cuales una ecuación $F(x, y) = 0$ define una función $y = f(x)$ y las propiedades de esta función.

Ejercicios 3.1a

1. Supóngase que para alguna pareja de valores (a, b), $f(a, b) = 0$. Si se conoce a, dar un método iterativo de construcción para encontrar b. ¿Bajo qué condiciones sobre f será aplicable este método?

b. Interpretación geométrica

Con el fin de aclarar la situación, representemos la función $F(x, y)$ por medio de la superficie $z = F(x, y)$ en el espacio tridimensional. Las soluciones de la ecuación $F(x, y) = 0$ son las mismas que las soluciones simultáneas de las dos ecuaciones $z = F(x, y)$ y $z = 0$. Geométricamente, el problema es determinar si la superficie $z = F(x, y)$ se intersecta con el plano x, y en las curvas $y = f(x)$ o $x = \phi(y)$. (Aquí no nos interesa *qué tanto* puede extenderse tal curva de intersección.)

Una primera posibilidad es que la superficie y el plano no tengan puntos en común. Por ejemplo, el paraboloide $z = F(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ se encuentra completamente por encima del plano x, y. Aquí no existe curva de intersección. Obviamente, sólo es necesario considerar los casos en los que exista al menos un punto (x_0, y_0) en el que $F(x_0, y_0) = 0$; el punto (x_0, y_0) constituye un "punto inicial" para la solución.

Conociendo una solución inicial, se tienen dos posibilidades: el plano tangente en el punto (x_0, y_0) es horizontal, o bien, no lo es. Si el plano tangente es horizontal, fácilmente puede ilustrarse por medio de ejemplos que puede ser imposible extender una solución $y = f(x)$ o $x = \phi(y)$ desde (x_0, y_0). Por ejemplo, el paraboloide $z = x^2 + y^2$ tiene la solución inicial $x = 0$, $y = 0$, pero no contiene a otro punto en el plano x, y. Como contraste, la superficie $z = xy$ con la solución inicial $x = 0, y = 0$ se intersecta con el plano x, y a lo largo de las rectas $x = 0$ y $y = 0$; pero en ninguna vecindad del origen

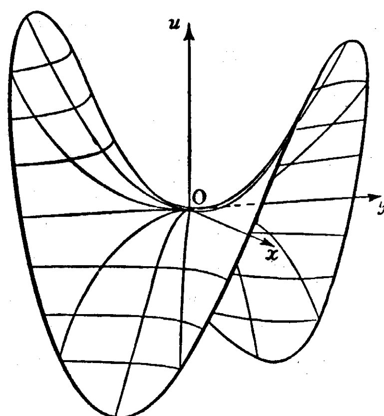


Figura 3.1 La superficie $u = xy$.

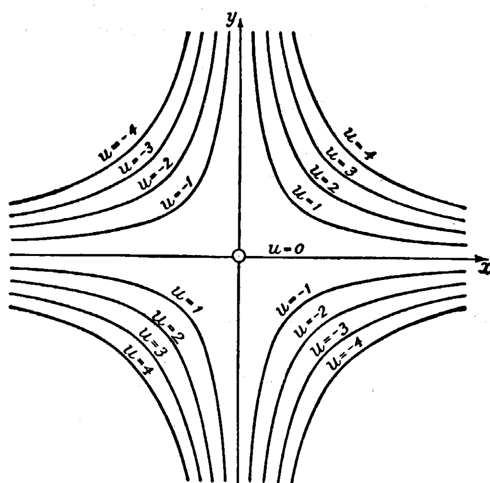


Figura 3.2 Líneas de contorno de $u = xy$.

puede representarse la intersección *completa* por una función $y = f(x)$ o por una función $x = \phi(y)$, (ver las Figs. 3.1 y 3.2). Por otra parte, es perfectamente posible que la ecuación $F(x, y) = 0$ tenga una solución de ese tipo, incluso cuando el plano tangente en el punto dado por la solución inicial sea horizontal, como en el caso $F(x, y) = (y - x)^4 = 0$. Por consiguiente, en el caso excepcional de un plano tangente horizontal no se puede hacer una proposición general definida.

La otra posibilidad es que el plano tangente en el punto dado por la solución inicial no sea horizontal. Entonces, imaginando intuitivamente la superficie $z = F(x, y)$ como aproximada por el plano tangente en una vecindad de la solución inicial, es de esperar que la superficie no pueda combarse lo suficientemente rápido como para evitar cortar el plano x,y cerca de (x_0, y_0) en una sola curva de intersección bien definida, y que una porción de la curva cerca de la solución inicial pueda representarse por la ecuación $y = f(x)$ o $x = \phi(y)$. Analíticamente, la afirmación de que el plano tangente no es horizontal significa que $F_x(x_0, y_0)$ y $F_y(x_0, y_0)$ no son ambas cero (ver la p. 74. Esta es la base para la discusión en la subsección siguiente.

Ejercicios 3.1b

1. Examinando la superficie de $z = f(x, y)$, determinar si la ecuación $f(x, y) = 0$ puede resolverse para y como una función de x en una vecindad del punto indicado (x_0, y_0), para
   (a) $f(x, y) = x^2 - y^2, \quad x_0 = y_0 = 0$
   (b) $f(x, y) = [\log (x + y)]^{1/2}, \quad x_0 = 1.5, \quad y_0 = -.5$
   (c) $f(x, y) = \operatorname{sen} [\pi (x + y)] - 1, \quad x_0 = y_0 = 1/4$
   (d) $f(x, y) = x^2 + y^2 - y, \quad x_0 = y_0 = 0.$

c. *El teorema de la función implícita*

Ahora se enunciarán las condiciones suficientes para la existencia de las funciones implícitas y, al mismo tiempo, se dará una regla para derivarlas:

Supóngase que $F(x, y)$ tiene derivadas continuas F_x y F_y en una vecindad de un punto (x_0, y_0), donde

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0. \tag{1}$$

Entonces, con centro en el punto (x_0, y_0), existe algún rectángulo

$$x_0 - \alpha \leqq x \leqq x_0 + \alpha, \quad y_0 - \beta \leqq y \leqq y_0 + \beta \tag{2}$$

tal que para cada x en el intervalo I dado por $x_0 - \alpha \leqq x \leqq x_0 + \alpha$, la ecuación $F(x, y) = 0$ tiene exactamente una solución $y = f(x)$ que se encuentra en el intervalo $y_0 - \beta \leqq y \leqq y_0 + \beta$. Esta f satisface la condición inicial $y_0 = f(x_0)$ y, para toda x en I,

(3) $$F(x, f(x)) = 0.$$

(3a) $$y_0 - \beta \leqq f(x) \leqq y_0 + \beta$$

(3b) $$F_y(x, f(x)) \neq 0.$$

Además, f es continua y tiene una derivada continua en I, dada por la ecuación

(4) $$y' = f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Este es un teorema de existencia estrictamente *local* para las soluciones de la ecuación $F(x, y) = 0$ en la vecindad de una solución inicial (x_0, y_0). No indica cómo hallar esa solución inicial o cómo decidir si la ecuación $F(x, y) = 0$ es satisfecha por cualquier (x, y) de alguna manera. Estas son cuestiones *globales* y que están más allá del alcance del teorema. Tambien, la *unicidad* y la *regularidad* de la solución $y = f(x)$, sólo pueden garantizarse localmente, es decir, cuando se restringe y al intervalo $y_0 - \beta < y < y_0 + \beta$. La necesidad de tales restricciones es evidente observando el sencillo ejemplo de la ecuación.

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Para toda x tal que $-1 < x < 1$, la ecuación tiene dos soluciones diferentes $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Se obtiene una solución uniforme $y = f(x)$, prescribiendo arbitrariamente uno de los signos en cada x. Es evidente que, de esta manera, se pueden encontrar soluciones que son discontinuas para toda x, eligiendo, por ejemplo, el signo positivo para x racional y el negativo para x irracional. Las soluciones continuas $y = f$ se obtienen si se restringe y a un signo constante. Puede fijarse este signo eligiendo para una x_0 dada en $-1 < x_0 < 1$, uno de los dos valores posibles y_0 para el cual $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Entonces se obtiene una solución continua única $y = f(x)$, con $y_0 = f(x_0)$, para toda x en $-1 < x < 1$, requiriendo que y satisfaga $x^2 + y^2 = 1$ y que tenga el mismo signo que y_0. Geométricamente, la gráfica de f es el semicírculo, superior o inferior, que contenga al punto (x_0, y_0). La función f tiene una derivada continua

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{f(x)}$$

para $-1 < x < 1$. Con y definida como cero para $x = \pm 1$, la solución $y = f(x)$ será continua en el intervalo cerrado $-1 \leqq x \leqq 1$.

Pero entonces, la derivada y' se vuelve infinita en los puntos extremos del intervalo, puesto que allí $F_y = 0$.

En la sección siguiente se probará el teorema general. Aquí sólo se observará que una vez que se ha establecido la existencia y la diferenciabilidad de la función $f(x)$ que satisface (3), puede encontrarse una expresión explícita para $f'(x)$, aplicando la regla de la cadena [ver (18), p. 83] para derivar a $F(x, y)$. Esto da

$$F_x + F_y f'(x) = 0,$$

y conduce a la fórmula (4), siempre que $F_y \neq 0$. De modo equivalente, si la ecuación $F(x, y) = 0$ determina a y como una función de x, se concluye que

$$dF = F_x\, dx + F_y\, dy = 0$$

y, de aquí, que

$$dy = \frac{dy}{dx}\, dx = -\frac{F_x}{F_y}\, dx.$$

Una función implícita $y = f(x)$ puede diferenciarse hasta cualquier orden dado, siempre que la función $F(x, y)$ posea derivadas parciales continuas de ese mismo orden. Por ejemplo, si $F(x, y)$ tiene primeras y segundas derivadas continuas en el rectángulo (2), el segundo miembro de la ecuación (4) es una función compuesta de x:

$$-\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}.$$

Dado que, por (3b), el denominador no se anula y supuesto que ya se sabe que $f(x)$ tiene una primera derivada continua, a partir de (4) se concluye que y' tiene una derivada continua; por la regla de la cadena, y'' está dada por

$$y'' = -\frac{F_y F_{xx} + F_y F_{xy} f' - F_x F_{xy} - F_x F_{yy} f'}{F_y^2}.$$

Sustituyendo f', por la expresión (4), se encuentra que

$$(5) \qquad y'' = -\frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}.$$

Las reglas (4) y (5) para encontrar las derivadas de una función implícita $y = f(x)$, pueden usarse siempre que se haya establecido la existencia de f en un intervalo a partir del teorema general sobre las funciones implícitas, incluso en los casos en donde es imposible expresar y explícitamente en términos de funciones elementales (funciones racionales, funciones trigonométricas, etc.). Aún si puede resolverse la ecuación $F(x, y) = 0$ explícitamente para y, comúnmente es más fácil encontrar las derivadas de y a partir de las fórmulas (4) y (5), sin usar representación explícita alguna de $y = f(x)$.

Ejemplos

1. La ecuación de la *lemniscata* (Volumen I, p. 102)

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

no se resuelve fácilmente para y. Para $x = 0$, $y = 0$ se obtiene $F = 0$, $F_x = 0$, $F_y = 0$. Aquí el teorema no es aplicable, como es de esperar en virtud de que por el origen pasan dos ramas diferentes de la lemniscata. No obstante, en todos los puntos de la curva donde $y \neq 0$, la regla se aplica, y la derivada de la función $y = f(x)$ está dada por

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{4x(x^2 + y^2) - 4a^2x}{4y(x^2 + y^2) + 4a^2y}.$$

A partir de esta ecuación puede obtenerse importante información acerca de la curva, sin usar la expresión explícita para y. Por ejemplo, podrían tenerse máximos o mínimos donde $y' = 0$, es decir, para $x = 0$ o para $x^2 + y^2 = a^2$. De la ecuación de la lemniscata, $y = 0$ cuando $x = 0$; pero en el origen no existen valores extremos (ver la Fig. 1.S.3, Volumen I, p. 103). Por lo tanto, las dos ecuaciones dan los cuatro puntos $\left(\pm \frac{a}{2}\sqrt{3}, \pm \frac{a}{2}\right)$ como los máximos y mínimos.

2. *La hoja de Descartes* tiene la ecuación

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

(ver la Fig. 3.3), con difíciles soluciones explícitas. En el origen, donde la curva se intersecta a sí misma, la regla no es aplicable ya que en ese punto $F = F_x = F_y = 0$. Para todos los puntos en los cuales $y^2 \neq ax$ se tiene

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

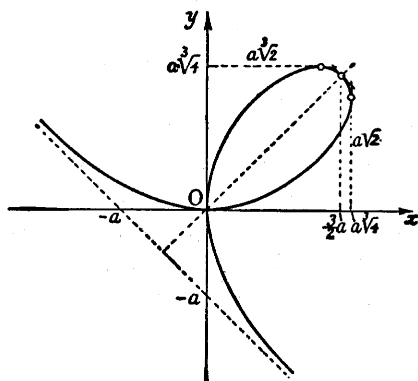


Figura 3.3 Hoja de Descartes.

En consecuencia, existe un cero de la derivada cuando $x^2 - ay = 0$, o bien, si se usa la ecuación de la curva, cuando

$$x = a\sqrt[3]{2}, \quad y = a\sqrt[3]{4}.$$

Ejercicios 3.1c

1. Probar que las ecuaciones siguientes tienen soluciones únicas para y, cerca de los puntos indicados:

   (a) $x^2 + xy + y^2 = 7 \qquad (2, 1)$
   (b) $x \cos xy = 0 \qquad (1, \pi/2)$
   (c) $xy + \log xy = 1 \qquad (1, 1)$
   (d) $x^5 + y^5 + xy = 3 \qquad (1, 1)$.

2. Encontrar las primeras derivadas de las soluciones en el Ejercicio 1 y dar sus valores en los puntos indicados.
3. Encontrar las segundas derivadas de las soluciones en el Ejercicio 1 y dar sus valores en los puntos indicados.
4. ¿Cuáles de las funciones definidas implícitamente del Ejercicio 1 son convexas en los puntos indicados?
5. Encontrar los valores máximo y mínimo de la función y que satisface la ecuación $x^2 + xy + y^2 = 27$.
6. Sea $f_y(x, y)$ continua en una vecindad del punto (x_0, y_0). Demostrar que la ecuación

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y)d\xi$$

determina a y como función de x en algún intervalo alrededor de $x = x_0$.

d. Demostración del teorema de la función implícita

La existencia de la función implícita se deduce directamente a partir del teorema del valor intermedio (ver el Volumen I, p. 44). Supóngase que $F(x, y)$ está definida y tiene primeras derivadas continuas en una vecindad del punto (x_0, y_0), y considérese que

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Sin pérdida de generalidad, supóngase que $m = F_y(x_0, y_0) > 0$. De lo contrario, remplácese simplemente la función F por $-F$, lo cual deja invariantes los puntos descritos por la ecuación $F(x, y) = 0$. Supuesto que $F_y(x, y)$ es continua, puede hallarse un rectángulo R con centro en (x_0, y_0) y lo suficientemente pequeño como para que R se encuentre por completo en el dominio de F, y $F_y(x, y) > m/2$ en todo r. Sea R el rectángulo

$$x_0 - a \leqq x \leqq x_0 + a, \quad y_0 - \beta \leqq y \leqq y_0 + \beta$$

(ver la Fig. 3.4). Supuesto que $F_x(x, y)$ también es continua, se concluye que F_x es acotada en R. Así, existen las constantes positivas m, M tales que

$$(6) \qquad F_y(x, y) > \frac{m}{2}, \quad |F_x(x, y)| \leqq M \quad \text{para} \quad (x, y) \text{ en } R.$$

Para cualquier x fija entre $x_0 - a$ y $x_0 + a$, la expresión $F(x, y)$ es una función continua y monótonamente creciente de y para $y_0 - \beta \leqq y \leqq y_0 + \beta$. Si

$$(7) \qquad F(x, y_0 + \beta) > 0, \quad F(x, y_0 - \beta) < 0,$$

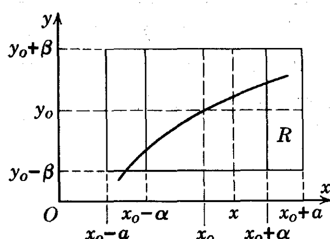


Figura 3.4

puede asegurarse que existe un solo valor y, intermedio entre $y_0 - \beta$ y $y_0 + \beta$, en el cual $F(x, y)$ se anula. Entonces, para la x dada, ecuación $F(x, y)$ tendrá una sola solución $y = f(x)$ para la cual

$$y_0 - \beta < y < y_0 + \beta.$$

Para probar (7) se observa que, por el teorema del valor medio,

$$F(x, y_0) = F(x, y_0) - F(x_0, y_0) = F_x(\xi, y_0)(x - x_0),$$

donde ξ es un valor intermedio entre x_0 y x. De aquí, si α denota un número entre 0 y a, se tiene

$$|F(x, y_0)| \leqq |F_x(\xi, y_0)|\,|x - x_0| \leqq M\alpha \qquad \text{para} \qquad |x - x_0| \leqq \alpha.$$

De modo semejante, de $F_y > m/2$ se deduce que

$$F(x, y_0 + \beta) = [F(x, y_0 + \beta) - F(x, y_0)] + F(x, y_0) > \frac{1}{2} m\beta - M\alpha,$$

$$F(x, y_0 - \beta) = -[F(x, y_0) - F(x, y_0 - \beta)] + F(x, y_0) < -\frac{1}{2} m\beta + M\alpha.$$

De donde las desigualdades (7) se cumplen para cualquier x en el intervalo $x_0 - \alpha \leqq x \leqq x_0 + \alpha$, siempre que se tome α lo suficientemente pequeña como para que $\alpha \leqq a$ y $\alpha < m\beta/2M$.

Para cualquier x tal que $|x - x_0| \leqq \alpha$, ésto prueba la existencia y la unicidad de una solución $y = f(x)$ de la ecuación $F(x, y) = 0$, para la cual $|y - y_0| \leqq \beta$ y $F_y(x, y) > m/2 > 0$. Para $x = x_0$ la ecuación $F(x, y) = 0$ tiene la solución $y = y_0$ correspondiente al punto inicial. Como, evidentemente, y_0 se encuentra entre $y_0 - \beta$ y $y_0 + \beta$, se ve que $f(x_0) = y_0$. Ahora se deducen la continuidad y la diferenciabilidad de $f(x)$ a partir del teorema del valor medio para funciones de varias variables, aplicado a $F(x, y)$ [ver (33), p.95]. Sean x y $x + h$ dos valores entre $x_0 - \alpha$ y $x_0 + \alpha$. Sean $y = f(x)$ y $y + k = f(x + h)$ los valores correspondientes de f, donde y y $y + k$ se encuentran entre $y_0 - \beta$ y $y_0 + \beta$. Entonces $F(x, y) = 0$, $F(x + h, y + k) = 0$. Se concluye que

$$\begin{aligned} 0 &= F(x + h, y + k) - F(x, y) \\ &= F_x(x + \theta h, y + \theta k)\, h + F_y(x + \theta h, y + \theta k) k, \end{aligned}$$

donde θ es un valor apropiado entre 0 y 1.[1]
Como $F_y \neq 0$, puede dividirse entre F_y y así encontrar que

$$\frac{k}{h} = -\frac{F_x(x + \theta h, y + \theta k)}{F_y(x + \theta h, y + \theta k)}. \tag{8}$$

Puesto que $|F_x| \leqq M$, $|F_y| > m/2$ para todos los puntos del rectángulo considerado, se encuentra que el segundo miembro está acotado por $2M/m$. De donde

$$|k| \leqq \frac{2M}{m}|h|.$$

De aquí que $k = f(x + h) - f(x) \to 0$ cuando $h \to 0$, lo cual demuestra que $y = f(x)$ es una función continua. De (8) se conluye que, para x fija y para $y = f(x)$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = -\lim_{h \to 0} \frac{F_x(x + \theta h, y + \theta k)}{F_x(x + \theta h, y + \theta k)} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

Esto establece la diferenciabilidad de f y, al mismo tiempo, proporciona la fórmula (4) para la derivada.

La demostración se sustenta en la hipótesis de que $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, de lo cual pudo concluirse que F_y tiene signo constante en una vecindad lo suficientemente pequeña de (x_0, y_0) y que $F(x, y)$, para x fija, es una función monótona de y.

La demostración nos dice simplemente que la función $y = f(x)$ existe. Es un ejemplo típico de un "teorema de existencia" puro, en el cual no se considera la posibilidad práctica de calcular la solución. Por supuesto, podría aplicarse cualquiera de los métodos numéricos discutidos en el Volumen I (pp. 494 y siguientes) para hallar una aproximación de la solución y de la ecuación $F(x, y) = 0$, para x fija.

Ejercicios 3.1d

1. Dar un ejemplo de una función $f(x, y)$ tal que (a) pueda resolverse (a) $f(x, y) = 0$ para y como una función de x cerca de $x = x_0$, $y = y_0$, y (b) $f_y(x_0, y_0) = 0$.

---

[1]Obsérvese que aquí se puede aplicar el teorema del valor medio, puesto que el segmento que une a dos puntos cualesquiera del rectángulo $|x - x_0| \leqq \alpha$, $|y - y_0| \leqq \beta$ se encuentra por completo dentro de éste.

2. Dar un ejemplo de una ecuación $F(x, y) = 0$ que pueda resolverse para y como una función $y = f(x)$ cerca de un punto (x_0, y_0), tal que f no sea diferenciable en x_0.
3. Sea $\phi(x)$ definida para todos los valores reales de x. Demostrar que la ecuación $F(x, y) = y^3 - y^2 + (1 + x^2)\, y - \phi(x) = 0$ define un valor único de y para cada valor de x.

e. El teorema de la función implícita para más de dos variables independientes

El teorema de la función implícita puede hacerse extensivo a una función de varias variables independientes, como sigue:

Sea $F(x, y, \ldots, z, u)$ una función continua de las variables independientes $x, y, \ldots z, u$, con derivadas parciales continuas $F_x, F_y, \ldots, F_z, F_u$. Sea $(x_0, y_0, \ldots, z_0, u_0)$ un punto interior del dominio de definición de F, para el cual

$$F(x_0, y_0, \ldots, z_0, u_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad F_u(x_0, y_0, \ldots, z_0, u_0) \neq 0.$$

Entonces puede marcarse un intervalo $u_0 - \beta \leqq u \leqq u_0 + \beta$ alrededor de u_0 y una región rectangular R que contenga a $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ en su interior, tales que para todo $(x, y, \ldots, z)$ en R se satisfaga la ecuación $F(x, y, \ldots, z, u) = 0$ por exactamente un valor de u en el intervalo $u_0 - \beta \leqq u \leqq u_0 + \beta$.[1] *Para este valor de u, el cual se denota por $u = f(x, y, \ldots, z)$, la ecuación*

$$F(x, y, \ldots, z, f(x, y, \ldots, z)) = 0$$

se cumple idénticamente en R; además,

$$u_0 = f(x_0, y_0, \ldots, z_0),$$

$$u_0 - \beta < f(x, y, \ldots, z) < u_0 + \beta; \; F_u(x, y, \ldots, z, f(x, y, \ldots, z)) \neq 0.$$

La función f es una función continua de las variables independientes $x, y, \ldots, z$, y posee derivadas parciales continuas dadas por las ecuaciones.

$$\text{(9a)} \qquad F_x + F_u f_x = 0, \; F_y + F_u f_y = 0, \ldots, F_z + F_u f_z = 0.$$

---

[1]El valor β y la región rectangular R no están determinados de modo único. La aseveración del teorema es válida si β es cualquier número positivo lo suficientemente pequeño y si se elige R (que depende de β) lo suficientemente pequeña.

La demostración sigue los mismos lineamientos que se dieron en la sección anterior para la solución de la ecuación $F(x, u) = 0$, y no presenta más dificultades.

Resulta sugerente combinar las fórmulas de derivación (9a) en la ecuación única

$$F_x\,dx + F_y\,dy + \cdots + F_z\,dz + F_u\,du = 0. \tag{9b}$$

O sea, si las variables $x, y, \ldots, z, u$, no son independientes entre sí sino que están sujetas a la condición $F(x, y, \ldots, z, u) = 0$, entonces las partes lineales de los incrementos de estas variables, de modo semejante, no son independientes sino que están relacionadas por medio de la ecuación lineal

$$dF = F_x\,dx + F_y\,dy + \cdots + F_z\,dz + F_u\,du = 0.$$

Si se remplaza du en (9b) por la expresión $u_x dx + u_y dy + \cdots + u_z dz$ y, a continuación, se iguala a cero el coeficiente de cada una de las diferenciales mutuamente independientes $dx, dy, \ldots, dz$ se obtienen nuevamente las fórmulas de derivación (9a).

Incidentalmente, el concepto de función implícita nos permite dar una definición general de *función algebraica*. Se dice que $u = f(x, y, \ldots)$ es una función *algebraica* de las variables independientes $x, y, \ldots$ si u puede definirse implícitamente por medio de una ecuación $F(x, y, \ldots, u) = 0$, donde F es un polinomio en los argumentos $x, y, \ldots, u$; brevemente, si u "satisface una ecuación algebraica". Una función que no satisface ecuación algebraica alguna se llama *trascendente.*

Como ejemplo, apliquemos las fórmulas de derivación establecidas a la ecuación de la esfera.

$$F(x, y, u) = x^2 + y^2 + u^2 - 1 = 0.$$

Para las derivadas parciales se obtiene

$$u_x = -\frac{x}{u}, \quad u_y = -\frac{y}{u},$$

y derivando aún más

$$u_{xx} = -\frac{1}{u} + \frac{x}{u^2}u_x = -\frac{x^2 + u^2}{u^3},$$

$$u_{xy} = \frac{x}{u^2}u_y = -\frac{xy}{u^3},$$

$$u_{yy} = -\frac{1}{u} + \frac{y}{u^2} u_y = -\frac{y^2 + u^2}{u^3}.$$

Ejercicios 3.1e

1. Demostrar que la ecuación $x + y + z = \text{sen } xyz$ puede resolverse para z cerca de (0, 0, 0). Encontrar las derivadas parciales de la solución.
2. Para cada una de las ecuaciones siguientes, examinar si tiene una solución única para z como una función de las variables restantes cerca del punto indicado:

   (a) $\text{sen } x + \cos y + \tan z = 0 \qquad (x = 0,\ y = \frac{\pi}{2},\ z = \pi)$

   (b) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - w = 0 \qquad (x = 1, y = 2, z = -1, w = 8)$

   (c) $1 + x + y = \cosh (x + z) + \text{senh} (y + z) \qquad (x = y = z = 0)$.
3. Demostrar que $x + y + z + xyz^3 = 0$ define a z implícitamente como una función de x y. x en una vecindad de (0, 0, 0). Desarrollar z hasta el cuarto orden en potencias de x y y.

3.2 Curvas y superficies en forma implícita

a. Curvas planas en forma implícita

La descripción de una curva plana por una ecuación de la forma $y = f(x)$ da preferencia asimétrica a una de las coordenadas. Se encontró (ver el Volúmen I, pp. 344-345) que la *tangente* y la *normal* a la curva están dadas, respectivamente por las ecuaciones

(10a) $$(\eta - y) - (\xi - x)f'(x) = 0$$

y

(10b) $$(\eta - y)f'(x) + (\xi - x) = 0,$$

donde ξ, η son las "coordenadas corrientes" de un punto arbitrario sobre la tangente o la normal, y x, y son las coordenadas del punto sobre de la curva. La *curvatura* de la curva es

(10c) $$k = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}$$

(ver el Volumen I, p. 357). Para un punto de inflexión se cumple la condición

(10d) $$f''(x) = 0$$

Ahora se obtendrán las fórmulas simétricas correspondientes para curvas representadas implícitamente por medio de una ecuación del tipo $F(x, y) = 0$. Se hace ésto bajo la suposición de que en el punto en cuestión F_x y F_y no son ambas 0, de modo que

(11) $$F_x^2 + F_y^2 \neq 0.$$

Si se supone que $F_y \neq 0$, digamos, puede sustituirse en (10*a*, *b*)$f'(x)$ por su valor dado en (4), p. 267, y, de inmediato, obtener la ecuación de la *tangente* en la forma

(12a) $$(\xi - x)F_x + (\eta - y)F_y = 0$$

y la de la *normal* en la forma

(12b) $$(\xi - x)F_y - (\eta - y)F_x = 0.$$

Para $F_y = 0$, $F_x \neq 0$ se obtienen las mismas ecuaciones, partiendo de la solución de la ecuación implícita $F(x, y) = 0$ en la forma $x = g(y)$.

Los *cosenos directores de la normal* a la curva en el punto (x, y) —es decir, los cosenos directores de la normal a la recta con ecuación (12a) en el plano ξ, η- están dados por

(12c) $$\cos \alpha = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}, \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}$$

(ver (20), p. 169). De modo semejante, los cosenos directores de la tangente a la curva —es decir, de la normal a la recta (12b)— son (12d).

(12d) $$\cos \beta = \frac{-F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}, \quad \operatorname{sen} \beta = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}.$$

En realidad se tienen dos direcciones normales a la curva en un punto dado, aquélla con los cosenos directores (12c) y la opuesta. La normal dada por (12c) tiene la misma dirección que el vector con componentes F_x, F_y, el *gradiente* de F (ver la p. 248). Se vió, en la p. 249, que la dirección del vector gradiente es aquella en la que F se incrementa más rápido; así, en un punto de la curva $F(x, y) = 0$ el gradiente apunta hacia la región $F > 0$ y lo mismo se cumple para la dirección normal determinada por las fórmulas (12c).

La fórmula (5), p. 268, proporcionó la expresión para la segunda derivada, $y'' = f''(x)$, de una función dada en la forma implícita $F(x, y) = 0$. Se deduce que la condición necesaria, $f'' = 0$, para la

ocurrencia de un punto de inflexión, puede escribirse como

$$F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy} = 0 \tag{13}$$

para curvas dadas implícitamente. En esta fórmula no hay preferencia por ninguna de las dos variables x, y. Es completamente simétrica y ya no requiere la hipótesis de que $F_y \neq 0$. Por supuesto, esta característica simétrica refleja el hecho de que la noción de punto de inflexión tiene un significado geométrico bastante independiente de cualquier sistema coordenado.

Si se sustituye la fórmula (5) para $f''(x)$ en la fórmula (10c) para la curvatura k de la curva, nuevamente se obtiene una expresión[1] simétrica en x y y,

$$k = \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}. \tag{14a}$$

Introduciendo el *radio de curvatura*

$$\rho = \frac{1}{k}, \tag{14b}$$

se encuentran las coordenadas ξ, η del *centro de curvatura*, el punto sobre la normal interior que se encuentra a la distancia ρ de (x, y) (ver el Volumen I, p. 358),

$$\xi = x - \rho \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}, \quad \eta = y - \rho \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \tag{14c}$$

Si en lugar de la curva $F(x, y) = 0$, se considera la curva

$$F(x, y) = c,$$

donde c es una constante, todo en las discusiones precedentes permanece igual. Sólo tiene que remplazarse la función $F(x, y)$ por $F(x, y) - c$, la cual tiene las mismas derivadas que la función original. l. Por tanto, para estas curvas, la forma de las ecuaciones de la tangente (normal, etc.) son exactamente las mismas que se dieron.

[1]Para el signo de la curvatura, véase el Volumen I, p. 357. La curvatura k, definida por la fórmula (14a), es positiva si F crece sobre el lado "externo" de la curva, es decir, si la tangente a la curva cerca del punto de contacto se encuentra en la región $F \geqq 0$.

La clase de todas las curvas $F(x, y) - c = 0$ que se obtienen cuando se deja que c recorra todos los valores de un intervalo, forma la familia de "líneas de contorno", o "curvas de nivel", de la función $F(x, y)$; (ver la p. 40). Más generalmente, a partir de una ecuación de la forma

$$F(x, y, c) = 0,$$

la cual para cada valor constante del parámetro c proporciona una curva Γ_c en forma implícita, *se obtiene una familia uniparamétrica de curvas.* Para un punto (x, y) que se encuentra sobre la curva Γ_c —es decir, que satisface la ecuación $F(x, y, c) = 0$— se aplican todas las fórmulas antes deducidas. En particular, el vector gradiente $(F_x(x, y, c), F_y(x, y, c))$ es normal a Γ_c en el punto (x, y).

Como ejemplo, considérese la elipse

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{15a}$$

Por (12a), la ecuación de la tangente en el punto (x, y) es

$$(\xi - x)\frac{x}{a^2} + (\eta - y)\frac{y}{b^2} = 0;$$

de aquí que, de (15a),

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1.$$

De (14a) se encuentra que la curvatura es

$$k = \frac{a^4 b^4}{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{3/2}}. \tag{15b}$$

Si $a > b$, ésta tiene su valor máximo a/b^2 en los vértices $y = 0, x = \pm a$. Su valor mínimo b/a^2 ocurre en los otros vértices $x = 0$, $y = \pm b$.

Si dos curvas $F(x, y) = 0$ y $G(x, y) = 0$ se intersectan en el punto (x, y), el *ángulo entre las curvas* se define como el ángulo ω formado por sus tangentes (o normales) en el punto de intersección. Si se recuerda que los gradientes dan la dirección de la normal y se aplica la fórmula (7), p. 162, para el ángulo entre dos vectores, se encuentra que

(16) $$\cos\omega = \frac{F_xG_x + F_yG_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}\,\sqrt{G_x^2 + G_y^2}}.$$

Aquí cos ω queda determinado de modo único si se escoge ω como el ángulo entre las normales de las dos curvas en las direcciones en que se incrementan F y G.

Poniendo $\omega = \pi/2$ en (16), se obtiene la condición para la ortogonalidad, es decir, para que las curvas se intersequen a ángulos rectos en el punto (x, y):

(16a) $$F_xG_x + F_yG_y = 0.$$

Si las curvas *se tocan* —es decir, tienen tangente y normal conmunes en el punto donde se encuentran— sus vectores gradiente (F_x, F_y) y (G_x, G_y) deben ser paralelos. Esto conduce a la condición

(16b) $$F_xG_y - F_yG_x = 0.$$

Como ejemplo, considérese la familia de parábolas

(17a) $$F(x, y, c) = y^2 - 2c\left(x + \frac{c}{2}\right) = 0$$

(ver la Fig. 3.9, p. 292), las cuales tienen todas al origen como foco ("parábolas confocales"). Si $c_1 > 0$ y $c_2 < 0$, las dos parábolas

$$F(x, y, c_1) = y^2 - 2c_1\left(x + \frac{c_1}{2}\right) = 0$$

y

$$F(x, y, c_2) = y^2 - 2c_2\left(x + \frac{c_2}{2}\right) = 0$$

se cortan perpendicularmente en dos puntos; porque en los puntos de intersección

$$x = -\frac{1}{2}(c_1 + c_2), \quad y^2 = -c_1c_2,$$

y de aquí que

$$F_x(x, y, c_1)\,F_x(x, y, c_2) + F_y(x, y, c_1)\,F_y(x, y, c_2)$$
$$= 4(c_1 c_2 + y^2) = 0.$$

Por (14a), la curvatura de la parábola (17a) está dada por

$$k = \frac{c^2}{(c^2 + y^2)^{3/2}}.$$

En el *vértice* $x = -c/2$, $y = 0$, ésto se reduce a

$$k = \frac{1}{|c|}.$$

Entonces, el centro de curvatura o centro del *círculo osculador* en el vértice tiene, por (14c), las coordenadas

$$\xi = -\frac{c}{2} + |c| \operatorname{sgn} c = \frac{c}{2}, \qquad \eta = 0,$$

de modo que el foco (0, 0) se encuentra a la mitad entre el vértice y el centro de curvatura.

Ejercicios 3.2a

1. Encontrar las ecuaciones de la tangente y de la normal para las curvas dadas implícitamente por medio de las relaciones que siguen:

   (a) $x^2 + 2y^2 - xy = 0$

   (b) $e^x \operatorname{sen} y + e^y \cos x = 1$

   (c) $\cosh(x + 1) - \operatorname{sen} y = 0$

   (d) $x^2 + y^2 = y + \operatorname{sen} x$

   (e) $x^3 + y^4 = \cosh y$

   (f) $x^y + y^x = 1.$

2. Calcular la curvatura de la curva

$$\operatorname{sen} x + \cos y = 1$$

   en el origen.
3. Encontrar la curvatura de la curva que está dada en coordenadas polares por la ecuación $f(r, \theta) = 0$.
4. Probar que las intersecciones de la curva

$$(x + y - a)^3 + 27axy = 0$$

   con la recta $x + y = a$ son inflexiones de la curva.
5. Determinar a y b, de modo que las cónicas

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 10x - 10y + 11 = 0$$
$$(y + bx - 1 - b)^2 - a(by - x + 1 - b) = 0$$

   se corten ortogonalmente en el punto (1, 1) y tengan la misma curvatura en este punto.
6. Sean K' y K'' dos círculos que tienen dos puntos A y B en común. Demostrar que si un círculo K es ortogonal a K' y K'', entonces también es ortogonal a todo círculo que pasa por A y B.

b. Puntos singulares de curvas

En muchas de las fórmulas de la sección anterior aparece en el denominador la expresión $F_x^2 + F_y^2$. En consecuencia, es de esperar que ocurra algo desusado cuando esta cantidad se anula, es decir, cuando $F_x = 0$ y $F_y = 0$ en un punto de la curva $F(x,y) = 0$. En un punto así, la expresión $y' = -F_x/F_y$ para la pendiente de la tangente pierde su significado.

Se dice que un punto P de una curva es *regular*, si en una vecindad de P la variable x, o bien la variable y, puede representarse como una función continuamente diferenciable de la otra. En ese caso la curva tiene una tangente en P y es, con bastante precisión, aproximada por esa tangente en una vecindad de P. Si un punto de la curva no es regular se dice que es *singular* o que es una *singularidad*.

Por el teorema de la función implícita se sabe que si $F(x, y)$ tiene primeras derivadas parciales continuas, entonces un punto de la curva $F(x, y) = 0$ es regular si en ese punto $F_x^2 + F_y^2 \neq 0$, porque si $F_y \neq 0$ en P, puede resolverse la ecuación $F(x, y) = 0$ y obtenerse una solución única continuamente diferenciable, $y = f(x)$. De modo semejante, si $F_x \neq 0$ puede resolverse la ecuación para x.

Un tipo importante de singularidad es un *punto múltiple*, es decir, un punto por el cual pasan dos o más ramas de la curva. Por ejemplo, el origen es un punto múltiple de la lemniscata (Volumen I, p. 102)

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Es evidente que en la vecindad de un punto múltiple no puede expresarse la ecuación de la curva de modo único en la forma $y = f(x)$ o $x = g(y)$.

Un ejemplo de una singularidad que no es un punto múltiple lo proporciona la curva cúbica

$$F(x, y) = y^3 - x^2 = 0;$$

(ver la Fig. 3.5). Aquí, en el origen $F_x = F_y = 0$. Resolviendo para x, y puede ponerse la ecuación de la curva en la forma

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x^2},$$

donde f es continua pero no diferenciable en el origen. La curva tiene una *cúspide* en ese punto.

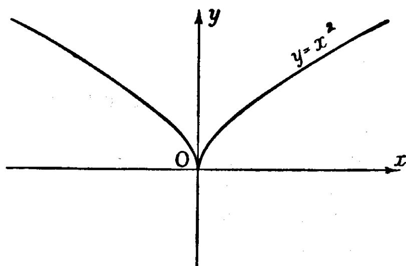


Figura 3.5 La curva $y^3 - x^2 = 0$.

Una curva *puede ser regular* en un punto donde tanto F_x como F_y se anulan. Esto lo ejemplifica

$$F(x, y) = y^3 - x^4 = 0.$$

Nuevamente aquí, $F_x = F_y = 0$ en el origen. Pero resolviendo para y se encuentra

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x^4},$$

donde $f(x)$ es continuamente diferenciable para toda x. De donde el origen es un punto regular. Como F es una función par de x, la curva es simétrica con respecto al eje y. Es convexa y toca al eje x en el origen, como la parábola $y = x^2$. Sin embargo, el origen es un punto algo especial para la curva, puesto que allí f'' se vuelve infinita y la curva tiene *curvatura infinita.*

El ejemplo trivial de la ecuación

$$F(x, y) = (y - x)^2 = 0$$

que representa a la recta $y = x$ muestra que no tiene que asociarse comportamiento peculiar alguno con los puntos de una curva $F(x, y) = 0$ para la cual $F_x^2 + F_y^2 = 0$. En el Apéndice 3 se tratarán los puntos singulares más sistemáticamente.

Ejercicios 3.2b

1. Discutir los puntos singulares de las curvas siguientes en el origen:

   (a) $F(x, y) = ax^3 + by^3 - cxy = 0$

   (b) $F(x, y) = (y^2 - 2x^2)^2 - x^5 = 0$

   (c) $F(x, y) = (1 + e^{1/x})y - x = 0$

(d) $F(x, y) = y^2(2a - x) - x^3 = 0$

(e) $F(x, y) = (y - 2x)^2 - x^5 = 0$.

2. La curva $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ tiene un punto doble en el origen. ¿Cuáles son sus tangentes allí?
3. Trazar una gráfica de la curva $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$, y mostrar que tiene una cúspide en el origen. ¿Cuál es la peculiaridad de esta cúspide al compararla con la cúspide de la curva $x^2 - y^3 = 0$?
4. Demostrar que cada una de las curvas

$$(x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha - b)^3 = c(x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha)^2,$$

donde α es un parámetro y b, c son constantes, tiene una cúspide y que todas las cúspides se encuentran sobre un círculo.
5. Sea (x, y) un punto doble de la curva $F(x, y) = 0$. Calcular el ángulo ϕ entre las dos tangentes en (x, y), suponiendo que no todas las segundas derivadas de F se anulan en (x, y). Encontrar el ángulo entre las tangentes en el punto doble
   (a) de la lemniscata,
   (b) de la hoja de Descartes (ver la p. 269).
6. Hallar la curvatura en el origen de cada una de las dos ramas de la curva

$$y(ax + by) = cx^3 + ex^2y + fxy^2 + gy^3.$$

c. *Representación implícita de superficies*

Hasta ahora, normalmente hemos representado una superficie en el espacio x, y, z por medio de una función $z = f(x, y)$. Puede resultar inconveniente, para una superficie dada en el espacio, la preferencia por coordenada z implicada en esta representación. Es más natural y más general representar las superficies en el espacio implícitamente por medio de ecuaciones de la forma $F(x, y, z) = 0$ ó $F(x, y, z) =$ constante. Por ejemplo, es mejor representar una esfera alrededor del origen por medio de la ecuación simétrica $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ que por $z = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. La representación explícita de la superficie aparece entonces como la representación implícita especial $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$.

Con el fin de deducir la ecuación del plano tangente en un punto P de la superficie $F(x, y, z) = 0$, se hace la suposición de que en ese punto

$$F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \neq 0, \tag{18}$$

es decir, que al menos una de las derivadas parciales no es 0.[1] Si,

[1]Precisamente como para las curvas, la anulación del gradiente de F por lo común corresponde a un comportamiento singular de la superficie. No se discutirá la naturaleza de tales singularidades.

digamos, $F_z \neq 0$, puede encontrarse una ecuación explícita $z = f(x, y)$ para la superficie cerca de P. El plano tangente en P tiene la ecuación

$$\zeta - z = (\xi - x)f_x + (\eta - y)f_y \tag{19a}$$

en las coordenadas corrientes ξ, η, ζ (ver la p. 74). Sustituyendo las derivadas de f por sus valores $f_x = -F_x/F_z$, $f_y = -F_y/F_z$, de acuerdo con las fórmulas (9a), p. 274, se obtiene la ecuación del plano tangente en la forma

$$(\xi - x)F_x + (\eta - y)F_y + (\zeta - z)F_z = 0. \tag{19b}$$

La normal al plano tangente (19b) tiene la misma dirección que el vector gradiente (F_x, F_y, F_z) (ver la p. 168). De aquí que los cosenos directores de la normal están dados por las expresiones

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \tag{19c}$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}.$$

Aquí, más precisamente, se ha tomado esa normal del plano que apunta en la dirección de F *creciente* (ver la p. 249).

Si dos superficies $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ se cortan en un punto, el *ángulo* ω *entre las superficies* se define como el ángulo entre sus planos tangentes o, lo que es lo mismo, el ángulo entre sus normales. Este está dado por

$$\cos\omega = \frac{F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\ \sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}}. \tag{20a}$$

En particular, la condición de perpendicularidad (ortogonalidad) es

$$F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z = 0. \tag{20b}$$

En lugar de una superficie dada por una ecuación $F(x, y, z) = 0$, puede considerarse, con mayor generalidad, superficies dadas por $F(x, y, z) = c$, donde c es una constante. Valores diferentes de c proporcionan *superficies de nivel* diferentes para la función F (ver la p. 41. En cualquier punto (x, y, z) el vector gradiente (F_x, F_y, F_z) es normal a la superficie de nivel que pasa por ese punto. De modo semejante, la ecuación (19b) da el plano tangente a la superficie de nivel.

Como un ejemplo, considérese la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Por (19b), el plano tangente en el punto (x, y, z) es

$$(\xi - x)2x + (\eta - y)2y + (\zeta - z)2z = 0\ ,$$

o bien,

$$\xi x + \eta y + \zeta z = r^2.$$

Los cosenos directores de la normal son proporcionales a x, y, z, es decir, la normal coincide con el radio vector trazado desde el origen al punto (x, y, z).

Para el *elipsoide* más general con los ejes coordenados como ejes principales,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\ ,$$

la ecuación del plano tangente es

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} + \frac{\zeta z}{c^2} = 1.$$

Ejercicios 3.2c

1. Encontrar el plano tangente
   (a) de la superficie

$$x^3 + 2xy^2 - 7z^3 + 3y + 1 = 0$$

   en el punto (1, 1, 1);
   (b) de la superficie

$$(x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2 + 7xy + 3x + z^4 - z = 14$$

   en el punto (1, 1, 1);
   (c) de la superficie

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos (y + z) = \frac{3}{4}$$

   en el punto $(\pi/6, \pi/3, 0)$.
   (d) de la superficie

$$1 + x \cos \pi z + y \operatorname{sen} \pi z - z^2 = 0$$

   en el punto (0, 0, 1);
   (e) de la superficie

$$\cos x + \cos y + 2 \operatorname{sen} z = 0$$

en el punto $(0, 0, -\pi/2)$;
(f) de la superficie

$$x^2 + y^2 = z^2 + \operatorname{sen} z$$

en el punto $(0, 0, 0)$.

2. Probar que las tres superficies de la familia de superficies

$$\frac{xy}{z} = u, \quad \sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} = v, \quad \sqrt{x^2 + z^2} - \sqrt{y^2 + z^2} = w$$

que pasan por un solo punto son ortogonales entre sí.

3. Los puntos A y B se mueven uniformemente con la misma velocidad; A parte del origen y se mueve a lo largo del eje z, B parte del punto $(a, 0, 0)$ y se mueve paralelamente al eje y. Encontrar la superficie generada por las rectas que los unen.
4. Demostrar que el plano tangente en cualquier punto de la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ intersecta a ésta en dos rectas.
5. Si $F(x, y, z) = 1$ es la ecuación de una superficie, siendo F una función homogénea de grado h, entonces el plano tangente en el punto (x, y, z) está dado por

$$\xi F_x + \eta F_y + \zeta F_z = h.$$

6. Sea z definida como una función de x y y por medio de la ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0.$$

Expresar z_x y z_y como funciones de x, y, z.

7. Hallar el ángulo de intersección de las siguientes parejas de superficies, en los puntos indicados:

(a) $2x^4 + 3y^3 - 4z^2 = -4, \quad 1 + x^2 + y^2 = z^2$, en $(0, 0, 1)$
(b) $x^y + y^z = 2, \quad \cosh(x + y - 2) + \operatorname{senh}(x + z - 1) = 1$, en $(1, 1, 0)$
(c) $x^2 + y^2 = e^z, \quad x^2 + z^2 = e^y$, en $(1, 0, 0)$
(d) $1 + \operatorname{senh}(x/\sqrt{z}) = \cosh(y/\sqrt{z}), \quad x^2 + y^2 = z^2 - 1$, en $(0, 0, 1)$
(e) $\cos \pi(x^2 + y) + \operatorname{sen} \pi(x^2 + z) = 1, \quad x^3 + y^3 = z^3$ en $(0, 0, 0)$.

3.3 Sistemas de funciones, transformaciones y aplicaciones

a. Observaciones generales

Los resultados que se han obtenido para las funciones implícitas ahora nos permiten considerar *sistemas* de funciones, es decir, discutir varias funciones simultáneamente. En esta sección se considerará el caso particularmente importante de los sistemas en los cuales el número de funciones es igual al número de variables independientes.

Empecemos por investigar el significado de tales sistemas en el caso de dos variables independientes. Si las dos funciones

(21a) $$\xi = \phi(x, y) \quad \text{y} \quad \eta = \psi(x, y)$$

son ambas continuamente diferenciables en un conjunto R del plano x, y, el *dominio* de las funciones, este sistema de funciones puede interpretarse de dos maneras diferentes. La primera interpretación ("activa") es por medio de una *aplicación* o *transformación*. (La segunda, como una transformación de coordenadas, se discutirá en la p. 246.) Al punto P con coordenadas (x, y) en el plano x, y le corresponde el punto imagen Π con coordenadas (ξ, η) en el plano ξ, η

Un ejemplo es la aplicación o transformación *afín*

$$\xi = ax + by, \quad \eta = cx + dy$$

donde a, b, c, d son constantes (ver la p. 183).

Frecuentemente (x, y) y (ξ, η) se interpretan como puntos de uno y el mismo plano. En este caso se habla de *una aplicación o una transformación del plano x,y hacia sí mismo.*

El problema fundamental relacionado con una aplicación es el de su inversión, o sea, la cuestión de cuándo y cómo, en virtud de las ecuaciones $\xi = \phi(x, y)$ y $\eta = \psi(x, y)$, x y y pueden considerarse como funciones de ξ y η, y cómo determinar las propiedades de estas funciones inversas.

Si cuando (x, y) varía sobre el dominio R de la aplicación, las imágenes (ξ, η) varían sobre un conjunto B en el plano ξ, η, se dice que B es el *conjunto imagen* de R o el *recorrido* de la aplicación. Si dos puntos diferentes de R siempre corresponden a *dos puntos diferentes* de B, entonces para cada punto (ξ, η) de B existe un *solo* punto (x, y) de R para el cual (ξ, η) es la imagen. (El punto (x, y) se llama *imagen inversa*, por contraposición a la *imagen.*) Es decir, pueden invertirse la aplicación de modo único, determinando a x y y como las funciones

(21b) $$x = g(\xi, \eta), \quad y = h(\xi, \eta),$$

las cuales están definidas en B. Entonces se dice que la aplicación (21b) tiene una *inversa única* o que es una aplicación uno a uno, y a la transformación (21b) se le da el nombre de *transformación* o *aplicación inversa* de la original.

Si en esta aplicación el punto $P = (x, y)$ describe una curva en el dominio R, normalmente su punto imagen (ξ, η) describirá también una curva en el conjunto B, que se llama *curva imagen* de la primera. Por ejemplo, a la recta $x = c$, que es paralela al eje y, le corresponde en el plano ξ, η la curva dada en forma paramétrica por las ecuaciones

(22a) $$\xi = \phi(c, y), \quad \eta = \psi(c, y),$$

donde y es el parámetro. De la misma manera, a la recta $y = k$ le corresponde la curva

(22b) $$\xi = \phi(x, k), \quad \eta = \psi(x, k).$$

Si a c y k se les asignan sucesiones de valores equidistantes c_1, c_2, c_3, . . . y k_1, k_2, k_3, . . ., entonces la "red de coordenadas" que consiste de las rectas $x =$ constante y $y =$ constante (por ejemplo, la red de rectas en un papel milimétrico común) da lugar a una red correspondiente de curvas, la red curvilínea, en el plano ξ, η (Figs. 3.6 y 3.7). Las dos familias de curvas pueden escribirse en forma implícita. Si se representa la aplicación inversa por las ecuaciones (21b), las ecuaciones de las curvas son simplemente

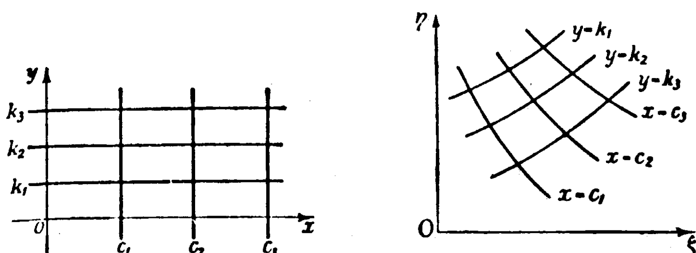


Figura 3.6 y **Figura 3.7** Redes de curvas $x =$ constante y $y =$ constante en el plano x, y y el plano ξ, η.

(22c) $$g(\xi, \eta) = c \qquad \text{y} \qquad h(\xi, \eta) = k,$$

respectivamente. En muchas situaciones la red curvilínea proporciona una *imagen geométrica* útil de la aplicación (21a), preferible a la interpretación de las ecuaciones como una superficie bidimensional en el espacio tetradimensional x, y, ξ, η.

De la misma manera, las dos familas de rectas $\xi = \gamma$ y $\eta = \kappa$ en el plano ξ, corresponden a las dos familias de curvas

$$\phi(x, y) = \gamma \qquad \text{y} \qquad \psi(x, y) = \kappa$$

en el plano x, y.

Como ejemplo, considérese la *inversión* (también llamada *aplicación por radios recíprocos* o *reflexión con respecto al círculo unitario*). Esta transformación está dada por las ecuaciones

$$\text{(23a)} \qquad \xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Al punto $P = (x, y)$ le corresponde el punto $\Pi = (\xi, \eta)$ que se encuentra sobre el mismo rayo y que satisface la ecuación

$$\text{(23b)} \qquad \xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{x^2 + y^2} \qquad \text{o} \qquad O\Pi = \frac{1}{OP};$$

de donde, la longitud del vector de posición $\overrightarrow{OP}$ es el recíproco de la longitud del vector de posición $\overrightarrow{O\Pi}$. Los puntos en el interior del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ se aplican sobre puntos en el exterior del círculo, y viceversa. De (23b), se encuentra que la *transformación inversa* es

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \qquad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2},$$

la cual nuevamente es una inversión; es decir, la imagen inversa de un punto coincide con su imagen.

Como dominio R de la aplicación (23a) puede tomarse el plano x, y completo, con excepción del origen, y como recorrido B el plano ξ, η completo pero también excluyendo el origen. Las rectas $\xi = \gamma$ y $\eta = \kappa$ en el plano ξ, η corresponden respectivamente a los círculos

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{\gamma} x = 0 \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 - \frac{1}{\kappa} y = 0$$

en el plano x, y De la misma manera, la red coordenada rectilínea en el plano x, y corresponde a las dos familias de círculos que tocan al eje ξ y al eje η en el origen.

Como un ejemplo más, considérese la aplicación

$$\xi = x^2 - y^2, \quad \eta = 2xy.$$

Las curvas $\xi =$ constante dan lugar en el plano x, y a las hipérbolas rectangulares $x^2 - y^2 =$ constante, cuyas asíntotas son las rectas $x = y$ y $x = -y$. Las rectas $\eta =$ constante también corresponden a una familia de hipérbolas rectangulares que tienen a los ejes coordenados como asíntotas. Las hipérbolas de cada familia cortan a las de la otra familia a ángulos rectos (Fig. 3.8). Las rectas paralelas a los ejes en el plano x, y corresponden a dos familias de parábolas en el plano ξ, η: las parábolas $\eta^2 = 4c^2(c^2 - \xi)$ corresponden a las rectas $x = c$ y las pa rábolas $\eta^2 = 4k^2(k^2 + \xi)$ corresponden a las rectas $y = k$. Todas estas parábolas tienen al origen como foco y al eje ξ como eje; forman una familia de parábolas confocales y coaxiales (Fig. 3.9).

Las transformaciones uno a uno tienen una importante interpretación y aplicación en la representación de las *deformaciones o movimientos de sustancias distribuídas de modo continuo,* como los fluidos. Si se imagina una sustancia de este tipo como si estuviera dispersa, en un instante dado, sobre una región R y, a continuación fuera deformada por un movimiento, en general la sustancia dispersa originalmente sobre R cubrirá una región B diferente de R. Cada partícula de la sustancia puede distinguirse, al principio del movimiento, por medio de sus coordenadas (x, y) en R, y al final del movimiento, por sus coordenadas (ξ, η) en B. El carácter biunívoco de la transformación obtenida al llevar (x, y) a corresponder con (ξ, η)

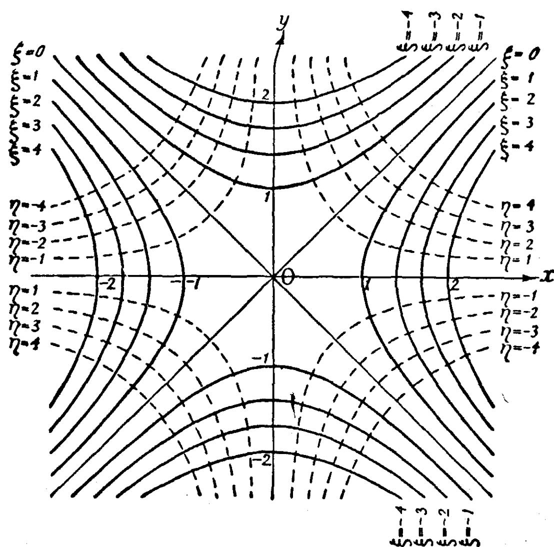


Figura 3.8 Familias ortogonales de hipérbolas rectangulares.

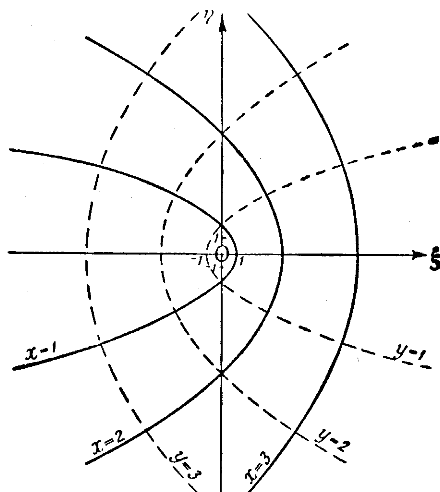


Figura 3.9 Familias ortogonales de parábolas confocales.

es simplemente la expresión matemática del hecho físico obvio de que partículas separadas permanecen separadas.

Ejercicios 3.3a

1. Encontrar las curvas imagen de las rectas $x =$ const., $y =$ const. bajo las transformaciones siguientes:

   (a) $\xi = e^x \cos y, \qquad \eta = e^x \operatorname{sen} y$

   (b) $\xi = (x - y)/2, \qquad \eta = \sqrt{xy}$

   (c) $\xi = \sqrt{x/y}, \qquad \eta = \cos(x + y)$

   (d) $\xi = x + y^2, \qquad \eta = y + x^2 - 1$

   (e) $\xi = x^y, \qquad \eta = y^x$

   (f) $\xi = \operatorname{senh} x, \qquad \eta = \cosh y$

   (g) $\xi = \operatorname{sen}(x + y), \qquad \eta = \cos(x - y)$

   (h) $\xi = e^{\cos x}, \qquad \eta = e^{\operatorname{sen} y}$.

2. Hallar la imagen de la región limitada por la curva $\cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 y = 1$ bajo la aplicación $\xi = e^x$, $\eta = e^y$.
3. Hallar la imagen del rectángulo $1 \leqq x \leqq 3$, $4 \leqq y \leqq 16$, bajo la aplicación $\xi = \sqrt{x + y}, \qquad \eta = \sqrt{y - x}$.
4. ¿Es biunívoca la transformación $\xi = x - xy$, $\eta = 2xy$?

b. Coordenadas curvilíneas

Intimamente relacionada con la primera interpretación (como una aplicación) del sistema de ecuaciones $\xi = f(x, y), \eta = \psi(x, y)$, está la segunda interpretación, como una *transformación de coordenadas* en el plano. Si sucede que las funciones φ y ψ no son lineales, ésta ya no es una transformación "afin" sino una *transformación a coordenadas curvilíneas generales.*

Nuevamente se supone que cuando (x, y) varía sobre una región R del plano x, y, el punto correspondiente (ξ, η) varía sobre una región B del plano ξ, η, y también que para cada punto de B puede determinarse de modo único el correspondiente (x, y) en R; en otras palabras, que la transformación es uno a uno. Una vez más, la transformación inversa se denota por $x = g(\xi, \eta)$, $y = h(\xi, \eta)$.

Por *coordenadas de un punto P* en una región R ahora debe entenderse cualquier pareja de números que sirva para especificar la posición del punto P en R, de modo único con respecto a un marco coordenado dado. Las coordenadas rectangulares constituyen el sistema más sencillo de coordenadas que se extienden sobre todo el plano. Otro sistema familiar es el sistema de coordenadas polares en el plano x, y, introducidas por las ecuaciones

$$\xi = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\eta = \theta = \text{arc tan } y/x \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi).$$

Cuando se da un sistema de funciones $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ como las anteriores, en general, a cada punto $P(x, y)$ pueden asignársele los valores correspondientes (ξ, η) como nuevas coordenadas, porque cada pareja de valores (ξ, η) que pertenece a la región B determina de modo único a la pareja (x, y), y, por tanto, determina de modo único la posición del punto P en R. Entonces "las líneas coordenadas" ξ = constante y η = constante quedan representadas en el plano x, y por medio de dos familias de curvas, las cuales se definen implícitamente por las ecuaciones $\phi(x,y)$ = constante y $\psi(x,y)$ = constante, respectivamente. Estas curvas coordenadas cubren la región R con una red coordenada (generalmente curva), por lo cual las coordenadas (ξ, η) también se conocen como *coordenadas curvilíneas* en R.

Una vez más se hará notar la íntima relación que tienen estas dos interpretaciones del sistema de ecuaciones. Las curvas en el plano ξ, η, *que en la aplicación corresponden a rectas paralelas a los ejes en*

el plano x, y, pueden considerarse directamente como las curvas coordenadas para las coordenadas curvilíneas $x = g(\xi, \eta)$, $y = h(\xi, \eta)$ en el plano ξ, η; inversamente, las curvas coordenadas del sistema curvilíneo $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ en el plano x, y, bajo la aplicación son las imágenes de las rectas paralelas a los ejes en el plano ξ, η. Incluso en la interpretación de (ξ, η) como coordenadas curvilíneas en el plano x,y, debe considerarse un plano ξ,η y una región B de ese plano en la cual puede variar el punto con coordenadas (ξ,η), si se desea mantener clara la situación. La diferencia está principalmente en el punto de vista.* Si se está interesado primordialmente en la región R del plano x, y, simplemente se consideran ξ, η como un nuevo medio de localizar los puntos en la región R, siendo entonces la región B del plano ξ, η simplemente subsidiaria; mientras que si se está igualmente interesado en las dos regiones R y B en los planos x,y y ξ, η, respectivamente, es preferible considerar el sistema de ecuaciones como si especificara una correspondencia entre las dos regiones, es decir, una aplicación de una sobre la otra. No obstante, a menudo es preferible tener presentes al mismo tiempo las dos interpretaciones, aplicación y transformación de coordenadas.

Si, por ejemplo, se introducen las coordenadas polares (r, θ) y se interpretan r y θ como coordenadas rectangulares en un plano r, θ, los círculos $r =$ constante y las rectas $\theta =$ constante se aplican sobre rectas paralelas a los ejes en el plano r, θ. Si la región R del plano x, y es el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$, el punto (r, θ) del plano r, θ variará sobre un rectángulo $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, donde los puntos correspondientes de los lados $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$ están relacionados con uno y el mismo punto de R, y el lado completo $r = 0$ es la imagen del origen $x = 0, y = 0$.

Otro ejemplo de sistema coordenado curvilíneo es el sistema de *coordenadas parabólicas*. Se llega a estas coordenadas considerando la familia de parábolas confocales en el plano x, y (ver también la p. 284 y la Fig. 3.9)

$$y^2 = 2c\left(x + \frac{c}{2}\right),$$

las cuales todas tienen al origen como foco y al eje x como eje. Por cada punto del plano, excepto el origen, pasan dos parábolas de la

*Sin embargo, existe una diferencia real en el sentido de que las ecuaciones siempre definen una *aplicación*, sin importar cuántos puntos (x, y) corresponden a un punto (ξ, η), mientras que definen una *transformación de coordenadas* sólo cuando la correspondencia es biunívoca.

familia, una correspondiente a un valor positivo del parámetro, $c = \xi$, y la otra a un valor negativo del parámetro, $c = \eta$. Estos dos valores se obtienen resolviendo para c la ecuación cuadrática $y^2 = 2c(x + c/2)$ usando los valores de x y y que correspondan al punto; ésto da

$$\xi = -x + \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \eta = -x - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Estas cantidades ξ y η pueden introducirse como coordenadas curvilíneas en el plano x, y, convirtiéndose entonces las parábolas confocales en las curvas coordenadas. En la Fig. 3.9 se indican estas curvas, si se intercambian los símbolos (x, y) y (ξ, η).

Al usar las coordenadas parabólicas (ξ, η), debe tenerse presente que *la* pareja de valores (ξ, η) corresponde a los *dos* puntos (x, y) y $(x, -y)$, que son las dos intersecciones de las parábolas correspondientes. De aquí que, con el fin de obtener una correspondencia biunívoca entre la pareja (x, y) y la pareja (ξ, η), nos debemos restringir a un semiplano, $y \geqq 0$, por ejemplo. Entonces cada región R en este semiplano está en correspondencia biunívoca con una región B del plano ξ, η, y las coordenadas rectangulares (ξ, η) de cada punto en esta región B son exactamente las mismas que las coordenadas parabólicas del punto correspondiente en la región R.

Ejercicios 3.3b

1. Probar que para $x \neq 1$, $0 < y < \pi/2$, $\xi = (\operatorname{sen} y)/(x - 1)$, $\eta = x \tan y$, definen un sistema de coordenadas curvilíneas.
2. Encontrar la ecuación para el círculo $x^2 + y^2 = 1$ en términos de las coordenadas curvilíneas

$$\xi = x^3 + 1, \quad \eta = xy.$$

3. ¿Para cuáles puntos del plano x, y no pueden usarse $\xi = xy$ y $\eta = x^2 + y^2$ como coordenadas curvilíneas?

c. *Extensión a más de dos variables independientes*

Para tres o más variables independientes, el estado de cosas es análogo. De donde, un sistema de tres funciones continuamente diferenciables

$$\xi = \phi(x, y, z), \qquad \eta = \psi(x, y, z), \qquad \zeta = \chi(x, y, z),$$

definidas en una región R del espacio x, y, z, se pueden considerar como la aplicación de la región R sobre una región B del espacio ξ, η, ζ. Si esta aplicación de R sobre B es biunívoca, de manera que para cada punto imagen (ξ, η, ζ) de B puedan calcularse de modo único las coordenadas (x, y, z) del punto correspondiente (punto original o imagen inversa) en R por medio de las funciones

$$x = g(\xi, \eta, \zeta), \quad y = h(\xi, \eta, \zeta), \quad z = l(\xi, \eta, \zeta),$$

entonces (ξ, η, ζ) también pueden considerarse como las *coordenadas generales* del punto P en la región R. Las superficies ξ = constante, η = constante, ζ = constante o, en otros símbolos, $\phi(x, y, z)$ = constante, $\psi(x, y, z)$ = constante, $\chi(x, y, z)$ = constante, forman un sistema de tres familias de superficies que cubren la región R y pueden llamarse superficies coordenadas curvilíneas.

Al igual que para dos variables independientes, las transformaciones uno a uno en tres dimensiones pueden interpretarse como deformaciones de una sustancia distribuída continuamente en toda una región del espacio.

Un sistema muy importante de coordenadas son las *coordenadas esféricas,* a veces llamadas *coordenadas polares en el espacio*. Estas especifican la posición de un punto P en el espacio por medio de tres números: (1) la distancia $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ medida desde el origen; (2) la longitud geográfica ϕ, es decir, el ángulo entre el plano x, z y el plano determinado por p y el eje z; y (3) la inclinación polar o latitud complementaria θ, es decir, el ángulo entre el radio vector OP y el eje z positivo. Como se ve en la Fig. 3.10, las tres coordenadas esféricas r, ϕ, θ están relacionadas con las coordenadas rectangulares por medio de las ecuaciones de transformación

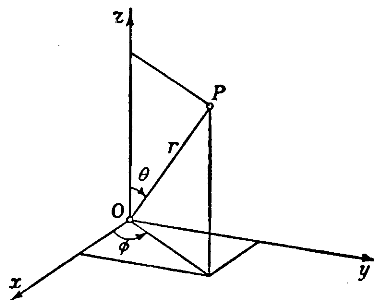


Figura 3.10 Coordenadas esféricas.

$$x = r \cos \phi \operatorname{sen} \theta,$$

$$y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta,$$

$$z = r \cos \theta,$$

de las cuales se obtienen las relaciones inversas

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = \operatorname{arc} \cos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\theta = \operatorname{arc} \cos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Para coordenadas polares en el plano el origen es un punto excepcional, en el sentido de que para él no se cumple la correspondencia biunívoca, porque allí el ángulo no está determinado. De la misma manera, para la coordenadas esféricas en el espacio, el eje z completo es una excepción, en el sentido de que allí está indeterminada la longitud ϕ. En el propio origen la inclinación polar θ también está indeterminada.

Las superficies coordenadas para coordenadas polares tridimensionales son como sigue: (1) para valores constantes de r, las esferas concéntricas alrededor del origen; (2) para valores constantes de ϕ, la familia de semiplanos que pasan por el eje z ; (3) para valores constantes de θ, los conos circulares con el eje z como eje y el origen como vértice (Fig. 3.11).

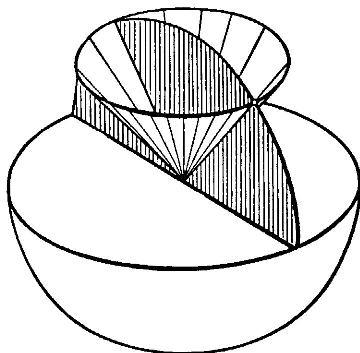


Figura 3.11 Superficies coordenadas para las coordenadas esféricas.

Otro sistema coordenado que se usa con frecuencia es el sistema de *coordenadas cilíndricas.* Estas se obtienen introduciendo las coordenadas polares ρ, ϕ en el plano x, y y conservando a z como la tercera coordenada. Entonces las fórmulas de transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas son

$$x = \rho \cos \phi,$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi,$$

$$z = z$$

y la transformación inversa es

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \operatorname{arc} \cos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$z = z.$$

Las superfieices coordenadas $\rho =$ constante son los cilindros circulares verticales que cortan al plano x, y en círculos concéntricos con el origen como centro; las superficies $\phi =$ constante son los semiplanos que pasan por el eje z y las superficies $z =$ constantes son los planos paralelos al plano x, y.

Ejercicios 3.3c

1. Encontrar la inversa de la transformación de coordenadas curvilíneas

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + y^2}, \qquad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \zeta = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

2. Invertir la transformación de coordenadas $w = r \cos \phi$, $x = r \operatorname{sen} \phi \cos \psi$, $y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \psi \cos \theta$, $z = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta$. ¿Cuáles son los conjuntos $r =$ constante, $\phi =$ constante, $\psi =$ constante, $\theta =$ constante?

d. Fórmulas de derivación para las funciones inversas

En muchos casos de importancia práctica es posible resolver explícitamente el sistema de ecuaciones dado, como en los ejemplos anteriores, y, por tanto, reconocer que las funciones inversas son continuas y poseen derivadas continuas. Si es posible presumir la existen-

cia y la diferenciabilidad de las funciones inversas, pueden calcularse las derivadas de estas últimas sin resolver en realidad las ecuaciones explícitamente, de la siguiente manera: se sustituyen las funciones inversas $x = g(\xi, \eta), y = h(\xi, \eta)$ en las ecuaciones dadas $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$. A la derecha se obtienen las funciones compuestas $\phi(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta))$ y $\psi(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta))$ de ξ y η; pero éstas deben ser iguales a ξ y η, respectivamente. Derívense ahora cada una de las ecuaciones

$$\text{(24a)} \qquad \begin{aligned} \xi &= \phi(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)) \\ \eta &= \psi(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)) \end{aligned}$$

con respecto a ξ y a η, considerando a ξ y a η como variables independientes[1] y aplicando la regla de la cadena para derivar a las funciones compuestas. Entonces se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\text{(24b)} \qquad \begin{aligned} 1 &= \phi_x g_\xi + \phi_y h_\xi, \quad & 0 &= \phi_x g_\eta + \phi_y h_\eta, \\ 0 &= \psi_x g_\xi + \psi_y h_\xi, \quad & 1 &= \psi_x g_\eta + \psi_y h_\eta. \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtienen expresiones para las derivadas parciales de las funciones inversas $x = g(\xi, \eta)$ y $y = h(\xi, \eta)$ con respecto a ξ y η, expresadas en términos de las derivadas de las funciones originales $\phi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ con respecto a x y y, a saber,

$$\text{(24c)} \qquad g_\xi = \frac{\psi_y}{D}, \qquad g_\eta = -\frac{\phi_y}{D}, \qquad h_\xi = -\frac{\psi_x}{D}, \qquad h_\eta = \frac{\phi_x}{D},$$

o bien,

$$\text{(24d)} \qquad x_\xi = \frac{\eta_y}{D}, \qquad x_\eta = -\frac{\xi_y}{D}, \qquad y_\xi = -\frac{\eta_x}{D}, \qquad y_\eta = \frac{\xi_x}{D}.$$

Por brevedad aquí se ha escrito

$$\text{(24e)} \qquad D = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

[1]Estas ecuaciones se cumplen para todos los valores de ξ y η bajo consideración; como se dice, se cumplen *idénticamente,* en contraste con las ecuaciones entre variables que sólo se satisfacen para *algunos* de los valores de estas variables. Cuando tales ecuaciones idénticas, o *identidades,* se derivan con respecto a cualquiera de las variables que ocurren en ellas, nuevamente se obtienen identidades, lo que se concluye inmediatamente a partir de la definición.

Esta expresión D, que se supone no es cero en el punto en cuestión, se llama el *jacobiano o determinante funcional* de las funciones $\xi = \phi(x,y)$ y $\eta = \psi(x, y)$ con respecto a las variables x y y. Este determinante juega un papel principal siempre que se consideran transformaciones, como se verá en lo que sigue.

En lo anterior, así como ocasionalmente en otra parte, se ha usado la notación más corta $\xi(x, y)$ en lugar de la notación más detallada $\xi = \phi(x, y)$, la cual distingue entre la cantidad ξ y su expresión funcional $\phi(x, y)$. En el futuro, con frecuencia se usarán abreviaturas semejantes cuando no haya riesgo de confusión.

Para las coordenadas polares en el plano, expresadas en términos de coordenadas rectangulares,

$$\xi = r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{y} \qquad \eta = \theta = \text{arc tan}\,\frac{y}{x},$$

las derivadas parciales son

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}, \qquad r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r},$$

$$\theta_x = \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2}, \qquad \theta_y = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2}.$$

De aquí que el jacobiano tiene el valor

$$D = \frac{x}{r}\,\frac{x}{r^2} - \frac{y}{r}\left(-\frac{y}{r^2}\right) = \frac{1}{r},$$

y las derivadas parciales de las funciones inversas (coordenadas rectangulares expresadas en términos de coordenadas polares) son, por (24d),

$$x_r = \frac{x}{r}, \qquad x_\theta = -y, \qquad y_r = \frac{y}{r}, \qquad y_\theta = x,$$

como pudo haberse encontrado con más facilidad derivando directamente las fórmulas inversas $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$.

El jacobiano se presenta con tanta frecuencia que, a menudo, se usa un símbolo especial para él[1]:

$$D = \frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)}. \tag{25}$$

[1] Con frecuencia, el jacobiano se escribe con el signo de derivada parcial como

$$D = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}.$$

Pronto resultará obvio lo adecuado de esta abreviatura. A partir de las fórmulas para las derivadas de las funciones inversas (24b), se encuentra que el jacobiano de las funciones $x = x(\xi, \eta)$ y $y = y(\xi, \eta)$con respecto a ξ y η está dado por la expresión

$$(26) \qquad \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = \frac{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x}{D^2} = \frac{1}{D} = \left(\frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)}\right)^{-1}$$

Es decir, *el jacobiano del sistema inverso de funciones es el recíproco del jacobiano del sistema original.*[2]

También se pueden expresar las segundas derivadas del sistema inverso de funciones en términos de las primeras y segundas derivadas de las funciones dadas. Sólo se tienen que derivar las ecuaciones linales (24b) con respecto a ξ y a η por medio de la regla de la cadena. (Por supuesto, se supone que las funciones dadas poseen derivadas continuas de segundo orden.) Entonces se obtienen ecuaciones lineales a partir de las cuales se pueden calcular fácilmente las derivadas requeridas.

Por ejemplo, para calcular las derivadas

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = g_{\xi\xi} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = h_{\xi\xi}$$

se derivan las dos ecuaciones

$$1 = \xi_x x_\xi + \xi_y y_\xi$$
$$0 = \eta_x x_\xi + \eta_y y_\xi$$

una vez más con respecto a ξ y, por la regla de la cadena, se obtiene

$$(27a) \qquad 0 = \xi_{xx} x_\xi^2 + 2\xi_{xy} x_\xi y_\xi + \xi_{yy} y_\xi^2 + \xi_x x_{\xi\xi} + \xi_y y_{\xi\xi},$$

$$(27b) \qquad 0 = \eta_{xx} x_\xi^2 + 2\eta_{xy} x_\xi y_\xi + \eta_{yy} y_\xi^2 + \eta_x x_{\xi\xi} + \xi_y y_{\xi\xi}.$$

Si se resuelve este sistema de ecuaciones lineales, considerando a las cantidades $x_{\xi\xi}$ y $y_{\xi\xi}$ como incógnitas (el determinante del sistema es nuevamente D y, por lo tanto, por hipótesis, no es cero) y, a continuación, se remplazan x_ξ y y_ξ por los valores ya conocidos para ellas, un cálculo breve da

[2]Por supuesto, ésta es la análoga a la regla para la derivada de la inversa de una función de una sola variable (Volumen I, p. 207).

$$(27c) \qquad x_{\xi\xi} = -\frac{1}{D^3}\begin{vmatrix} \xi_{xx}\eta_y^2 - 2\xi_{xy}\eta_x\eta_y + \xi_{yy}\eta_x^2 & \xi_y \\ \eta_{xx}\eta_y^2 - 2\xi_{xy}\eta_x\eta_y + \eta_{yy}\eta_x^2 & \eta_y \end{vmatrix}$$

y

$$(27d) \qquad y_{\xi\xi} = \frac{1}{D^3}\begin{vmatrix} \xi_{xx}\eta_y^2 - 2\xi_{xy}\eta_x\eta_y + \xi_{yy}\eta_x^2 & \xi_x \\ \eta_{xx}\eta_y^2 - 2\eta_{xy}\eta_x\eta_y + \eta_{yy}\eta_x^2 & \eta_x \end{vmatrix}$$

Las derivadas terceras y superiores pueden obtenerse de la misma manera, derivando repetidamente el sistema lineal de ecuaciones; en cada paso se obtiene un sistema de ecuaciones lineales con determinante D que no se anula.

Ejercicios 3.3d

1. Hallar los jacobianos de las transformaciones siguientes:

   (a) $\xi = ax + by, \qquad \eta = cx + dy$

   (b) $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \text{arc tan } y/x$

   (c) $\xi = x^2, \qquad \eta = y^2$

   (d) $\xi = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2), \qquad \eta = \text{arc tan } \dfrac{y}{x}$

   (e) $\xi = xy^2, \qquad \eta = x^2y$

   (f) $\xi = x^3 - y, \qquad \eta = y^3 + x.$

2. Para cada una de las transformaciones dadas en el Ejercicio 1, dar los puntos (x, y) que carecen de vecindades en donde la transformación tiene una inversa.
3. Encontrar el jacobiano de la transformación $\xi = f(x, y), \eta = g(x, y)$, así como todas las derivadas parciales de x, y con respecto a ξ, η hasta las de segundo orden, en cada uno de los casos siguientes:

   (a) $\xi = e^x \cos y, \qquad \eta = e^x \operatorname{sen} y$

   (b) $\xi = x^2 - y^2, \qquad \eta = 2xy$

   (c) $\xi = \tan(x + y), \qquad \eta = \cos(x - y), \qquad -\pi/2 < x + y < \pi/2$

   (d) $\xi = \operatorname{senh} x + \cosh y, \qquad \eta = -\cosh x + \operatorname{senh} y$

   (e) $\xi = x^3 + y^3, \qquad \eta = xy^2.$

4. Se dice que una transformación es "conforme" (ver la p. 337) si se conserva el ángulo entre dos curvas cualesquiera.
   (a) Probar que la inversión

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

   es una transformación conforme;

(b) probar que la inversa de cualquier círculo es otro círculo o una recta:
(c) encontrar el jacobiano de la inversión.

5. Sean K_1, K_2, K_3 tres círculos que pasan por 0 y que tienen intersecciones pareadas distintas, digamos P_1, P_2, P_3, en otros puntos. Demostrar que la suma de los ángulos del triángulo curvilíneo $P_1 P_2 P_3$, formado por arcos circulares, es π.
6. Probar que una transformación del plano

$$u = \varphi(x, y), \qquad v = \psi(x, y)$$

es conforme si las funciones φ y ψ satisfacen las identidades

$$\varphi_x = \psi_y, \qquad \varphi_y = -\psi_x.$$

7. Probar que si todas las normales de una superficie $z = u(x, y)$ cortan al eje z, entonces la superficie es una superficie de revolución.
8. La ecuación

$$\frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} = 1 \qquad (a > b)$$

determina dos valores de t que dependen de x y y:

$$t_1 = \lambda(x, y),$$
$$t_2 = \mu(x, y).$$

(a) Probar que las curvas $t_1 =$ constante y $t_2 =$ constante son elipses e hipérbolas que tienen todas los mismos focos (cónicas confocales).
(b) Probar que las curvas $t_1 =$ constante y $t_2 =$ constante son ortogonales.
(c) t_1 y t_2 pueden usarse como coordenadas curvilíneas (las llamadas coordenadas focales). Expresar x y y en términos de estas coordenadas.
(d) Expresar el jacobiano $\partial(t_1, t_2)/\partial(x, y)$ en términos de x y y.
(e) Encontrar la condición para que dos curvas, representadas paramétricamente en el sistema de coordenadas focales por las ecuaciones

$$t_1 = f_1(\lambda), \quad t_2 = f_2(\lambda) \qquad \text{y} \qquad t_1 = g_1(\mu), \quad t_2 = g_2(\mu)$$

sean ortogonales entre sí.

9. (a) Probar que la ecuación en t

$$\frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} + \frac{z^2}{c-t} = 1 \qquad (a > b > c)$$

tiene tres raíces reales distintas t_1, t_2, t_3, las cuales se encuentran respectivamente en los intervalos

$$-\infty < t < c, \quad c < t < b, \qquad b < t < a,$$

siempre que el punto (x, y, z) no se encuentre sobre de un plano coordenado.

(b) Probar que las tres superficies $t_1 =$ constante, $t_2 =$ constante, $t_3 =$ constante, que pasen por un punto arbitrario, son mutuamente ortogonales.

(c) Expresar x, y, z en términos de las coordenadas focales t_1, t_2, t_3.

10. Probar que la transformación del plano x, y dada por las ecuaciones

$$\xi = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

(a) es conforme;

(b) transforma las rectas que pasan por el origen y los círculos con el origen como centro en el plano x, y, en cónicas confocales $t =$ constante, dadas por

$$\frac{\xi^2}{t + 1/2} + \frac{\eta^2}{t - 1/2} = 1.$$

11. Para $\xi = f(x,y)$, $\eta = g(x,y)$, y $D = \partial(\xi,\eta)/\partial(x,y) \neq 0$, demostrar las identidades

(a) $\dfrac{\partial D}{\partial y} = \dfrac{\partial(\xi_y, \eta)}{\partial(x, y)} + \dfrac{\partial(\xi, \eta_y)}{\partial(x, y)}$,

(b) $D^{-3}\,[\xi_x(\eta_{yy}\,D - \eta_y D_y) - \xi_y(\eta_{xy} D - \eta_y D_x)]$

$$= D^{-3}\,[\eta_x(\xi_{yy} D - \xi_y D_y) - \eta_y(\xi_{xy} D - \xi_y D_x)].$$

e. Producto simbólico de aplicaciones

Empecemos con algunas observaciones acerca de la composición de transformaciones. Si la transformación

$$\xi = \phi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y) \tag{28a}$$

da una aplicación biunívoca de los puntos (x, y) de una región R sobre los puntos (ξ, η) de la región B en el plano ξ, η, y si las ecuaciones

$$u = \Phi(\xi, \eta), \qquad v = \Psi(\xi, \eta) \tag{28b}$$

dan una aplicación biunívoca de la región B sobre una región R' en el plano u, v, entonces se genera una aplicación biunívoca de R sobre R'. Naturalmente, esta aplicación se llama *aplicación o transformación resultante* y se dice que se obtiene por la composición de las dos aplicaciones dadas y que representa su *producto simbólico*. La transformación resultante está dada por las ecuaciones

$$u = \Phi(\phi(x, y), \psi(x, y)), \qquad v = \Psi(\phi(x, y), \psi(x, y));$$

de la definición, inmediatamente se deduce que esta aplicación es biunívoca.

Por medio de las reglas para derivar funciones compuestas, se obtiene

$$\text{(29a)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \Phi_\xi \phi_x + \Phi_\eta \psi_x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \Phi_\xi \phi_y + \Phi_\eta \psi_y,$$

$$\text{(29b)} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \Psi_\xi \phi_x + \Psi_\eta \psi_x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \Psi_\xi \phi_y + \Psi_\eta \psi_y.$$

En notación matricial (p. 188).

$$\text{(30)} \qquad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_\xi & \Phi_\eta \\ \Psi_\xi & \Psi_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{pmatrix}$$

Comparando ésto con la ley para la multiplicación de los determinantes (ver la p. 210), se encuentra[1] que el jacobiano de u y v con respecto a x y y es

$$\text{(31a)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = (\Phi_\xi \Psi_\eta - \Phi_\eta \Psi_\xi)(\phi_x \psi_y - \phi_y \psi_x).$$

Es decir, *el jacobiano del producto simbólico de dos transformaciones es igual al producto de los jacobianos de las transformaciones individuales,* o sea, en la notación (25),

$$\text{(31b)} \qquad \frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \frac{d(u, v)}{d(\xi, \eta)} \frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)}.$$

En esta ecuación se observa que el símbolo que se adoptó para los jacobianos es el adecuado. *Cuando se combinan transformaciones, los jacobianos se comportan de la misma manera que se comportan las derivadas cuando se combinan funciones de una variable.* El jacobiano de la transformación resultante difiere de cero siempre que se cumpla lo mismo para las transformaciones individuales (o componentes).

Si, en particular, la segunda transformación

$$u = \Phi(\xi, \eta), \qquad v = \Psi(\xi, \eta)$$

es la inversa de la primera,

$$\xi = \phi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y)$$

[1]Por supuesto se puede obtener el mismo resultado multiplicando directamente.

y si ambas transformaciones son diferenciables, la transformación resultante será sencillamente la transformación idéntica; ésto es, $u = x$, $v = y$. Obviamente, el jacobiano de esta última transformación es 1, de manera que nuevamente se obtiene la relación (26).

Incidentalmente, de ésto se deduce que ninguno de los dos jacobianos se puede anular:

$$\frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)} \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)} = 1.$$

Para una pareja de funciones continuamente diferenciables $\phi(x,y)$ y $\psi(x,y)$ que tienen un jacobiano que no se anula, pueden encontrarse fórmulas para la *aplicación de direcciones* correspondiente, en un punto $(x_0, y_0) = P_0$. Una curva que pasa por un punto P_0 puede describirse paramétricamente por medio de las ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde $f(t_0) = x_0$, $g(t_0) = y_0$. La pendiente de la curva en P_0 está dada por

$$m = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}.$$

De modo semejante, la pendiente de la curva imagen

$$\xi = \varphi(f(t), g(t)), \qquad \eta = \psi(f(t), g(t))$$

en el punto correspondiente a P_0 es

$$\mu = \frac{d\eta/dt}{d\xi/dt} = \frac{\psi_x f' + \psi_y g'}{\phi_x f' + \phi_y g'} = \frac{c + dm}{a + bm}, \tag{32}$$

donde a, b, c, d son las constantes

$$a = \phi_x(x_0, y_0), \; b = \phi_y(x_0, y_0), \; c = \psi_x(x_0, y_0), \; d = \psi_y(x_0, y_0).$$

La relación (32) entre la pendiente m de la curva original en P_0 y la pendiente μ de la curva imagen es la misma que para la aplicación afin:

$$\xi = \phi(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0),$$

$$\eta = \psi(x_0, y_0) + c(x - x_0) + d(y - y_0).$$

que da una aproximación de la aplicación cerca de P_0. Dado que

$$\frac{d\mu}{dm} = \frac{ad - bc}{(a + bm)^2},$$

se encuentra que u es una función creciente de m para $ad - bc > 0$ y una función decreciente para $ad - bc < 0$.[1]

Las pendientes crecientes corresponden a ángulos de inclinación crecientes o a una rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj de las direcciones correspondientes. De donde, $d\mu/dm > 0$ implica que se conserva el sentido de la rotación contrario al movimiento de las manecillas del reloj, mientras que se invierte cuando $d\mu/dm < 0$. Ahora bien, $ad - bc$ es precisamente el jacobiano

$$\frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}$$

evaluado en el punto P_0. Se concluye que *la aplicación* $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ *conserva o invierte las orientaciones cerca del punto* (x_0, y_0) *Según que el jacobiano en ese punto sea positivo o negativo.*

Ejercicios 3.3e

1. Para cada una de las siguientes parejas de transformaciones, encontrar $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ eliminando primero ξ y η, y, a continuación, aplicando (31b):

(a) $\begin{cases} u = \frac{1}{2}\log(\xi^2 + \eta^2) \\ v = \arctan\frac{\eta}{\xi} \end{cases}$ $\begin{cases} \xi = e^x \cos y \\ \eta = e^x \operatorname{sen} y \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u = \xi^2 - \eta^2 \\ v = 2\xi\eta \end{cases}$ $\begin{cases} \xi = x \cos y \\ \eta = x \operatorname{sen} y \end{cases}$

(c) $\begin{cases} u = e^\xi \cos \eta \\ v = e^\xi \operatorname{sen} \eta \end{cases}$ $\begin{cases} \xi = x/(x^2 + y^2) \\ \eta = -y/(x^2 + y^2) \end{cases}$

2. ¿En cuáles de las transformaciones sucesivas siguientes pueden definirse x, y como funciones continuamente diferenciables de u, v en una vecindad del punto indicado (u_0, v_0)?

(a) $\xi = e^x \cos y$, $\eta = e^x \operatorname{sen} y$;
$u = \xi^2 - \eta^2$, $v = 2\xi\eta$, $u_0 = 1$, $v_0 = 0$;

(b) $\xi = \cosh x + \operatorname{senh} y$, $\eta = \operatorname{senh} x + \cosh y$;
$u = e^{\xi+\eta}$, $v = e^{\xi-\eta}$, $u_0 = v_0 = 1$;

(c) $\xi = x^3 - y^3$, $\eta = x^2 + 2xy^2$;
$u = \xi^5 + \eta$, $v = \eta^5 - \xi$; $u_0 = 1$, $v_0 = 0$.

---

[1]De modo más concreto, ésto se cumple localmente, excluyendo las direcciones donde m o μ se vuelven infinitas.

3. Considérese la transformación

$$\begin{cases} u = \varphi(\xi, \eta) \\ v = \psi(\xi, \eta) \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = f(x) \\ \eta = g(y). \end{cases}$$

Demostrar que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = f'(x)\, g'(y) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)}.$$

4. Si $z = f(x, y)$ y $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, demostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial(z, \eta)}{\partial(x, y)} \Big/ \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial(\xi, z)}{\partial(x, y)} \Big/ \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}$$

siempre que $\partial(\xi, \eta)/\partial(x, y) \neq 0$.

f. Teorema general sobre la inversión de las transformaciones y de los sistemas de funciones implícitas. Descomposición en aplicaciones primitivas

La posibilidad de invertir una transformación depende del siguiente teorema general:

Sean $\phi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ funciones continuamente diferenciables en una vecindad de un punto (x_0, y_0), para las cuales el jacobiano $D = \phi_x \psi_y - \phi_y \psi_x$ no es cero en (x_0, y_0). Póngase $u_0 = \phi(x_0, y_0)$, $v_0 = \psi(x_0, y_0)$. Entonces existen vecindades N de (x_0, y_0) y N′ de (u_0, v_0) tales que la aplicación

$$u = \phi(x, y), \qquad v = \psi(x, y) \tag{33a}$$

tiene una inversa única

$$x = g(u, v), \qquad y = h(u, v) \tag{33b}$$

que aplica N′ en N. Las funciones g y h satisfacen las identidades

$$u = \phi(g(u, v),\ h(u, v)), \qquad v = \psi(g(u, v),\ h(u, v)) \tag{33c}$$

para (u, v) en N′, y las ecuaciones

$$x_0 = g(u_0, v_0), \qquad y_0 = h(u_0, v_0). \tag{33d}$$

Las funciones inversas g, h tienen derivadas continuas para (u, v) cerca de (u_0, v_0), dadas por

(33e) $$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{D}\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{D}\frac{\partial u}{\partial y}$$

(33f) $$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{D}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{D}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

La demostración se deduce a partir del teorema de la función implícita dado en la p. 274, el cual permite resolver una ecuación para una sola variable. En esencia, se invierten las ecuaciones (33a) resolviendo la primera ecuación para una de las variables x, y y sustituyendo la expresión resultante en la segunda ecuación, obteniendose una ecuación para la segunda variable únicamente.

Como, por hipótesis, el jacobiano D no se anula en el punto (x_0, y_0), al menos una de las primeras derivadas de $\phi(x, y)$ es diferente de cero en ese punto. Supóngase, por ejemplo, que $\phi_x(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces se puede resolver la ecuación

(34a) $$u = \phi(x, y)$$

para x. Más precisamente, se pueden encontrar constantes positivas h_1, h_2, h_3 tales que, para

(34b) $$|u - u_0| < h_1, \quad |y - y_0| < h_2,$$

la ecuación (34a) tiene una solución única $x = X(u, y)$ para la cual $|x - x_0| < h_3$. La función $X(u, y)$ tiene el dominio (34b) y satisface las ecuaciones

(34c) $$\phi(X(u, y), y) = u, \quad X(u_0, y_0) = x_0,$$

y la desigualdad

(34d) $$|X(u, y) - x_0| < h_3.$$

Es más, $X(u, y)$ tiene derivadas continuas, para las cuales, por (34c),

(34e) $$\phi_x(X(u, y), y)X_u(u, y) = 1$$

(34f) $$\phi_x(X(u, y), y)X_y(u, y) + \phi_y(X(u, y), y) = 0.$$

Supóngase aquí que h_2, h_3 son tan pequeñas que el rectángulo

(34g) $$|x - x_0| < h_3, \quad |y - y_0| < h_2$$

queda en el dominio de $\phi(x, y)$, $\psi(x, y)$. Sustituyendo x por la expresión $X(u, y)$ en las funciones $\psi(x, y)$, se obtiene una función compuesta

(34h) $$\psi(X(u, y), y) = \chi(u, y)$$

con el dominio (34b). Aquí, por (34c, f),

(34i) $$\chi(u_0, y_0) = \psi(x_0, y_0) = v_0$$

(34j) $$\chi_y(u_0, y_0) = \psi_x X_y + \psi_y = -\psi_x \frac{\phi_y}{\phi_x} + \psi_y = \frac{D}{\phi_x} \neq 0;$$

por (34e), se tiene $\phi_x \neq 0$. Se concluye que pueden hallarse constantes positivas h_4, h_5, h_6 tales que, para

(34k) $$|u - u_0| < h_4, \quad |v - v_0| < h_5$$

la ecuación

(34m) $$\chi(u, y) = v$$

tiene una solución única $y = h(u, v)$, para la cual $|y - y_0| < h_6$. Aquí se puede suponer que $h_4 \leqq h_1$, $h_6 \leqq h_2$ (ver la nota al pie de la p. 274).

Por último, hágase

(34n) $$X(u, h(u, v)) = g(u, v).$$

Las dos funciones $g(u, v)$, $h(u, v)$ tienen el dominio (34k). Por (34c, h), satisfacen las ecuaciones

$$\phi(g(u, v), h(u, v)) = \phi(X(u, h(u, v)), h(u, v)) = u$$

$$\psi(g(u, v), h(u, v)) = \psi(X(u, h(u, v)), h(u, v)) = \chi(u, h(u, v)) = v$$

y las desigualdades

$$|g(u, v) - x_0| < h_3, \quad |h(u, v) - y_0| < h_6.$$

Las fórmulas (33e, f) para las derivadas de g y h se dedujeron con anterioridad, en la p. 300.

Con el fin de demostrar la unicidad de las funciones inversas, supóngase que x, y, u, v, es cualquier conjunto de valores que satis-

facen las ecuaciones (33a) y las desigualdades

$$|x - x_0| < h_3, \quad |y - y_0| < h_6, \quad |u - u_0| < h_4, \quad |v - v_0| < h_5.$$

Como se cumplen (34a, b), se concluye que

(34o) $$x = X(u, y).$$

De (34h) se obtiene la ecuación

$$v = \psi(x, y) = \psi(X(u, y), y) = \chi(u, y),$$

la cual tiene la solución única $y = h(u, v)$. Entonces se deduce la relación $x = g(u, v)$ a partir de (34n, o). Las relaciones (33d) para g y h se deducen de la unicidad de la solución y de la suposición de que $u_0 = \phi(x_0, y_0), v_0 = \psi(x_0, y_0)$.

Hasta aquí se ha supuesto que $\phi_x(x_0, y_0) \neq 0$. Si $\phi_x(x_0, y_0) = 0$, pero $\phi_y(x_0, y_0) \neq 0$, la inversión de la aplicación 33a se lleva a cabo de modo semejante. En este caso, primero, se resuelve la ecuación de (33a) para h y se sustituye la función resultante $y = Y(u, x)$ en la segunda ecuación, obteniéndose una ecuación para x únicamente.

La inversión de la aplicación "plana" (33a) se ha reducido a inversiones de aplicaciones en las que sólo se transforma una variable cada vez. Generalmente, a la transformación (33a) se le da el nombre de *primitiva* si deja invariante una de las coordenadas, es decir, si la función $\phi(x, y)$ es idéntica a x, o bien, la función $\psi(x,y)$ es idéntica a y. El efecto de una transformación primitiva del tipo $u = \phi(x, y), v = y$ es el de mover cada punto en la dirección del eje x, manteniendo inalterada su ordenada. Después de la deformación el punto tiene una nueva abscisa, que depende tanto de x como de y. Si el jacobiano ϕ de la aplicación primitiva es positivo, u varía monótonamente con x para y fija.

Se probará que *una transformación arbitraria* (33a) *con jacobiano que no se anula se puede descomponer en transformaciones primitivas, en una vecindad de un punto.* Esto se deduce fácilmente a partir de la construcción dada de la aplicación inversa. Si $\phi_x(x_0, y_0) \neq 0$, la aplicación (33a) se representa como el producto simbólico de las aplicaciones primitivas

(34p) $$\xi = \phi(x, y), \qquad \eta = y$$

y

(34q) $$u = \xi, \qquad v = \chi(\xi, \eta).$$

Aquí, el dominio R de la primera aplicación en el plano x, y será un rectángulo tan pequeño que

$$|x - x_0| < h_3, \quad |y - y_0| < h_2, \quad |\phi(x, y) - u_0| < h_1,$$

mientras que la segunda aplicación tiene el dominio

$$|\xi - u_0| < h_1, \quad |\eta - y_0| < h_2.$$

Se deduce que la imagen (ξ, η) de un punto (x, y) de R bajo la aplicación (34p) se encuentra en el dominio de la aplicación (34q), y que

$$x = X(\xi, y).$$

Consecuentemente, también

(34r) $$x = X(\phi(x, y), y).$$

Entonces, por (34h, r), para la aplicación compuesta a partir de (34p, q) resulta

$$u = \phi(x, y)$$

$$v = \chi(\phi(x, y), y) = \psi(X(\phi(x, y), y), y) = \psi(x, y).$$

Se obtiene una descomposición análoga de la aplicación (33a) cuando $\phi_x(x_0, y_0) = 0$ pero $\phi_y(x_0, y_0) \neq 0$. Unicamente se tienen que intercambiar los papeles de las variables x y y.

No es de esperar que una transformación se descomponga en transformaciones primitivas de una y en la misma manera en la totalidad de la región abierta R. Sin embargo, como cerca de cada punto de R puede llevarse a cabo algún tipo de descomposición, todo subconjunto cerrado acotado de R puede subdividirse en un número finito de conjuntos[1] tales que en cada uno de esos conjuntos sea posible una de las descomposiciones.

El teorema de inversión es un caso especial de un teorema más general que se puede considerar como una extensión del teorema de

[1]Esto se deduce a partir del teorema de la cobertura, p. 140.

las funciones implícitas a sistemas de funciones. El teorema de las funciones implícitas (p. 274) se aplica a la solución de una ecuación para una de las variables. El teorema general es como sigue:

Si $\phi(x, y, u, v, \ldots, w)$ y $\psi(x, y, u, v, \ldots, w)$ son funciones continuamente diferenciables de $x, y, u, v, \ldots, w$, y las ecuaciones

$$\phi(x, y, u, v, \ldots, w) = 0 \qquad \text{y} \qquad \psi(x, y, u, v, \ldots, w) = 0$$

son satisfechas por un cierto conjunto de valores $x_0, y_0, u_0, v_0, \ldots, w_0$ y si, además, el jacobiano de ϕ y ψ con respecto a x y a y es diferente de cero en ese punto (es decir, $D = \phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x \neq 0$), entonces, en la vecindad de ese punto las ecuaciones $\phi = 0$ y $\psi = 0$ pueden resolverse de una, y sólo una manera para x y y, y esta solución da a x y a y como funciones continuamente diferenciables de $u, v, \ldots, w$.

La demostración de este teorema es semejante a la del teorema de inversión anterior. A partir de la hipótesis de que $D \neq 0$ puede concluirse que en el punto en cuestión no se anula alguna derivada parcial, digamos $\phi_x = 0$. Por el teorema principal de la p. 274, si se restringen $x, y, u, v, \ldots, w$ a intervalos lo suficientemente pequeños alrededor de $x_0, y_0, u_0, v_0, \ldots, w_0$, respectivamente, se puede resolver la ecuación $\phi(x, y, u, v, \ldots, w) = 0$ en exactamente una forma, para x como una función de las otras variables; esta solución $x = X(y, u, v, \ldots, w)$ es una función continuamente diferenciable de sus argumentos y tiene la derivada parcial $X_y = -\phi_y/\phi_x$. Si se sustituye esta función $x = X(y, u, v, \ldots, w)$ en $\psi(x, y, u, v, \ldots, w)$, se obtiene una función $\psi(x, y, u, v, \ldots, w) = \chi(y, u, v, \ldots, w)$, y

$$\chi_y = -\psi_x \frac{\phi_y}{\phi_x} + \psi_y = \frac{D}{\phi_x}.$$

De aquí, en virtud de la suposición de que $D \neq 0$, se ve que la derivada χ_y no es cero. De donde, si se restringen $y, u, v, \ldots, w$ a intervalos alrededor de $y_0, u_0, v_0, \ldots w_0$ contenidos en los intervalos a los cuales fueron previamente restringidas, se puede resolver la ecuación $\chi = 0$ en exactamente una manera para y como una función de $u, y, \ldots, w$, y esta solución es continuamente diferenciable. Sustituyendo esta expresión para y en la ecuación $x = X(y, u, v, \ldots, w)$, se encuentra x como una función de $u, v, \ldots, w$. Esta solución es única y continuamente diferenciable, sujeta a la restricción de tener $x, y, u, v, \ldots, w$ en intervalos lo suficientemente pequeños alrededor de $x_0, y_0, u_0, v_0, \ldots, w_0$, respectivamente.

Ejercicios 3.3f

1. ¿Cuáles de los siguientes sistemas de ecuaciones pueden resolverse para x, y como funciones continuamente diferenciables de las variables restantes, cerca de los puntos indicados?

(a) $e^x \operatorname{sen} u - e^y \cos v + w = 0$
$x \cosh w - u \operatorname{senh} y - v^2 = \cosh 1$
$x = 1, y = 0, u = 0, v = 0, w = 1$

(b) $u \cos x - v \operatorname{sen} y + w^2 = 1$
$\cos(x + y) + v = 1,$
$x = 0, y = \pi/2, u = 1, v = 1, w = 1$

(c) $x^2 + y^2 + u^2 - v = 0$
$x^2 - y^2 + 2u - 1 = 0$
$x = y = u = v = 1$

(d) $\cos x + t \operatorname{sen} y = 0$
$\operatorname{sen} x - \cos ty = 0,$
$x = \pi, y = \pi/2, t = 1.$

g. *Construcción alternativa de la aplicación inversa por el método de las aproximaciones sucesivas*

En la demostración anterior el problema de invertir una aplicación se redujo al caso unidimensional y, por último, al hecho elemental de que las aplicaciones proporcionadas por funciones monótonas continuas de una sola variable pueden invertirse. Esta hilación del argumento tiene dos características indeseables. Nos vemos forzados a distinguir casos diferentes que conducen a resoluciones bastante diferentes (digamos, para $\phi_x \neq 0$ y $\phi_x = 0$), los cuales no corresponden a cambio radical alguno en el carácter de la transformación original. Además, la demostración de la existencia *no es constructiva;* no proporciona un esquema numérico práctico para invertir las aplicaciones. Estas dos características objetables no se presentan en el método de interacción o de aproximaciones sucesivas, que siguen el patrón de los métodos numéricos dados en el Volumen I (p. 502) para la solución de ecuaciones para una sola cantidad desconocida. La idea básica es la de aplicar correcciones sucesivas a una solución aproximada, donde las correcciones se determinan a partir de las *ecuaciones lineales* que aproximen mejor la relación funcional en una vecindad de un punto.

Considérense nuevamente las ecuaciones

(35a) $$u = \phi(x, y), \quad v = \psi(x, y),$$

donde ϕ y ψ son funciones continuamente diferenciables en un conjunto abierto R del plano x, y. Sea (x_0, y_0) un punto de R en el cual el jacobiano

$$\begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \tag{35b}$$

tiene un valor diferente de cero, y sea (u_0, v_0) la imagen de (x_0, y_0) bajo la aplicación (35a). Se desea demostrar que, para (u, v) lo suficientemente próximo a (u_0, v_0), existe un valor (x, y) determinado de modo único, cerca de (x_0, y_0), para el cual $u = \phi(x, y)$ y $v = \psi(x, y)$.

Para obtener la solución se usará un esquema de iteración idéntico al usado para las funciones de una variable y que se discutió en el Volumen I (p. 502), en una notación apropiada para el caso bidimensional. Introducimos los vectores $\mathbf{U} = (u, v)$, $\mathbf{X} = (x, y)$. La aplicación (35a) puede escribirse de manera concisa en la forma

$$\mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \tag{35c}$$

donde $\mathbf{F}$ es la transformación no lineal que aplica el vector con componentes x, y sobre el vector con componentes $\phi(x, y)$, $\psi(x, y)$. Las diferenciales dx, dy y du, dv satisfacen las relaciones lineales (ver la p. 77)

$$du = d\phi = \phi_x\, dx + \phi_y\, dy \tag{35d}$$

$$dv = d\psi = \psi_x\, dx + \psi_y\, dy. \tag{35e}$$

Si se combinan las diferenciales en los vectores $d\mathbf{X} = (dx, dy)$, $d\mathbf{U} = (du, dv)$, las relaciones (34d, e) pueden escribirse[1] como

$$d\mathbf{U} = \mathbf{F}'\, d\mathbf{X}, \tag{35f}$$

donde $\mathbf{F}'$ es la matriz cuadrada formada a partir de las primeras derivadas de las funciones de aplicación

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{pmatrix}. \tag{35g}$$

[1]Es mejor interpretar (35f) como una relación entre las tres matrices $d\mathbf{U}$, $\mathbf{F}'$, $d\mathbf{X}$, identificando a $d\mathbf{X}$ y a $d\mathbf{U}$ con las matrices con dos filas y una sola columna:

$$d\mathbf{X} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \qquad d\mathbf{U} = \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix};$$

ver la p. 189

Obviamente, la matriz **F'** *desempeña el papel de la derivada de la función vectorial de aplicación* **F**. El determinante de **F'** es precisamente el jacobiano (35b) de la aplicación.[1] Generalmente se escribirá **F'** = **F'**(**X**) para hacer hincapié en la dependencia de la matriz **F'** con relación al vector **X** = (x, y). Para una aplicación lineal la matriz **F'** es constante.

La "magnitud" de los elementos de la matriz **F'** limita cuánto puede amplificar las distancias la matriz **F**. Tómense dos puntos (x, y) y $(x + h, y + k)$, tales que el segmento rectilíneo que los une se encuentre por completo en el dominio de la aplicación. Por el teorema del valor medio para las funciones de varias variables (p. 95).

$$\phi(x+h, y+k) - \phi(x,y) = \phi_x h + \phi_y k, \tag{36}$$
$$\psi(x+h, y+k) - \psi(x,y) = \psi_x h + \psi_y k,$$

donde los valores de las primeras derivadas se toman en puntos apropiados del segmento que une (x, y) y $(x + h, y + k)$.[2] Denotemos por M una cota superior para las cantidades

$$|\phi_x|, \quad |\phi_y|, \quad |\psi_x|, \quad |\psi_y|$$

tomadas en todos lo puntos del segmento que une a (x, y) con $(x + h, y + k)$. Entonces, obviamente, la distancia entre los puntos imagen puede estimarse por medio de

$$\begin{aligned}\text{(36a)} \quad & \sqrt{(\phi(x+h,y+k) - \phi(x,y))^2 + (\psi(x+h,y+k) - \psi(x,y))^2} \\ & \leqq \sqrt{(M|h| + |M|k)^2 + (M|h| + |M|k)^2} \\ & = \sqrt{2}\, M(|h| + |k|) \leqq 2M\sqrt{h^2 + k^2}.\end{aligned}$$

Por tanto, la distancia entre los puntos imagen es cuando más $2M$ veces la distancia entre los originales. Introduciendo el vector **Y** = $(x + h, y + k)$ se puede escribir (36a) en la forma de una condición de Lipschitz para la aplicación **F**:

[1] A menudo se da el nombre de *matriz jacobiana* o *derivada de Fréchet de la aplicación a* **F'**.

[2] Generalmente se tiene que usar un punto intermedio diferente en la primera y en la segunda ecuación.

$$|\mathbf{F}(\mathbf{Y}) - \mathbf{F}(\mathbf{X})| \leqq 2M|\mathbf{Y} - \mathbf{X}|, \tag{36b}$$

donde M es una cota superior para los valores absolutos de los elementos de la matriz $\mathbf{F}'$.[1] En notación matricial las ecuaciones (36) se convierten en

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}) - \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})(\mathbf{Y} - \mathbf{X}), \tag{36c}$$

donde la matriz $\mathbf{H}$ satisface

$$\lim_{Y \to X} \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{F}'(\mathbf{X}). \tag{36d}$$

Considérese ahora la aplicación $\mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ en una vecindad

$$|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| < \delta \tag{37a}$$

del punto $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0)$ en el dominio R de $\mathbf{F}$. Sea $\mathbf{U}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0) = (u_0, v_0)$. Para un $\mathbf{U}$ fijo escríbase la ecuación $\mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, la cual debe resolverse para $\mathbf{X}$, en la forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}(\mathbf{X}), \tag{37b}$$

donde

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{a}(\mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{X})); \tag{37c}$$

aquí $\mathbf{a}$ representa una matriz constante no singular, elegida apropiadamente, la cual tiene una recíproca $\mathbf{a}^{-1}$. Entonces, la ecuación (37b) es equivalente a $\mathbf{a}(\mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{X})) = 0$, la cual, multiplicando por $\mathbf{a}^{-1}$, da

$$\mathbf{a}^{-1}\mathbf{a}(\mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{X})) = \mathbf{e}(\mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{X})) = \mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0,$$

donde $\mathbf{e}$ es la matriz unidad. De donde, cualquier solución $\mathbf{X}$ de (37b)—es decir, cualquier *punto fijo de la aplicación* $\mathbf{G}$—proporciona una solución de $\mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$.

Se demostrará que una solución $\mathbf{X}$ de (37b) está dada por el límite de los $\mathbf{X}_n$ definidos por la fórmula de recurrencia

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{X}_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{37d}$$

[1]Para las aplicaciones $\mathbf{F}$ en n dimensiones se debe remplazar el factor 2 en (36b) por n.

siempre que la matriz $\mathbf{G}'(\mathbf{X})$ que representa la derivada de la aplicación vectorial $\mathbf{G}$ tenga una magnitud lo suficientemente pequeña. Más precisamente, se requiere que, para todo $\mathbf{X}$ en la vecindad (37a) de $\mathbf{X}_0$, el elemento máximo de la matriz $\mathbf{G}'$ sea menor que 1/4 en valor absoluto y que

$$|\mathbf{G}(\mathbf{X}_0) - \mathbf{X}_0| < \frac{1}{2}\delta.$$

Primero se probará por inducción que, bajo las hipótesis establecidas, la fórmula de recurrencia (37d) sólo conduce a vectores que satisfacen (37a). De esta manera se asegura que los $\mathbf{X}_n$ se encuentran en el dominio de $\mathbf{G}$, de modo que la sucesión puede continuarse indefinidamente. De (36b) se encuentra, con $M = \frac{1}{4}$, que

$$\text{(37e)} \quad |\mathbf{G}(\mathbf{Y}) - \mathbf{G}(\mathbf{X})| \leqq \frac{1}{2}|\mathbf{Y} - \mathbf{X}| \quad \text{para} \quad |\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| < \delta, \ |\mathbf{Y} - \mathbf{X}_0| < \delta.$$

Ahora bien, la desigualdad (37a) es satisfecha trivialmente por $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0$. Si se cumple para $\mathbf{X} = \mathbf{X}_n$, se encuentra, para el vector $\mathbf{X}_{n+1}$ definido por (37d), que

$$\begin{aligned}|\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_0| \leqq |\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_1| + |\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0| = |\mathbf{G}(\mathbf{X}_n) - \mathbf{G}(\mathbf{X}_0)| \\ + |\mathbf{G}(\mathbf{X}_0) - \mathbf{X}_0| \leqq \frac{1}{2}|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_0| + \frac{1}{2}\delta < \delta.\end{aligned}$$

Esto prueba que $|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_0| < \delta$ para toda n.

Para ver que los $\mathbf{X}_n$ convergen obsérvese que, por (37e),

$$|\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n| = |\mathbf{G}(\mathbf{X}_n) - \mathbf{G}(\mathbf{X}_{n-1})| \leqq \frac{1}{2}|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}|.$$

Por el mismo razonamiento,

$$|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}| \leqq \frac{1}{2}|\mathbf{X}_{n-1} - \mathbf{X}_{n-2}|,$$

$$|\mathbf{X}_{n-1} - \mathbf{X}_{n-2}| \leqq \frac{1}{2}|\mathbf{X}_{n-2} - \mathbf{X}_{n-3}|,$$

y así sucesivamente. Estas desigualdades en conjunto conducen a la estimación

$$\text{(37f)} \qquad |\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n| \leqq \frac{1}{2^n}|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0| \leqq \frac{\delta}{2^{n+1}}.$$

Entonces, se concluye la existencia de $\mathbf{X} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{X}_n$ escribiendo $\mathbf{X}$ como la suma de una serie infinita

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) + (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) + \cdots + (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n) + \cdots,$$

cuya convergencia se establece a partir de (37f) por *comparación* (ver el Volumen I, p. 521) con una serie geométrica convergente. Que $\mathbf{X}$ es una solución de (37b) se deduce inmediatamente de (37d) cuando $n \to \infty$, aplicando la continuidad de $\mathbf{G}(\mathbf{X})$.

Por su definición (37c), la función $\mathbf{G}$ depende continuamente no sólo de $\mathbf{X}$ sino también del vector $\mathbf{U}$. Entonces, los $\mathbf{X}_n$ obtenidos sucesivamente por medio de la fórmula de recurrencia (37d) también dependen continuamente de $\mathbf{U}$.[1] Dado que la serie geométrica usada en la comparación que establece la convergencia de $\mathbf{X} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{X}_n$ no depende de $\mathbf{U}$, se concluye que $\mathbf{X}$ es un *límite uniforme de funciones continuas de* $\mathbf{U}$ y de aquí que él mismo es una función continua de $\mathbf{U}$. Además, es evidente que $|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| \leqq \delta$, dado que $|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}| < \delta$ para toda n. Si existiera una segunda solución $\mathbf{Y}$, con $\mathbf{Y} = \mathbf{G}(\mathbf{Y})$ y $|\mathbf{Y} - \mathbf{X}_0| \leqq \delta$, de (37*c*) se encontraría que

$$|\mathbf{Y} - \mathbf{X}| = |\mathbf{G}(\mathbf{Y}) - \mathbf{G}(\mathbf{X})| \leqq \frac{1}{2}|\mathbf{Y} - \mathbf{X}|$$

y, de aquí, que $|\mathbf{Y} - \mathbf{X}| = 0$ y $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$.

De esta manera se establece la existencia, unicidad y continuidad de una solución $\mathbf{X}$ de la ecuación $\mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, para la cual $|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| \leqq \delta$, *siempre que* el vector $\mathbf{G}$ definido por (37c) tenga una derivada $\mathbf{G}'$ con elementos menores que $\frac{1}{4}$ en valor absoluto para $|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| \leqq \delta$, y siempre que

$$|\mathbf{G}(\mathbf{X}_0) - \mathbf{X}_0| < \frac{1}{2}\delta.$$

Se ve con facilidad que se pueden satisfacer los requisitos para todo $\mathbf{U}$ lo suficientemente próximo a $\mathbf{U}_0$, eligiendo apropiadamente la matriz $\mathbf{a}$. Por (37c),

$$\mathbf{G}'(\mathbf{X}) = \mathbf{e} - \mathbf{a}\mathbf{F}'(\mathbf{X}),$$

donde $\mathbf{e}$ es la matriz unidad. Entonces, para $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0$,

$$\mathbf{G}'(\mathbf{X}_0) = \mathbf{e} - \mathbf{a}\mathbf{F}'(\mathbf{X}_0) = \mathbf{O},$$

[1] Aquí se aplica el hecho de que funciones continuas de funciones continuas son también continuas.

si se elige como $\mathbf{a}$ la matriz recíproca a la matriz $\mathbf{F}'(\mathbf{X}_0)$:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{F}'(\mathbf{X}_0))^{-1}.$$

(La existencia de esta recíproca se deduce a partir de la hipótesis básica de que la matriz $\mathbf{F}'(\mathbf{X}_0)$ tiene un determinante que no se anula, es decir, que el jacobiano de la aplicación $\mathbf{F}$ no se anula en el punto $\mathbf{X}_0$). Con base en la continuidad supuesta de las primeras derivadas de la aplicación $\mathbf{F}$, se concluye que $\mathbf{G}'(\mathbf{X})$ depende continuamente de $\mathbf{X}$; de aquí que los elementos de $\mathbf{G}'(\mathbf{X})$ son arbitrariamente pequeños (por ejemplo, menores que $\frac{1}{4}$,) para $|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|$, lo suficientemente pequeño, digamos, para

$$|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| \leqq \delta;$$

además, por (37c),

$$|\mathbf{G}(\mathbf{X}_0) - \mathbf{X}_0| = |\mathbf{a}(\mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{X}_0)| = |\mathbf{a}(\mathbf{U} - \mathbf{U}_0)| < \frac{1}{2}\delta,$$

siempre que $\mathbf{U}$ esté en una vecindad lo suficientemente pequeña de $\mathbf{U}_0$.

Esto completa la demostración para la existencia local de una inversa continua de una aplicación continuamente diferenciable con jacobiano que no se anula. La existencia y continuidad de las primeras derivadas de la aplicación inversa se deducen fácilmente de las fórmulas (36c, d). Sea $\mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, donde se supone que la matriz jacobiana $\mathbf{F}'(\mathbf{X})$ es no singular. Entonces todo $\mathbf{V}$ lo suficientemente próximo a $\mathbf{U}$ es de la forma $\mathbf{V} = \mathbf{F}(\mathbf{Y})$, donde $\mathbf{Y}$ tiende a $\mathbf{X}$ cuando $\mathbf{V}$ tiende a $\mathbf{U}$. De aquí que, para $\mathbf{V}$ lo suficientemente próximo a $\mathbf{U}$, la matriz $\mathbf{H}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ también es no singular. Entonces se encuentra que

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} - \mathbf{X} &= (\mathbf{H}(\mathbf{X},\mathbf{Y}))^{-1}(\mathbf{V} - \mathbf{U})\\ &= (\mathbf{F}'(\mathbf{X}))^{-1}(\mathbf{V} - \mathbf{U}) + \mathbf{E}(\mathbf{X},\mathbf{Y})(\mathbf{V} - \mathbf{U})\end{aligned}$$

donde

$$\lim_{V\to U} \mathbf{E}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \lim_{Y\to X} \mathbf{E}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{0}.$$

Empero, esta relación expresa precisamente que el vector $\mathbf{X}$ que satisface $\mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ es una función diferenciable del vector $\mathbf{U}$, y que la matriz jacobiana de $\mathbf{X}$ con respecto a $\mathbf{U}$ es la recíproca de

la matriz $\mathbf{F}'(\mathbf{X})$. Obviamente, puede aplicarse la misma construcción de la inversa, por medio de *interacción* o *aproximaciones sucesivas,* a aplicaciones en cualquier número de dimensiones.

Ejercicios 3.3g

1. Obtener la aproximación iterativa (x_2, y_2) para la transformación inversa de

$$u = \frac{1}{2}(^2x - y^2),\ v = xy$$

aplicando (37d) a una vecindad de $\mathbf{X} = (1, 1)$, o bien, $\mathbf{U} = (0, 1)$.

2. Comparar el resultado del ejercicio anterior con los desarrollos de Taylor de x y y hasta el segundo orden en la vecindad de $u = 1$, $v = 1$.

h. Funciones dependientes

Si el jacobiano D se anula en un punto (x_0, y_0), no puede hacerse proposición general alguna acerca de la posibilidad de resolver las ecuaciones (33a) en la vecindad de ese punto. Incluso si se tiene que las funciones inversas existen, éstas no pueden ser diferenciables, porque entonces el producto

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} \cdot \frac{d(x, y)}{d(u, v)}$$

se anularía, mientras que por lo expuesto en la p. 306 debe ser igual a 1. Por ejemplo, las ecuaciones

$$u = x^3, \qquad v = y$$

se pueden resolver de modo único en la forma

$$x = \sqrt[3]{u}, \qquad y = v,$$

aunque el jacobiano se anula en el origen; pero la función $\sqrt[3]{u}$ no es diferenciable en el origen.

Por otra parte, las ecuaciones

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy$$

no se pueden resolver de modo único en la vecindad del origen, dado que los dos puntos (x, y) y $(-x, -y)$ del plano x, y, corresponden al mismo punto del plano u, v.

Si el jacobiano se anula idénticamente, no sólo en el punto (x, y) sino en todo punto de una vecindad completa de (x, y), entonces se dice que la transformación es *degenerada*. En este caso, se puede demostrar que las funciones

$$u = \phi(x, y) \qquad \text{y} \qquad v = \psi(x, y)$$

son dependientes, en el sentido de que una de ellas es una función de la otra.[1] Primero se considerará el caso trivial en el que las ecuaciones $\phi_x = 0$ y $\phi_y = 0$ se cumplen en todo punto, de modo que la función $\phi(x, y)$ es una constante. Entonces se ve que mientras que el punto (x, y) varía sobre toda una región, su imagen (u, v) permanece siempre sobre la recta $u =$ constante. Es decir, una región se aplica en una sola recta, en lugar de sobre otra región, de modo que no existe posibilidad de una aplicación biunívoca entre dos regiones bidimensionales.

Surge una situación semejante en el caso general en el que al menos una de las derivadas ϕ_x o ϕ_y no se anula pero el jacobiano D aún es cero. Supóngase que en un punto (x_0, y_0) de la región bajo consideración se tiene $\phi_x \neq 0$. Entonces es posible resolver la primera ecuación para x en la forma $x = X(u, y)$ y escribir $v = \psi(X(u, y), y) = \chi(u, y)$, precisamente como en la p. 309, porque allí sólo se hizo uso de la suposición de que $\phi_x \neq 0$. No obstante, en virtud de (34j) y la ecuación $D = 0$, χ_y debe ser idénticamente 0 en la región donde $\phi_x \neq 0$; ésto es, la cantiad $\chi = v$ no depende de y en lo absoluto y v es una función únicamente de u. Entonces, se concluye que si el jacobiano de la transformación se anula idénticamente, una región del plano x, y es aplicada por medio de la transformación sobre una curva en el plano u, v, en lugar de sobre una región, porque en un cierto intervalo de valores de u sólo un valor de v corresponde a cada valor de u. Así, si el jacobiano se anula idénticamente, las funciones no son independientes; es decir, existe una relación

$$F(\varphi, \psi) = \psi - \chi(\varphi) = 0$$

que es satisfecha por todos los sistemas de valores (x, y) en la región. Recíprocamente, si existe una curva en el plano u, v sobre la cual se aplica la región del plano x, y, entonces, para todos los puntos de esta región el jacobiano $D = \phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x$ debe anularse idénticamente,

[1] La anulación del jacobiano también es equivalente a la *dependencia de los vectores* (ϕ_x, ϕ_y) y (ψ_x, ψ_y) formados por las primeras derivadas de las funciones de aplicación.

ya que es obvio que la aplicación no se puede invertir en una vecindad completa de un punto.

Obviamente, el caso excepcional que se discutió por separado al principio está incluído en esta proposición general. La curva en cuestión es precisamente la curva $u =$ constante, la cual es paralela al eje v.

Un ejemplo de una transformación degenerada es

$$\xi = x + y, \qquad \eta = (x + y)^2.$$

En esta transformación todos los puntos del plano x, y se aplican sobre los puntos de la parábola $\eta = \xi^2$ en el plano ξ, η. Invertir la transformación está fuera de la cuestión, porque todos los puntos de la recta $x + y =$ constante se aplican sobre un solo punto (ξ, η). Como se puede verificar fácilmente, el valor del jacobiano es 0. La relación entre las funciones ξ y η, de acuerdo con el teorema general, está dada por la ecuación

$$F(\xi, \eta) = \xi^2 - \eta = 0.$$

Ejercicios 3.3h

1. Dar un ejemplo de una pareja de funciones continuamente diferenciables $\xi = f(x, y)$, $\eta = g(x, y)$ que sean independientes en una región y no independientes en otra.
2. Probar que si $\xi = ax + by + c$ y $\eta = \alpha x + \beta y + \gamma$ son dependientes, las rectas $\xi = 0$ y $\eta = 0$ son paralelas.

i. Observaciones finales

La generalización de la teoría al caso de tres o más variables independientes no presenta dificultades particulares. La diferencia principal es que en lugar del determinante D de dos filas se tienen determinantes con tres o más filas. En el caso de transformaciones con tres variables independientes

$$\xi = \phi(x, y, z), \qquad \eta = \psi(x, y, z), \qquad \zeta = \chi(x, y, z),$$

$$x = g(\xi, \eta, \zeta), \qquad y = h(\xi, \eta, \zeta), \qquad z = l(\xi, \eta, \zeta),$$

el jacobiano está dado por la ecuación

$$D = \frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{d(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \phi_x & \psi_x & \chi_x \\ \phi_y & \psi_y & \chi_y \\ \phi_z & \psi_z & \chi_z \end{vmatrix}$$

De la misma manera, para las transformaciones

$$\xi_i = \phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$x_i = g_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

con n variables independientes, el jacobiano es

$$\frac{d(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n}, & \ldots, & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Para más de dos variables independientes aún se cumple que cuando se componen las transformaciones sus jacobianos se multiplican entre sí. En símbolos,

$$\frac{d(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{d(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)} \cdot \frac{d(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{d(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

En particular, el jacobiano de la transformación inversa es el recíproco del jacobiano de la transformación original.

Los teoremas acerca de la resolución y composición de transformaciones, acerca de la inversión de una transformación y acerca de la dependencia de las transformaciones, siguen siendo válidos para tres o más variables independientes. Las demostraciones son semejantes a las del caso $n = 2$; para evitar la repetición innecesaria, se omiten. Lo mismo se cumple para la construcción de la aplicación inversa por el método de iteración.

En la sección precedente se vio que, en muchos aspectos, el comportamiento de una transformación general se semeja al de una transformación afín, y que el jacobiano desempeña el mismo papel que el determinante en el caso de una transformación afín. La observación que sigue aclarará aún más ésto. Dado que las funciones $\xi = \phi(x, y)$ y

$\eta = \psi(x, y)$ son diferenciables en la vecindad de (x_0, y_0), se pueden expresar en la forma

$$\xi - \xi_0 = (x - x_0)\phi_x(x_0, y_0) + (y - y_0)\phi_y(x_0, y_0) + \varepsilon\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$\eta - \eta_0 = (x - x_0)\psi_x(x_0, y_0) + (y - y_0)\psi_y(x_0, y_0) + \delta\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

donde ε y δ tienden a cero con

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Esto demuestra que para valores lo suficientemente pequeños de $|x - x_0|$ y $|y - y_0|$, la transformación se puede representar en forma aproximada por medio de la transformación afín

$$\xi = \xi_0 + (x - x_0)\phi_x(x_0, y_0) + (y - y_0)\phi_y(x_0, y_0),$$

$$\eta = \eta_0 + (x - x_0)\psi_x(x_0, y_0) + (y - y_0)\psi_y(x_0, y_0),$$

cuyo determinante es el jacobiano de la transformación original.

Ejercicios 3.3i

1. Evaluar $\partial(\xi, \eta, \rho)/\partial(x, y, z)$ para cada uno de los casos que siguen:

(a) $\xi = e^x \cos y \cos z$
$\eta = e^x \cos y \operatorname{sen} z$
$\rho = e^x \operatorname{sen} y$

(b) $\xi = \cos(x + y) + \cos(y + z)$
$\eta = \cos(x + y) + \operatorname{sen}(y + z)$
$\rho = \operatorname{sen}(x + y) + \cos(y + z)$

(c) $\xi = \cosh x + \log y$
$\eta = \tanh y - \operatorname{senh} z$
$\rho = x - y^z$

(d) $\xi = x \cos y \operatorname{sen} z$
$\eta = x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$
$\rho = x \cos z$

(e) $\xi = x \cos y$
$\eta = x \operatorname{sen} y$
$\rho = z.$

2. Definir la dependencia de las funciones $\xi = f(x, y, z)$, $\eta = g(x, y, z)$, ρ

$= h(x, y, z)$, en una región. Generalizar los resultados de la Sección h para este caso.

3. ¿Cuáles de las ternas de funciones dadas en el Ejercicio 1 son dependientes? Dar una ecuación que relacione las funciones de cada una de esas ternas.
4. Demostrar que las tres funciones siguientes son dependientes y encontrar una relación entre ellas:

$$\xi = x + y + z$$
$$\eta = x^2 + y^2 + z^2$$
$$\zeta = xy + yz + zx.$$

5. Una inversión en tres dimensiones se define por medio de las fórmulas

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \zeta = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

(a) Probar que no se altera el ángulo entre dos superficies cualesquiera.
(b) Probar que las esferas se transforman en esferas, o bien, en planos.
(c) Encontrar el jacobiano de la transformación.

3.4 Aplicaciones

a. Elementos de la teoría de superficies

Para las superficies, como para las curvas, con frecuencia se prefiere la representación paramétrica a otros tipos de representación. Para las superficies se necesitan dos parámetros en lugar de uno; los denotaremos por u y v. Una representación paramétrica se puede expresar en la forma

$$x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \tag{39a}$$

donde ϕ, ψ, y χ son funciones dadas de los parámetros u y v y el punto (u, v) varía sobre una región R en el plano u, v. Entonces, el punto correspondiente con las tres coordenadas rectangulares (x, y, z) varía sobre un conjunto en el espacio x, y, z. Típicamente, este conjunto es una superficie, la cual se puede representar en la forma explícita $z = f(x, y)$, porque posiblemente se puedan resolver dos de las tres ecuaciones para u y v en términos de las dos coordenadas rectangulares correspondientes. Si en la tercera ecuación se sustituyen las expresiones encontradas para u y v, se obtiene una representación no simétrica de la superficie $z = f(x, y)$.[1] De aquí que con el fin de

[1] Realmente éste es un caso especial de la forma paramétrica, como se ve poniendo $x = u$ y $y = v$.

asegurar que las ecuaciones en realidad representan una superficie, sólo se tiene que suponer que los tres jacobianos

(39b) $$\begin{vmatrix} \psi_u & \psi_v \\ \chi_u & \chi_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \chi_u & \chi_v \\ \phi_u & \phi_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \phi_u & \phi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}$$

no se anulan al mismo tiempo; en una sola fórmula, se requiere que

(39c) $$(\phi_u\psi_v - \phi_v\psi_u)^2 + (\psi_u\chi_v - \psi_v\chi_u)^2 + (\chi_u\phi_v - \chi_v\phi_u)^2 > 0.$$

Entonces, en alguna vecindad de cada punto en el espacio, representado por (39a), sin duda es posible expresar una de las tres coordenadas en términos de las otras dos.

Resulta ventajoso remplazar las tres ecuaciones en la representación paramétrica (39a) por una sola ecuación vectorial

(40a) $$\mathbf{X} = \Phi(u, v),$$

donde $\mathbf{X} = (x, y, z)$ es el *vector de posición* de un punto de la superficie y Φ denota al vector

$$\Phi(u, v) = (\phi(u, v), \ \psi(u, v), \ \chi(u, v)).$$

En cada punto de la superficie con parámetros u, v se pueden formar las *derivadas parciales del vector de posición*

(40b) $$\mathbf{X}_u = (\phi_u, \psi_u, \chi_u) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{X}_v = (\phi_v, \psi_v, \chi_v).$$

Entonces la diferencial total del vector $\mathbf{X}$ es [ver la fórmula (15b), p. 77].

(40c) $$d\mathbf{X} = (dx, dy, dz) = \mathbf{X}_u \, du + \mathbf{X}_v \, dv.$$

Los tres determinantes (39b) son precisamente los componentes del producto vectorial $\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v$ de los vectores $\mathbf{X}_u$ y $\mathbf{X}_v$ (ver la p. 221). La expresión a la izquierda en (39c) representa el cuadrado de la longitud del vector $\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v$, de modo que la condición (39c) es equivalente a

(40d) $$\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v \neq 0.$$

Por ejemplo, la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ de radio r se representa paramétricamente por medio de las ecuaciones

(40e) $$x = r \cos u \operatorname{sen} v, \qquad y = r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \qquad z = r \cos v$$
$$(0 \leqq u < 2\pi, \quad 0 \leqq v \leqq \pi),$$

donde $v = \theta$ es la "inclinación polar" y $u = \phi$ es la "longitud" del punto sobre la esfera (ver la p. 250).

Este ejemplo pone de manifiesto una de las ventajas de la representación paramétrica. Las tres coordenadas se dan explícitamente como funciones de u y v, y estas funciones son uniformes. Si v varía desde $\pi/2$ hasta π, se obtiene el hemisferio inferior, es decir,

$$z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2},$$

mientras que los valores de v desde 0 hasta $\pi/2$ dan el hemisferio superior. Por tanto, para la representación paramétrica no es necesario, como lo es para la representación

$$z = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2},$$

considerar dos ramas uniformes de la función para obtener la esfera completa.

Se obtiene otra representación paramétrica de la esfera por medio de la *proyección estereográfica* (ver el Volumen I, p. 21). Para proyectar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, estereográficamente desde el polo norte $(0, 0, r)$ sobre el plano ecuatorial $z = 0$, se une cada punto de la superficie con el polo norte (N) por medio de una recta, y a la intersección de esta recta con el plano ecuatorial se le da el nombre de *imagen estereográfica* del punto correspondiente de la esfera (Fig. 3.12). Así se obtiene una correspondencia biunívoca entre los puntos de la esfera y los puntos del plano, excepto para el polo norte N. Aplicando geometría elemental fácilmente se encuentra que esta correspondencia se expresa por medio de las fórmulas

(40f) $$x = \frac{2r^2u}{u^2 + v^2 + r^2}, \qquad y = \frac{2r^2v}{u^2 + v^2 + r^2}, \qquad z = \frac{(u^2 + v^2 - r^2)r}{u^2 + v^2 + r^2},$$

donde (u, v) son las coordenadas rectangulares del punto imagen en el plano. Estas ecuaciones se pueden considerar como una representación paramétrica de la esfera, siendo los parámetros u y v las coordenadas rectangulares en el plano u, v.

Como un ejemplo más, se darán las representaciones paramétricas de las superficies

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

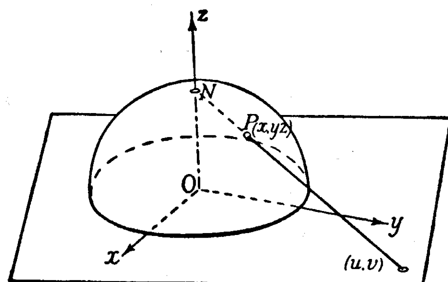


Figura 3.12 Proyección estereográfica de la esfera.

los cuales se conocen como *hiperboloide de un manto* e *hiperboloide de dos mantos,* respectivamente (ver las Figs. 3.13 y 3.14). El hiperboloide de un manto se representa por

(40g)
$$x = a \cos u \cosh v,$$
$$y = b \operatorname{sen} u \cosh v,$$
$$z = c \operatorname{senh} v$$
$$(0 \leqq u < 2\pi, \quad -\infty < v < +\infty)$$

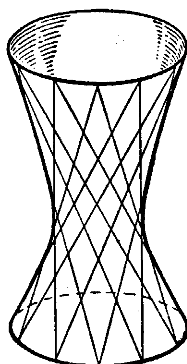
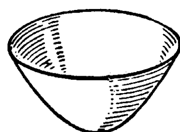


Figura 3.13 Hiperboloide de un manto.



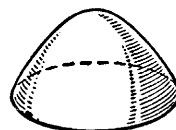


Figura 3.14 Hiperboloide de dos mantos.

y el hiperboloide de dos mantos, por

$$x = a \cos u \operatorname{senh} v,$$

(40h)
$$y = b \operatorname{sen} u \operatorname{senh} v,$$

$$z = \pm c \cosh v$$

$$(0 \leqq u < 2\pi,\ 0 < v < +\infty).$$

En general, puede considerarse la *representación paramétrica* de una superficie como la *aplicación de la región R del plano u, v sobre la superficie correspondiente.* A cada punto de la región R del plano u, v le corresponde un punto de la superficie y, para puntos típicos, lo inverso también se cumple.*

De la misma manera, una curva $u = u(t)$, $v = v(t)$ en el plano u, v corresponde, en virtud de las ecuaciones

$$x = \phi(u(t),v(t)) = x(t), \ldots,$$

a una curva sobre la superficie. En particular, en la representación (40e) de la esfera por medio de coordenadas esféricas, los meridianos se representan por la ecuación $u =$ constante y los paralelos de latitud por $v =$ constante. Generalmente se pueden considerar esas curvas sobre una superficie que están dadas por las ecuaciones $u =$ constante o $v =$ constante. Si en la representación paramétrica considerada se sustituye u, por un valor fijo definido, se obtiene una "curva en el espacio" o "curva alabeada" que se encuentra sobre la superficie y que tiene a v como parámetro; se cumple también una proposición correspondiente si se sustituye v por un valor fijo y se deja variar u. Estas curvas $u =$ constante y $v =$ constante son las *curvas paramétricas* o *líneas coordenadas* sobre la superficie. La red de curvas paramétricas corresponde a la red de paralelas a los ejes en el plano u, v (Fig. 3.15).

La tangente a la curva sobre la superficie, correspondiente a la curva $u = u(t)$, $v = v(t)$ en el plano u, v tiene la dirección del vector

$$(41)\quad \dot{\mathbf{X}}_t = (x_t, y_t, z_t) = \left(x_u \frac{du}{dt} + x_v \frac{dv}{dt},\ y_u \frac{du}{dt} + y_v \frac{dv}{dt},\ z_u \frac{du}{dt} + z_v \frac{dv}{dt}\right)$$
$$= \mathbf{X}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{X}_v \frac{dv}{dt}$$

*Por supuesto, éste no es siempre el caso. Por ejemplo, en la representación (40e) de la esfera por medio de coordenadas esféricas (p. 328), los polos de la esfera corresponden a los segmentos rectilíneos completos dados por $v = 0$ y $v = \pi$.

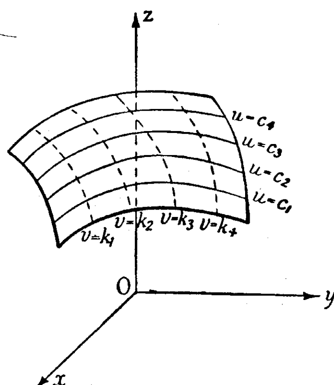


Figura 3.15 Curvas paramétricas $u =$ constante, $v =$ constante.

(ver la p. 256). En un punto dado de la superficie los vectores tangenciales $\mathbf{X}_t$ de todas las curvas sobre la superficie que pasan por ese punto dependen de los dos vectores $\mathbf{X}_u$, $\mathbf{X}_v$, los cuales, respectivamente, son tangenciales a las líneas paramétricas $v =$ constante y $u =$ constante que pasan por ese punto. Esto significa que todas las tangentes se encuentran en el plano que pasa por el punto y es *generado* por los vectores $\mathbf{X}_u$ y $\mathbf{X}_v$, el *plano tangente a la superficie* en ese punto. La *normal* a la superficie es perpendicular a todas las direcciones tangenciales, en particular a los vectores $\mathbf{X}_u$ y $\mathbf{X}_v$. Se concluye (ver la p. 221) que la superficie normal es paralela a la dirección del producto vectorial

$$\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v = (y_u z_v - y_v z_u,\ z_u x_v - z_v x_u,\ x_u y_v - x_v y_u). \tag{42}$$

Una de las herramientas más importantes para la investigación de las propiedades de una superficie dada es el estudio de las curvas que se encuentran sobre ella. Aquí sólo se dará la expresión para s, la longitud de arco de tal curva. Como se mencionó en la p. 257 (ver también el Volumen I, p. 353)

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \mathbf{X}_t \cdot \mathbf{X}_t,$$

de modo que, en vista de las ecuaciones (41), se obtiene

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\mathbf{X}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{X}_v \frac{dv}{dt}\right) \cdot \left(\mathbf{X}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{X}_v \frac{dv}{dt}\right) \tag{43}$$

$$= \left(x_u \frac{du}{dt} + x_v \frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(y_u \frac{du}{dt} + y_v \frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(z_u \frac{du}{dt} + z_v \frac{dv}{dt}\right)^2$$

$$= E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Aquí los coeficientes E, F, G, las *cantidades gaussianas fundamentales* de la superficie, están dadas por

(44a) $$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u$$

(44b) $$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v$$

(44c) $$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_v.$$

Estas cantidades dependen de la propia superficie y de su representación paramétrica y no de la elección particular de la curva sobre la superficie. Por lo común, la expresión (43) para la derivada de la longitud de arco s con respecto al parámetro t se escribe simbólicamente sin hacer referencia al parámetro usado a lo largo de la curva. Se dice que el *elemento lineal* ds está dado por la forma cuadrática diferencial ("forma fundamental")

(45) $$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

La longitud del producto cruz $\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v$ puede expresarse en términos de E, F, G como (ver la p. 222)

(45a) $$|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|^2 = |\mathbf{X}_u|^2|\mathbf{X}_v|^2 - (\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v)^2 = EG - F^2.$$

Por tanto, la hipótesis original (39c) o (40d), acerca de la representación paramétrica, puede enunciarse como la condición

(46) $$EG - F^2 > 0$$

para las cantidades fundamentales.

Los cosenos directores para una de las dos normales a la superficie son las componentes del vector unitario

$$\frac{1}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|}\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v.$$

De (42) se deduce que la normal para una superficie representada paramétricamente tiene los cosenos directores

$$(47)\quad \cos\alpha = \frac{y_u z_v - y_v z_u}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \cos\beta = \frac{z_u x_v - z_v x_u}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{x_u y_v - x_v y_u}{\sqrt{EG - F^2}}$$

La tangente a una curva $u = u(t)$, $v = v(t)$ sobre la superficie tiene la dirección del vector

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{X}_v \frac{dv}{dt}.$$

Si ahora se considera una segunda curva $u = u(\tau)$, $v = v(\tau)$ sobre la superficie, referida a un parámetro τ, su tangente tiene la dirección del vector

$$\mathbf{X}_\tau = \mathbf{X}_u \frac{du}{d\tau} + \mathbf{X}_v \frac{dv}{d\tau}.$$

Si las dos curvas pasan por el mismo punto sobre la superficie, el coseno del ángulo de intersección ω es igual al coseno del ángulo entre los vectores $\mathbf{X}_t$ y $\mathbf{X}_\tau$. De aquí que (ver la p. 165).

$$\cos\omega = \frac{\mathbf{X}_t \cdot \mathbf{X}_\tau}{|\mathbf{X}_t|\,|\mathbf{X}_\tau|}.$$

Aquí

$$\mathbf{X}_t \cdot \mathbf{X}_\tau = \left(\mathbf{X}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{X}_v \frac{dv}{dt}\right) \cdot \left(\mathbf{X}_u \frac{du}{d\tau} + \mathbf{X}_v \frac{dv}{d\tau}\right)$$

$$= E\frac{du}{dt}\frac{du}{d\tau} + F\left(\frac{du}{dt}\frac{dv}{d\tau} + \frac{du}{d\tau}\frac{dv}{dt}\right) + G\frac{dv}{dt}\frac{dv}{d\tau}.$$

Consecuentemente, el coseno del ángulo entre las dos curvas sobre la superficie está dado por

$$(48)\quad \cos\omega = \frac{E\dfrac{du}{dt}\dfrac{du}{d\tau} + F\left(\dfrac{du}{dt}\dfrac{dv}{d\tau} + \dfrac{du}{d\tau}\dfrac{dv}{dt}\right) + G\dfrac{dv}{dt}\dfrac{dv}{d\tau}}{\sqrt{E\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 + 2F\dfrac{du}{dt}\dfrac{dv}{dt} + G\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2}\sqrt{E\left(\dfrac{du}{d\tau}\right)^2 + 2F\dfrac{du}{d\tau}\dfrac{dv}{d\tau} + G\left(\dfrac{dv}{d\tau}\right)^2}}$$

La aplicación de una región plana sobre otras se puede considerar como un caso especial de representación paramétrica, porque si la

tercera de las funciones dadas en (39a), $\chi(u, v)$, se anula para todos los valores de u y v bajo consideración, las ecuaciones simplemente representan la aplicación de una región del plano u, v sobre una región del plano x, y; o bien, si se prefiere pensar en términos de transformaciones de coordenadas, las ecuaciones definen un sistema de *coordenadas curvilíneas* en la región u, v y las funciones inversas (si existen) definen un sistema u, v curvilíneo de coordenadas en la región plana x, y. En términos de las coordenadas curvilíneas (u, v), el elemento lineal en el plano x, y es sencillamente ver (44a, b, c)

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2,$$

donde

(49a) $$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2,$$

(49b) $$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},$$

(49c) $$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2.$$

Como un ejemplo más de la representación de una superficie en forma paramétrica, considérese el *arganeo* o *toro*. Este se obtiene haciendo girar un círculo alrededor de una recta que se encuentra en el plano del círculo y que no se intersecta con él (ver la Fig. 3.16). Tómese el eje de rotación como el eje z y elíjase el eje y de tal manera que pase por el centro del círculo, cuya coordenada y se denota por a. Si el radio del círculo es $r < |a|$, se obtiene

$$x = 0,\ y - a = r\cos\theta,\ z = r\operatorname{sen}\theta\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

como una representación paramétrica del círculo en el plano y, z. Ahora bien, haciendo que el círculo gire alrededor del eje z se encuentra que, para cada punto del círculo $x^2 + y^2$ permanece constante; es decir, $x^2 + y^2 = (a + r\cos\theta)^2$. Si ϕ es el ángulo de rotación alrededor del eje z, se tiene

$$x = (a + r\cos\theta)\operatorname{sen}\phi,$$

$$y = (a + r\cos\theta)\cos\phi,$$

$$z = r\operatorname{sen}\theta$$

$$(0 \leqq \phi < 2\pi,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$$

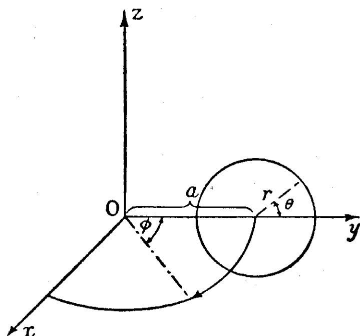


Figura 3.16 Generación de un toro por la rotación de un círculo.

como una representación paramétrica del toro en términos de los parámetros θ y ϕ. En esta representación el toro aparece como la imagen de un cuadrado de lado 2π en el plano θ, ϕ, donde cualquier pareja de puntos frontera que se encuentre sobre la misma recta $\theta =$ constante o $\phi =$ constante corresponde a sólo un punto de la superficie, y las cuatro esquinas del cuadrado corresponden al mismo punto.

Para el elemento lineal sobre el arganeo se tiene, por (44a, b, c) y (45),

$$ds^2 = r^2\, d\theta^2 + (a + r \cos\theta)^2 d\phi^2.$$

Ejercicios 3.4a

1. Calcular el elemento lineal
   (a) sobre la esfera

$$x = \cos u \operatorname{sen} v, \qquad y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \qquad z = \cos v;$$

   (b) sobre el hiperboloide

$$x = \cos u \cosh v, \qquad y = \operatorname{sen} u \cosh v, \qquad z = \operatorname{senh} v;$$

   (c) sobre la superficie de revolución dada por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = f(z),$$

   usando las coordenadas cilíndricas z y $\theta = \arctan(y/x)$ como coordenadas sobre la superficie;

   (d) sobre la cuádrica $t_3 =$ constante de la familia de cuádricas confocales dada por

$$\frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} + \frac{z^2}{c-t} = 1,$$

usando t_1 y t_2 como coordenadas sobre la cuádrica (ver el Ejercicio 9, p. 256).

2. Encontrar las cantidades fundamentales de Gauss para la catenoide $x = a \cosh (t/a) \cos (\theta/a)$, $y = a \cosh (t/a) \operatorname{sen} (\theta/a)$, $z = t$; demostrar que $E - G = F = 0$.
3. Para la superficie $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = \alpha u + \beta$, $\alpha, \beta =$ constante, demostrar que las imágenes de las rectas $u =$ constante, $v =$ constante son ortogonales.
4. ¿Cuál es la forma fundamental que da el elemento lineal para una superficie dada por una ecuación $z = f(x, y)$?
5. Probar que si se introduce un nuevo sistema de coordenadas curvilíneas r, s sobre una superficie con parámetros u, v, por medio de las ecuaciones

$$u = u(r, s), \qquad v = v(r, s),$$

entonces

$$E'G' - F'^2 = (EG - F^2)\left\{\frac{d(u,v)}{d(r, s)}\right\}^2,$$

donde E', F', G' denotan las cantidades fundamentales tomadas con respecto a r, s y E, F, G las tomadas con respecto a u, v.

6. Sea t una tangente a una superficie S en el punto P y considérense las secciones de S formadas por todos los planos que contienen a t. Probar que los centros de curvatura de las diferentes secciones se encuentran sobre un círculo.
7. Si t es una tangente a la superficie S en el punto P, a la curvatura de la sección plana normal que pasa por t (es decir, la sección que pasa por t y la normal) en ese punto se le da el nombre de *curvatura k de S en la dirección t*. Para cada tangente en P tómese el vector con la dirección de t, punto inicial P y longitud $1/\sqrt{k}$. Probar que los puntos finales de estos vectores se encuentran sobre una cónica.
8. Se da una curva como la intersección de las dos superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

Encontrar las ecuaciones de
(a) la tangente,
(b) el plano osculador, en cualquier punto de la curva.

9. Si las coordenadas (x, y, z) de un punto sobre una esfera están dadas por las ecuaciones (ver la p. 297)

$$x = a \operatorname{sen} \theta \cos \phi,\ y = a \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi,\ z = a \cos \theta,$$

demostrar que las dos curvas de los sistemas $\theta + \phi = \alpha$, $\theta - \phi = \beta$, las cuales pasan por cualquier punto (θ, ϕ), se cortan entre sí formando el ángulo arc cos $\{(1 - \operatorname{sen}^2\theta)/(1 + \operatorname{sen}^2 \theta)\}$ (ver la p. 334).

Demostrar que el radio de curvatura de cualquiera de las dos curvas es igual a

$$\frac{a(1+\operatorname{sen}^2\theta)^{3/2}}{(5+3\operatorname{sen}^2\theta)^{1/2}}.$$

b. Transformación conforme en general

Una transformación en el plano,

$$x = \phi(u, v), \qquad y = \psi(u, v) \tag{50}$$

se dice que es conforme si aplica dos curvas cualesquiera que se intersectan, en otras dos que encierren el mismo ángulo que las originales.

Teorema. *Una condición necesaria y suficiente para que una transformación* (50) *continuamente diferenciable sea conforme, es que se cumplan las ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$\phi_u - \psi_v = 0, \qquad \phi_v + \psi_u = 0 \tag{51a}$$

o bien,

$$\phi_u + \psi_v = 0, \qquad \phi_v - \psi_u = 0 \tag{51b}$$

En el primer caso se conserva el sentido de los ángulos; en el segundo, se invierte.[1]

La demostración es como sigue: si la transformación es conforme, las dos curvas ortogonales $u =$ constante $= u_0$, $v = v_0 + t$ y $u = u_0 + \tau$, $v =$ constante $= v_0$, en el plano u, v deben aplicarse en curvas ortogonales en el plano x, y. A partir de la fórmula (48) para el ángulo entre dos curvas (p. 333), inmediatamente se deduce que

$$0 = F = \phi_u\phi_v + \psi_u\psi_v. \tag{51c}$$

De la misma manera, las curvas correspondientes a las rectas $u = u_0 + t$, $v = v_0 + t$ y $u = u_0 + \tau$, $v = v_0 - \tau$ deben ser ortogonales. Esto da

$$0 = E - G = \phi_u^2 + \psi_u^2 - \phi_v^2 - \psi_v^2. \tag{51d}$$

*Esta última proposición se deduce directamente de las proposiciones dadas en la p. 307, referentes al signo del jacobiano $D = \phi_u\psi_v - \phi_v\psi_u$. En el caso de que se cumpla (51a), se tiene $D = \phi_u^2 + \phi_v^2 \geqq 0$; en el caso (51b), $D = -\phi_u^2 - \phi_v^2 \leqq 0$.

La ecuación (51c) puede escribirse como

$$\phi_u = \lambda\psi_v, \quad \phi_v = -\lambda\psi_u,$$

donde λ denota una constante de proporcionalidad. Introduciendo ésto en la ecuación (51d) inmediatamente se obtiene $\lambda^2 = 1$, de modo que se cumple uno o el otro de los dos sistemas de ecuaciones de Cauchy-Riemann (51a, b).

Que las ecuaciones de Cauchy-Riemann son una condición suficiente para la conformidad, excepto en los puntos en donde las cuatro cantidades $\phi_u, \phi_v, \psi_u, \psi_v$ son cero, se confirma por las observaciones siguientes.

Las ecuaciones (51a) o (51b) conducen a las relaciones

$$E = G \geqq 0, \qquad F = 0$$

para las cantidades fundamentales E, F, G, definidas por (49a, b, c). Por (48), entonces el ángulo ω entre dos curvas en el plano x, y está dado por

$$\cos\omega = \frac{\dfrac{du}{dt}\dfrac{du}{d\tau} + \dfrac{dv}{dt}\dfrac{dv}{d\tau}}{\sqrt{\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2}\ \sqrt{\left(\dfrac{du}{d\tau}\right)^2 + \left(\dfrac{dv}{d\tau}\right)^2}}.$$

El segundo miembro de esta ecuación es precisamente el coseno del ángulo entre las curvas correspondientes en el plano u, v. Por tanto, la aplicación conserva los ángulos entre las curvas, cambiando posiblemente su orientación. La única excepción es presentada por los puntos donde $E = F = G = 0$, es decir, por los puntos en donde todas las primeras derivadas de ambas funciones de aplicación se anulan.*

Ejercicios 3.4b

1. Investigar el comportamiento de la aplicación $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$. ¿Es conforme en $u = 2$, $v = 3$? ¿En $u = v = 0$? ¿Por qué?
2. ¿Dónde es conforme la aplicación $x = \frac{1}{2}\log(u^2 + v^2)$, $y = \arctan v/u$?
3. Demostrar que si las dos aplicaciones $(u, v) \to (x, y)$ y $(u, v) \to (\xi, \eta)$ son conformes, la aplicación $(u, v) \to (x\xi - y\eta,\ x\eta + y\xi)$ también es conforme.

[1]Allí la aplicación realmente puede dejar de ser conforme.

4. (a) Probar que la proyección estereográfica de la esfera unitaria sobre el plano es conforme.
   (b) Probar que los círculos sobre la esfera se transforman en círculos, o bien, en rectas en el plano.
   (c) Probar que en la proyección estereográfica la reflexión de la superficie esférica en el plano ecuatorial corresponde a una inversión en el plano u, v.
   (d) Encontrar la expresión para el elemento lineal sobre la esfera, en términos de los parámetros u, v.
5. ¿Bajo qué condiciones sobre los coeficientes gaussianos fundamentales (44), la aplicación del plano u, v hacia la superficie $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v)$ es conforme?
6. Encontrar una aplicación conforme de la esfera $x = \cos\theta \operatorname{sen}\phi$, $y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$, $z = \cos\phi$ hacia el plano u, v tal que $\theta = u$, y $\phi = f(v)$ con $f(0) = \frac{1}{2}\pi$.

3.5 Familias de curvas, familias de superficies y sus envolventes

a. *Observaciones generales*

En varias ocasiones se han considerado las curvas o las superficies no como configuraciones individuales sino como miembros de una familia de curvas o de superficies, tales como $f(x, y) = c$, donde a cada valor de c le corresponde una curva diferente de la familia.

Por ejemplo, las rectas paralelas al eje y en el plano x, y, es decir, las rectas $x = c$, forman una familia de curvas. Lo mismo se cumple para la familia de círculos concéntricos $x^2 + y^2 = c^2$ alrededor del origen; a cada valor de c le corresponde un círculo de la familia, a saber, el círculo con radio c. De modo semejante, las hipérbolas rectangulares $xy = c$ forman una familia de curvas, trazadas en la Fig. 3.2. El valor particular $c = 0$ corresponde a la hipérbola degenerada que consiste de los dos ejes coordenados. Otro ejemplo de una familia de curvas es el conjunto de todas las normales a una curva dada. Si la curva se da en términos del parámetro t por medio de las ecuaciones $\xi = \phi(t)$, $\eta = \psi(t)$, la ecuación de la familia de normales se obtiene en la forma (ver el Volumen I, p. 345)

$$(x - \phi(t))\phi'(t) + (y - \psi(t))\psi'(t) = 0,$$

donde se usa t en lugar de c para denotar al parámetro de la familia.

El concepto general de una familia de curvas puede expresarse analíticamente de la siguiente manera. Sea

$$f(x, y, c)$$

una función continuamente diferenciable de las dos variables independientes x y y y del parámetro c, donde el parámetro varía en un intervalo dado. (Así, el parámetro es en realidad una tercera variable independiente, la cual se simboliza de una manera diferente simplemente porque desempeña un papel diferente.) Entonces, si para cada valor del parámetro c la ecuación

(52a) $$f(x, y, c) = 0$$

representa una curva, el agregado de las curvas que se forman conforme c recorre su intervalo se llama *familia de curvas* que depende del parámetro c.

Cada curva de una familia de curvas de este tipo también puede representarse en la forma paramétrica

(52b) $$x = \phi(t, c), \qquad y = \psi(t, c),$$

donde c es el parámetro que distingue a las diferentes curvas de la familia y t el parámetro a lo largo de la curva.

Por ejemplo, las ecuaciones

$$x = c \cos t, \qquad y = c \operatorname{sen} t$$

representan a la familia de círculos concéntricos que se mencionó con anterioridad; una vez más, las ecuaciones

$$x = ct, \qquad y = \frac{1}{t},$$

representan a la familia de hipérbolas rectangulares que también se mencionó, excepto a la hipérbola degenerada que consiste de los ejes coordenados.

Ocasionalmente será necesario considerar familias de curvas que dependan de varios parámetros. Por ejemplo, el agregado de todos los círculos $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ en el plano es una familia de curvas que dependen de los tres parámetros a, b, c. Si no se especifica lo contrario, siempre se sobreentenderá que una familia de curvas es una familia "uniparamétrica", o sea, que depende de un solo parámetro. Los demás casos se distinguirán hablando de familias de curvas biparamétricas, triparamétricas o multiparamétricas.

Por supuesto, se cumplen proposiciones semejantes para las familias de superficies en el espacio. Si se da una función continua-

mente diferenciable $f(x, y, z, c)$ y si, para cada valor del parámetro c en un cierto intervalo definido, la ecuación

$$f(x, y, z, c) = 0$$

representa una superficie en el espacio con coordenadas rectangulares x, y, z, entonces el agregado de las superficies que se obtienen haciendo que c describa su intervalo se llama *familia de superficies* o, más precisamente, *familia uniparamétrica de superficies con el parámetro c*. Por ejemplo, las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ alrededor del origen forman una familia de ese tipo. Como con las curvas, también se pueden considerar familias de superficies que dependan de varios parámetros.

Así, los planos definidos por la ecuación

$$ax + by + \sqrt{1 - a^2 - b^2}\, z + 1 = 0$$

forman una familia biparamétrica que depende de los parámetros a y b, si los parámetros a y b varían sobre la región $a^2 + b^2 \leqq 1$. Esta familia de superficies consiste de la clase de todos los planos que se encuentran a una distancia unitaria del origen.*

Ejercicios 3.5a

1. Caracterizar geométricamente las siguientes familias de curvas:

   (a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = c^2$, $a, b =$ constantes conocidas, $c =$ un parámetro

   (b) $x^2 + (y - c)^2 = c^2$, $c =$ parámetro

   (c) $x = \cos(c + t)$, $y = \operatorname{sen}(c + t)$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$, $c =$ parámetro.

2. Describir la familia uniparamétrica de superficies

$$(x - c)^2 + (y - 1 - c)^2 + (z + \sqrt{2} - 2c)^2 = 1.$$

b. *Envolventes de familias uniparamétricas de curvas*

Si una familia de rectas consiste de las tangentes a una curva plana E (por ejemplo, si la familia de normales de una curva C es la familia de tangentes a la evoluta E de C; ver el Volumen I, p. 424), se dirá que *la curva E es la envolvente de la familia de rectas*. De la

[1]A veces una familia uniparamétrica de superficies se menciona como superficies ∞^1 una familia biparamétrica como ∞^2 y así sucesivamente.

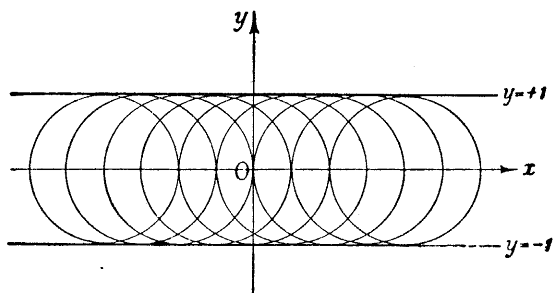


Figura 3.17 Familia de círculos con envolvente.

misma manera, se dirá que la familia de círculos con radio 1 y centro sobre el eje x —es decir, la familia de círculos con ecuación $(x - c)^2 + y^2 - 1 = 0$— tiene como su envolvente a la pareja de rectas $y = 1$ y $y = -1$, las cuales tocan a cada uno de los círculos (Fig. 3.17). En ambos ejemplos, se puede obtener el punto de contacto de la envolvente y una curva de la familia con valor c del parámetro, encontrando las intersecciones de las dos curvas de la familia con valores del parámetro c y $c + h$ y, a continuación, haciendo que h tienda a 0. Esto se expresa brevemente diciendo que la envolvente es el *lugar geométrico de las intersecciones de curvas vecinas.*

Para cualquier familia de curvas, *una curva E que en cada uno de sus puntos toca a alguna de las curvas de la familia se llama envolvente de la familia de curvas.* La cuestión que surge ahora es hallar la envolvente E de una familia de curvas $f(x, y, c) = 0$ dada. Hagamos primero unas cuantas observaciones plausibles en las cuales se supone que existe una envolvente E y que puede obtenerse, al igual que en los casos anteriores, como el lugar geométrico de las intersecciones de curvas vecinas.[1] Entonces se obtiene el punto de contacto de la curva $f(x, y, c) = 0$ con la curva E, de la siguiente manera: además de esta curva se considera una curva vecina $f(x, y, c + h) = 0$, se encuentra la intersección de estas dos curvas y, a continuación debe entonces tender hacia el punto de contanto buscado. En el punto de intersección se cumple la ecuación

$$\frac{f(x, y, c + h) - f(x, y, c)}{h} = 0 ,$$

[1]Como, por medio de ejemplos, se verá que esta última suposición es demasiado restrictiva, dentro de poco se remplazarán estas plausibilidades por una discusión más completa.

así como las ecuaciones $f(x, y, c + h) = 0$ y $f(x, y, c) = 0$. En la primera ecuación se pasa hacia el límite cuando $h \to 0$. Dado que se supone la existencia de la derivada parcial f_c, ésto da las dos ecuaciones

(53) $$f(x, y, c) = 0, \qquad f_c(x, y, c) = 0$$

para el punto de contacto de la curva $f(x, y, c) = 0$ con la envolvente. Si pueden determinarse x y y como funciones de c por medio de estas ecuaciones, se obtiene la representación paramétrica de una curva con el parámetro c, y esta curva es la envolvente. Eliminando el parámetro c la curva también puede representarse en la forma $g(x, y) = 0$. Esta ecuación se llama *discriminante* de la familia, y la curva dada por la ecuación $g(x, y) = 0$ se llama *curva discriminante.*

Así se llega a la regla siguiente: *para obtener la envolvente de una familia de curvas $f(x, y, c) = 0$, considérense las dos ecuaciones $f(x, y, c) = 0$ y $f_c(x, y, c) = 0$ simultáneamente e inténtese expresar x y y como funciones de c, por medio de ellas, o bien, eliminar la cantidad c entre ellas.*

Ahora se remplazarán estas consideraciones heurísticas por una discusión más general basada en la definición de la envolvente como la curva de contacto. Al mismo tiempo se aprenderá bajo qué condiciones la regla da realmente la envolvente y qué otras posibilidades se presentan.

Para empezar, supóngase que E es una envolvente que puede representarse en términos del parámetro c por medio de dos funciones continuamente diferenciables

$$x = x(c), \quad y = y(c),$$

donde

$$\left(\frac{dx}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dc}\right)^2 \neq 0,$$

y que E, en el punto con parámetro c, toca a la curva de la familia $f(x, y, c) = 0$ que corresponde al mismo valor de c. Entonces se satisface la ecuación $f(x, y, c) = 0$ en el punto de contacto. Consecuentemente, si se sustituyen las expresiones $x(c)$ y $y(c)$ en lugar de x y y en esta ecuación, la misma sigue siendo válida para todos los valores de c en el intervalo. Derivando con respecto a c inmediatamente se obtiene

$$f_x \frac{dx}{dc} + f_y \frac{dy}{dc} + f_c = 0.$$

Ahora bien, la condición de tangencia es

$$f_x \frac{dx}{dc} + f_y \frac{dy}{dc} = 0,$$

porque las cantidades dx/dc y dy/dc son proporcionales a los cosenos directores de la tangente a E, y las cantidades f_x y f_y son proporcionales a los cosenos directores de la normal a la curva $f(x, y, c) = 0$ de la familia, y además tangente y normal deben de formar ángulos rectos entre sí. Se concluye que la envolvente satisface la ecuación $f_c = 0$, y, por tanto, se ve que las ecuaciones (53) forman una condición *necesaria* para la envolvente.

Para averiguar en qué medida también es *suficiente* esta condición, supóngase que una curva E, representada por dos funciones continuamente diferenciables $x = x(c)$ y $y = y(c)$, satisface las dos ecuaciones $f(x, y, c) = 0$ y $f_c(x, y, c) = 0$. Nuevamente, en $f(x, y, c) = 0$ sustitúyanse x y y por $x(c)$ y $y(c)$; entonces esta ecuación se convierte en una indentidad en c. Derivando con respecto a c y recordando que $f_c = 0$, inmediatamente se obtiene la relación

$$f_x \frac{dx}{dc} + f_y \frac{dy}{dc} = 0,$$

la cual, por lo tanto, se cumple para todos los puntos de E. Si las dos expresiones $f_x^2 + f_y^2$ y $(dx/dc)^2 + (dy/dc)^2$ son diferentes de cero en un punto de E, de modo que en ese punto tanto la curva E como la curva de la familia tienen tangentes bien definidas, esa ecuación afirma que la envolvente y la curva de la familia se tocan. Con estas hipótesis adicionales la regla es una condición suficiente para la envolvente, así como necesaria. No obstante, si tanto f_x como f_y se anulan, la curva de la familia puede tener un punto singular (ver la p. 282) y no se pueden sacar conclusiones acerca del contacto de las curvas.

Así, después de haber encontrado la curva discriminante todavía se requiere investigar más en cada caso con el fin de descubrir si en realidad es una envolvente o hasta qué punto no lo es.

En conclusión, se ha llegado a la condición que debe satisfacer la curva discriminante de una familia de curvas dada en la forma paramétrica

$$x = \phi(t, c), \quad y = \psi(t, c),$$

con el parámetro t sobre la curva. Esta condición es

$$\phi_t \psi_c - \phi_c \psi_t = 0;$$

la cual se obtiene fácilmente, pasando de la representación paramétrica de la familia a la expresión original, por medio de la eliminación de t.

Ejercicios 3.5b

1. ¿Las normales a una curva plana suave tienen siempre una envolvente?
2. Las rectas

$$y = cx + \psi(c)$$

satisfacen la ecuación diferencial

$$y = xy' + \psi(y')$$

(ecuación de Clairaut). Obtener una ecuación no paramétrica para la envolvente de la familia y verificar que satisfaga también la ecuación diferencial.

c. *Ejemplos*

1. $(x - c)^2 + y^2 = 1$. Como se hizo notar en la p. 342, esta ecuación representa a la familia de círculos de radio unitario, cuyos centros se encuentran sobre el eje x (Fig. 3.17). Geométricamente, se ve de inmediato que la envolvente debe consistir de las dos rectas $y = 1$ y $y = -1$. Esto puede verificarse por medio de la regla dada; en efecto, las dos ecuaciones $(x - c)^2 + y^2 = 1$ y $-2(x - c) = 0$ inmediatamente dan la envolvente en la forma $y^2 = 1$.

2. La familia de círculos de radio unitario que pasan por el origen cuyos centros, por lo tanto, deben estar sobre el círculo de radio unitario alrededor del origen, está dada por la ecuación

$$(x - \cos c)^2 + (y - \operatorname{sen} c)^2 = 1$$

o bien,

$$x^2 + y^2 - 2x \cos c - 2y \operatorname{sen} c = 0.$$

La derivada con respecto a c, igualada a 0, da $x \operatorname{sen} c - y \cos c = 0$. Estas dos ecuaciones son satisfechas por los valores $x = 0$ y $y = 0$. No obstante. si $x^2 + y^2 \neq 0$. fácilmente se deduce de estas ecuaciones que

sen $c = y/2$, cos $c = x/2$, de modo que, eliminando a c, se obtiene $x^2 + y^2 = 4$. De donde, por la regla para hallar la envolvente, se obtiene que ésta es el círculo de radio 2 alrededor del origen, como se anticipa por intuición geométrica; pero también se obtiene el punto aislado $x = 0$, $y = 0$.

3. La familia de parábolas $(x - c)^2 - 2y = 0$ (ver la Fig. 3.18) también tiene una envolvente, la cual, tanto por intuición como por medio de la regla, resulta ser el eje x.

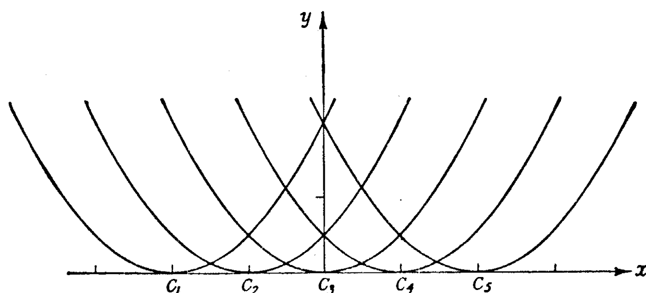


Figura 3.18 Familia de parábolas con envolvente.

4. Considérese la familia de círculos $(x - 2c)^2 + y^2 - c^2 = 0$ (ver la Fig. 3.19). La derivación con respecto a c da $2x - 3c = 0$, y por substitución se encuentra que la ecuación de la envolvente es

$$y^2 = \frac{x^2}{3};$$

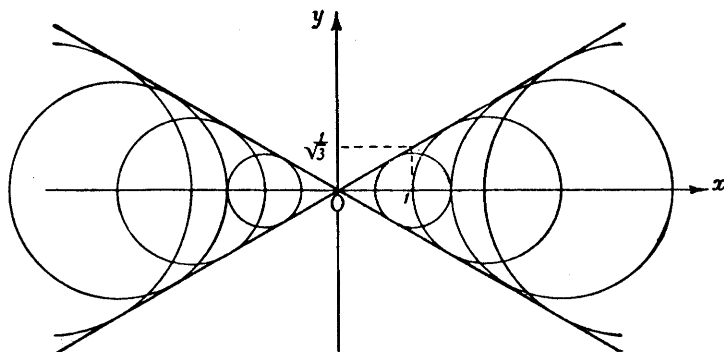


Figura 3.19 La familia $(x - 2c)^2 + y^2 - c^2 = 0$.

es decir, la envolvente consiste de las dos rectas

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}\,x \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,x.$$

El origen es una excepción, en el sentido de que allí no hay contacto.

5. Considérese ahora la familia de rectas sobre las cuales los ejes x y y determinan un segmento de longitud unitaria. Si $\alpha = c$ es el ángulo indicado en la Fig. 3.20, las rectas están dadas por la ecuación

$$\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\operatorname{sen}\alpha} = 1.$$

La condición que debe satisfacer la envolvente es

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}\,x - \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\,y = 0,$$

la cual, junto con la ecuación de las rectas, da la envolvente en forma paramétrica

$$x = \cos^3\alpha, \quad y = \operatorname{sen}^3\alpha.$$

Eliminando el parámetro, se obtiene la ecuación

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

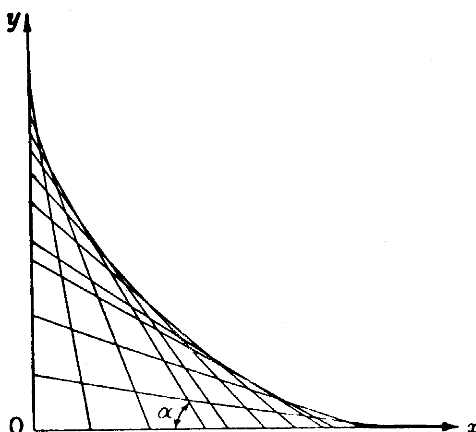


Figura 3.20 Arco de la astroide como envolvente de rectas.

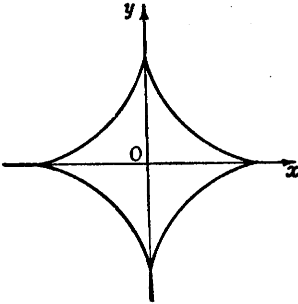


Figura 3.21 Astroide

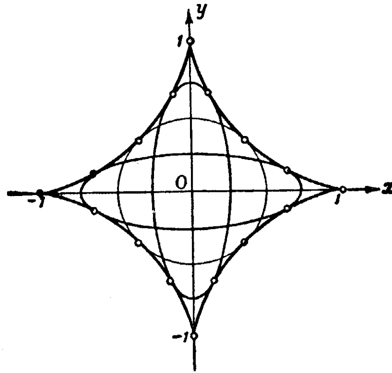


Figura 3.22 Astroide como envolvente de elipses.

Esta curva se llama *astroide* (ver el Volumen I, Capítulo 4, Ejercicio I, p. 435). Consiste (Figs. 3.21 y 3.22) de cuatro ramas simétricas que se encuentran en cuatro cúspides.

6. La astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ también aparece como la envolvente de la familia de elipses

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{(1-c)^2} = 1$$

cuyos semiejes c y $(1 - c)$ tienen la suma constante 1 (Fig. 3.22).

7. La familia de curvas $(x - c)^2 - y^3 = 0$ muestra que, bajo ciertas circunstancias, el proceso puede no dar una envolvente. Aquí la regla da el eje x. Pero, como se ve en la Fig. 3.23, éste no es una envolvente; es el lugar geométrico de las cúspides de las curvas de la familia.

8. Para la familia

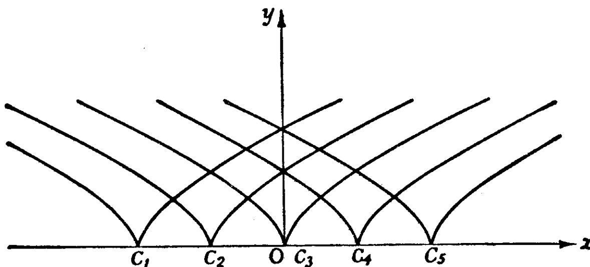


Figura 3.23 La familia $(x - c)^2 - y^3 = 0$.

$$(x - c)^3 - y^2 = 0,$$

la curva discriminante es el eje x (ver la Fig. 3.24). Nuevamente éste es el lugar geométrico de las cúspides; pero toca a cada una de las curvas y, en este sentido, debe considerarse como la envolvente.

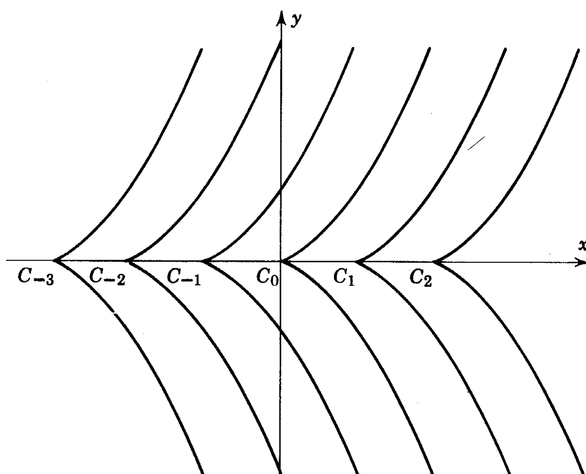


Figura 3.24 La familia $(x - c)^3 - y^2 = 0$.

9. La familia de *estrofoides*

$$[x^2 + (y - c)^2](x - 2) + x = 0$$

(ver la Fig. 3.25) tiene una curva discriminante que consiste de la envolvente más el lugar geométrico de los puntos dobles. Las curvas de la familia son congruentes entre sí y surgen una de la otra, por medio de una traslación paralela al eje y. Derivando se obtiene

$$f_c = -2(y - c)(x - 2) = 0,$$

de modo que debe tenerse $x = 2$, o bien, $y = c$. Sin embargo, la recta $x = 2$ no interviene en el asunto, porque ningún valor finito de y corresponde a $x = 2$. Por lo tanto, se tiene $y = c$. De modo que la curva discriminante es

$$x^2(x - 2) + x = 0.$$

Esta curva consiste de las rectas $x = 0$ y $x = 1$. Como se ve en la Fig. 3.25, sólo $x = 0$ es la envolvente; la recta $x = 1$ pasa por los puntos dobles de las curvas.

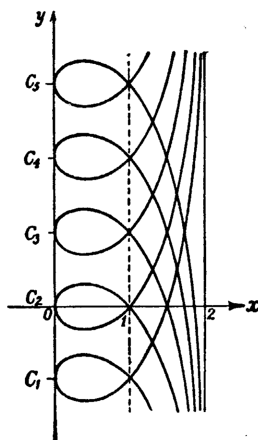


Figura 3.25 Familia de estrofoides.

10. La envolvente no necesita ser el lugar geométrico de los puntos de intersección de curvas vecinas; ésto queda ilustrado por medio de la familia de parábolas cúbicas idénticas paralelas $y - (x - c)^3 = 0$. Ningún par de estas curvas se intersectan. La regla da la ecuación $f_c = 3(x - c)^2 = 0$, de modo que el eje x, $y = 0$, es la curva discriminante. Como todas las curvas de la familia son tocadas por ella, también es la envolvente (Fig. 3.26).

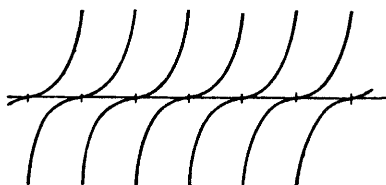


Figura 3.26 Familia de parábolas cúbicas.

11. La noción de envolvente nos permite dar una nueva definición para la *evoluta* de una curva C (ver el Volumen I, pp. 359, 424 y siguientes). Sea C dada por

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t).$$

La evoluta E de C se define como la envolvente de las normales de C. Dado que las normales de C están dadas por

$$\{x - \phi(t)\}\phi'(t) + \{y - \psi(t)\}\psi'(t) = 0,$$

la envolvente se encuentra derivando esta ecuación con respecto a t:

$$0 = \{x - \phi(t)\}\phi''(t) + \{y - \psi(t)\}\psi''(t) - \phi'^2(t) - \psi'^2(t).$$

A partir de esta ecuación y la anterior se obtiene la representación paramétrica de la envolvente,

$$x = \phi(t) - \psi'(t)\frac{\phi'^2 + \psi'^2}{\psi''\phi' - \phi''\psi'} = \phi - \frac{\psi'\rho}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}},$$

$$y = \psi(t) + \phi'(t)\frac{\phi'^2 + \psi'^2}{\psi''\phi' - \phi''\psi'} = \psi + \frac{\phi'\rho}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}},$$

donde

$$\rho = \frac{(\phi'^2 + \psi'^2)^{3/2}}{\psi''\phi' - \phi''\psi'}$$

denota el radio de curvatura (ver el Volumen I, p. 356). Estas ecuaciones son idénticas a las dadas en el Volumen I (p. 359) para la evoluta.

12. Sea una curva C dada por $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$. Fórmese la envolvente E de los círculos que tienen sus centros sobre C y que pasan por el origen O. Como los círculos están dados por

$$x^2 + y^2 - 2x\phi(t) - 2y\psi(t) = 0,$$

la ecuación de E es

$$x\phi'(t) + y\psi'(t) = 0.$$

De aquí que si P es el punto $(\phi(t), \psi(t))$ y $Q(x, y)$ es el punto correspondiente de E, entonces OQ es perpendicular a la tangente a C en P. Supuesto que, por definición, $PQ = PO$, PO y PQ forman ángulos iguales con la tangente a C en P.

Si se imagina a O como un punto luminoso y a C como una curva reflectora, entonces QP es el rayo reflejado correspondiente a OP. La envolvente de los rayos reflejados recibe el nombre de *caústica* de C con respecto a O. *La cáustica es la evoluta de E*: el rayo reflejado PQ es normal a E, dado que un círculo con centro en P toca a E en Q y la envolvente de las normales de E, es su evoluta, como se vio en el ejemplo anterior.

Por ejemplo, sea C un círculo que pasa por O. Entonces E es la trayectoria descrita por el punto O' de un círculo C' congruente a C que rueda sobre éste y que inicia su movimiento con C y O' coin-

cidentes; porque, durante el movimiento, O y O' siempre ocupan posiciones simétricas con respecto a la tangente común de los dos círculos. Por tanto, E será una epicicloide especial;de hecho, una cardioide (ver el Volumen I, p. 329) y siguientes. Como la evoluta de una epicicloide es una epicicloide semejante (ver el Volumen I, p. 439), la cáustica de C con respecto a O es en este caso una cardioide.

Ejercicios 3.5c

1. Un proyectil disparado desde el origen con un ángulo de inclinación inicial α y velocidad inicial v, recorre una trayectoria parabólica dada por las ecuaciones

$$x = (v \cos \alpha)\, t$$
$$y = (v \operatorname{sen} \alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2,$$

donde g es la aceleración constante de la gravedad.
(a) Encontrar la envolvente de la familia de trayectorias con parámetros α
(b) Demostrar que ningún punto por encima de la envolvente puede ser alcanzado por el proyectil.
(c) Demostrar que todo punto por debajo de la envolvente puede ser alcanzado de dos maneras, es decir, que un punto de este tipo se encuentra sobre dos trayectorias.

2. Obtener las envolventes de las familias de curvas que siguen:
(a) $y = cx + 1/c$.
(b) $y^2 = c(x - c)$
(c) $cx^2 + y^2/c = 1$
(d) $(x - c)^2 + y^2 = a^2c^2/(1 + a^2)$, $a =$ constante.

3. Sea C una curva arbitraria en el plano y considérense los círculos de radio p cuyos centros se encuentran sobre C. Probar que la envolvente de estos círculos está formada por las dos curvas paralelas a C a la distancia p (ver la definición de curvas paralelas, Volumen I, p. 291.

4. Una familia de rectas en el espacio puede darse como la intersección de dos planos que dependan de un parámetro t:

$$a(t)x + b(t)y + c(t)z = 1$$
$$d(t)x + e(t)y + f(t)z = 1.$$

Probar que si estas rectas son tangentes a alguna curva (es decir, poseen una envolvente), entonces

$$\begin{vmatrix} a-d & b-e & c-f \\ a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{vmatrix} = 0.$$

5. Si una curva plana C está dada por $x = f(t)$, $y = g(t)$, su recíproca polar C' se define como la envolvente de la familia de rectas

$$\xi f(t) + \eta g(t) = 1,$$

donde (ξ, η) son coordenadas corrientes.

(a) Probar que C también es la recíproca polar de C'.

(b) Encontrar la recíproca polar del círculo $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$.

(c) Encontrar la recíproca polar de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

6. Un círculo de radio a rueda sobre una recta fija, llevando una tangente fija con relación al círculo. Tomando ejes en el punto de contacto donde la tangente en movimiento coincide con la recta fija, demostrar que la envolvente de la tangente está dada por

$$x = a(\theta + \cos\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta)$$

$$y = a(\cos^2\theta - \cos\theta).$$

7. Encontrar la envolvente de un círculo variable en un plano, que pasa por un punto fijo O, y cuyo centro describe una cónica dada con centro en O.

8. (a) Si Γ es una curva plana y O un punto en su plano, el lugar geométrico Γ' de las proyecciones ortogonales de O sobre una tangente variable de Γ se llama curva pedal de Γ con respecto al punto O. Probar que si el punto M describe la curva Γ, la curva pedal Γ' es la envolvente del círculo variable con el radiovector OM como diámetro.

(b) ¿Cómo es la envolvente si Γ es un círculo y O un punto sobre su circunferencia?

9. MM' es una cuerda variable de una elipse, paralela al eje menor. Encontrar la envolvente del círculo variable que tiene a MM' como diámetro.

d. *Envolventes de familias de superficies*

Las observaciones hechas acerca de las envolventes de familias de curvas también se aplican a las familias de superficies, con sólo unas cuantas modificaciones. Dada una familia uniparamétrica de superficies $f(x, y, z, c) = 0$, definida para un intervalo de valores de parámetro c, se dirá que una superficie E es la envolvente de la familia si toca a cada superficie de la familia a lo largo de toda una curva y si, además, estas curvas de contacto forman una familia uniparamétrica de curvas sobre E que cubren por completo a esta superficie.

Un ejemplo es el de la familia de todas las esferas de radio unitario con centro sobre el eje z. Intuitivamente se ve que la envolvente es el cilindro $x^2 + y^2 - 1 = 0$ con radio unitario y eje a lo largo del eje z; la familia de curvas de contacto es simplemente la familia de

círculos paralelos al plano x, y, con radio unitario y centro sobre el eje.[1]

Como en la p. 341 si se supone que la envolvente existe, puede hallársele a través del método heurístico que sigue: primero se consideran las superficies $f(x, y, z, c) = 0$ y $f(x, y, z, c + h) = 0$ correspondientes a dos valores diferentes del parámetro, c y $c + h$. Estas dos ecuaciones determinan la curva de intersección de las dos superficies (se ha supuesto expresamente que esa curva de intersección existe). Como consecuencia de las dos ecuaciones anteriores, esta curva también satisface la tercera ecuación

$$\frac{f(x, y, z, c + h) - f(x, y, z, c)}{h} = 0.$$

Si se hace que h tienda a cero, la curva de intersección se aproximará a una posición límite definida y esta curva límite queda determinada por las dos ecuaciones

$$f(x, y, z, c) = 0, \quad f_c(x, y, z, c) = 0. \tag{54}$$

A menudo se dice, en una forma intuitiva no rigurosa, que esta curva es la intersección de superficies vecinas de la familia. Esta es una función del parámetro c, de modo que las curvas de intersección para todos los diferentes valores de c forman una familia uniparamétrica de curvas en el espacio. Si se elimina la cantidad c entre las dos ecuaciones anteriores, se obtiene una ecuación que se conoce como *discriminante*. Como en la p. 343, puede demostrarse que la envolvente debe satisfacer esta ecuación discriminante.

Precisamente como en el caso de las curvas planas, fácilmente nos podemos convencer de que un plano que toca a la superficie discriminante también toca a la superficie correspondiente de la familia, siempre que $f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 \neq 0$. De aquí que la superficie discriminante da las envolventes de la familia y los lugares geométricos de las singularidades de las superficies de la familia.

Como un primer ejemplo, considérese la familia de esferas

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 - 1 = 0$$

mencionadas en el párrafo anterior. Para encontrar la envolvente se tiene la ecuación adicional

[1]Las envolventes de esferas de radio constante cuyos centros se encuentran sobre una curva dada se llaman *superficies tubulares*.

$$-2(z - c) = 0.$$

Obviamente, para valores fijos de c, estas dos ecuaciones representan el círculo de radio unitario paralelo al plano x, y que se encuentra a la altura $z = c$. Si se elimina el parámetro c entre las dos ecuaciones, se obtiene la ecuación de la envolvente en la forma $x^2 + y^2 - 1 = 0$, que es la ecuación del cilindro circular recto con radio unitario y cuyo eje es el eje z.

Para las familias de superficies también es posible encontrar las envolventes de familias biparamétricas $f(x, y, z, c_1, c_2) = 0$. (Sin embargo, con respecto a las familias de curvas, el concepto de envolvente sólo tiene significado para familias uniparamétricas). Por ejemplo, considérese la familia de todas las esferas con radio unitario y centro sobre el plano x, y, representada por la ecuación

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + z^2 - 1 = 0.$$

La intuición nos dice inmediatamente que los dos planos $z = 1$ y $z = -1$ tocan a todas las superficies de la familia. En general, se dirá que una superficie E es la envolvente de una familia biparamétrica de superficies si, en todo punto P de E, la superficie E toca a una superficie de la familia, de tal manera que conforme P varía sobre E los valores paramétricos c_1, c_2 correspondientes a la superficie tocada por E en P varían sobre una región del plano c_1,c_2 y, además, puntos diferentes (c_1, c_2) corresponden a diferentes puntos P de E. Entonces, una superficie de la familia toca a la envolvente *en un punto*, y no, como antes, a lo largo de una curva completa.

Con hipótesis semejantes a las establecidas en el caso de curvas planas se encuentra que el punto de contacto de una superficie de la familia con la envolvente, si existe, debe satisfacer las ecuaciones

$$f(x, y, z, c_1, c_2) = 0, \quad f_{c_1}(x, y, z, c_1, c_2) = 0, \quad f_{c_2}(x, y, z, c_1, c_2) = 0.$$

A partir de estas tres ecuaciones se determina el punto de contacto de una superficie dada, asignando los valores correspondientes a los parámetros. Inversamente, si se eliminan los parámetros c_1 y c_2, se obtiene una ecuación que debe ser satisfecha por la envolvente.

Por ejemplo, la familia de esferas con radio unitario y centro sobre el plano x, y está dada por la ecuación

$$f(x, y, z, c_1, c_2) = (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + z^2 - 1 = 0,$$

con los dos parámetros c_1 y c_2. La regla para formar a la envolvente de las dos ecuaciones

$$f_{c_1} = -2(x - c_1) = 0 \qquad \text{y} \qquad f_{c_2} = -2(y - c_2) = 0.$$

Por tanto, para la ecuación discriminante se tiene $z^2 - 1 = 0$, y, en efecto, los dos planos $z = 1$ y $z = -1$ son envolventes, como ya se había visto intuitivamente.

Ejercicios 3.5d

1. ¿Cuál es la envolvente de la familia de elipsoides de volumen constante (es decir, producto fijo de los semiejes) con centro común en O y ejes paralelos a los ejes coordenados?
2. ¿Cuál es la envolvente de la familia de planos $ax + by + cz = 1$, donde $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$?
3. (a) Encontrar la envolvente de la familia biparamétrica de planos para los cuales.

   $$OP + OQ + OR = \text{constante} = 1,$$

   donde P, Q, R denotan a los puntos de intersección de los planos con los ejes coordenados, y O es el origen.

   (b) Hallar la envolvente de los planos para los cuales

   $$OP^2 + OQ^2 + OR^2 = 1.$$
4. Una familia de planos está dada por

   $$x \cos t + y \operatorname{sen} t + z = t,$$

   donde t es un parámetro.

   (a) Encontrar la ecuación de la envolvente para los planos, en coordenadas cilíndricas (r, z, θ).

   (b) Probar que la envolvente consiste de las tangentes a una cierta curva.
5. Sea $z = u(x, y)$ la ecuación de una superficie tubular, es decir, la envolvente de una familia de esferas de radio unitario con sus centros sobre alguna curva $y = f(x)$ en el plano x, y. Probar que $u^2 (u_x^2 + u_y^2 + 1) = 1$.
6. Encontrar la envolvente de la familia de esferas que tocan las tres esferas

   $$S_1\colon \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{4},$$

   $$S_2\colon x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{9}{4},$$

   $$S_3\colon x^2 + y^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

7. Sea Γ una curva plana y Γ' su curva pedal, como se describió en el Ejercicio 8, p. 353.
   (a) Sea M un punto que describe la curva Γ. ¿Cuál es la envolvente de la esfera variable con el radio vector OM como diámetro?
   (b) ¿Cuál es la envolvente de la esfera variable si Γ es un círculo y O un punto sobre su circunferencia?
8. Demostrar que la superficie xyz =constante es la envolvente de la familia de planos que forman, con los planos coordenados, un tetraedro de volumen constante (es decir, producto fijo de las coordenadas de las intersecciones con los ejes).
9. Un plano se mueve de modo que toca a las parábolas $z = 0$, $y^2 = 4x$ y $y = 0$, $z^2 = 4x$. Demostrar que su envolvente consiste de dos cilindros parabólicos.

3.6 Formas diferenciales alternantes

a. Definición de formas diferenciales alternantes

En el Capítulo 1 (p. 113) se consideró la forma diferencial lineal general

$$L = A(x, y, z)\, dx + B(x, y, z)\, dy + C(x, y, z)\, dz \tag{55a}$$

en tres variables independientes. A lo largo de cualquier curva Γ con representación paramétrica $x = \phi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$, la forma L determina los valores

$$\frac{L}{dt} = A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} = A\dot{\phi} + B\dot{\psi} + C\dot{\chi}, \tag{55b}$$

que dependen de la representación paramétrica especial de Γ. Si Γ se refiere a un parámetro diferente t, se obtiene

$$\frac{L}{d\tau} = A\frac{dx}{d\tau} + B\frac{dy}{d\tau} + C\frac{dz}{d\tau} = \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt}\right)\frac{dt}{d\tau} \tag{55c}$$
$$= \frac{L}{dt}\,\frac{dt}{d\tau}.$$

Sin embargo, la integral

$$\int_\Gamma L = \int \frac{L}{dt}\, dt = \int \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt}\right) dt$$

sólo depende de la curva Γ (y de su orientación) y no de la representación paramétrica particular.

De modo semejante, considérese una forma diferencial ω que sea cuadrática en dx, dy, y dz, a saber, una combinación lineal ω de los símbolos $dx\,dx$, $dx\,dy$, $dx\,dz$, $dy\,dx$, $dy\,dy$, $dy\,dz$, $dz\,dx$, $dz\,dy$, $dz\,dz$, con coeficientes que sean funciones de x, y, z. Sobre cualquier superficie S en el espacio, con representación paramétrica $x = \phi(s, t)$, $y = \psi(s, t)$, $z = \chi(s, t)$, la forma ω define los valores $\omega/ds\,dt$ si se conviene en que los cocientes

$$\frac{dx\,dx}{ds\;dt}, \quad \frac{dx\,dy}{ds\;dt}, \quad \frac{dx\,dz}{ds\;dt}, \ldots$$

denotan respectivamente los jacobianos

$$\frac{d(x, x)}{d(s, t)}, \quad \frac{d(x, y)}{d(s, t)}, \quad \frac{d(x, z)}{d(s, t)}, \ldots .$$ [1]

No se establece distinción entre dos formas diferenciales ω que proporcionan los mismos valores $\omega/ds\,dt$ en cada punto de la superficie. En vista del carácter alternante de los determinantes, o sea, de que

$$\frac{d(x, x)}{d(s, t)} = 0, \qquad \frac{d(x, y)}{d(s, t)} = -\frac{d(y, x)}{d(s, t)}, \ldots,$$

se ve que los términos de ω con $dx\,dx$, $dy\,dy$, $dz\,dz$ no contribuyen y que $dy\,dx$, $dz\,dy$, $dx\,dz$ pueden remplazarse respectivamente por $-dx\,dy$, $-dy\,dz$, $-dz\,dx$. Por tanto, la forma diferencial cuadrática más general en dx, dy, dz puede escribirse como

$$\text{(56a)} \qquad \omega = a(x, y, z)\,dy\,dz + b(x, y, z)\,dz\,dx + c(x, y, z)\,dx\,dy.$$

Los valores que asocia ω con los puntos de una superficie S referida a los parámetros s, t, son

$$\text{(56b)} \qquad \frac{\omega}{ds\;dt} = a(x, y, z)\frac{d(y, z)}{d(s, t)} + b(x, y, z)\frac{d(z, x)}{d(s, t)} + c(x, y, z)\frac{d(x, y)}{d(s, t)}.$$

*Esta convención caracteriza a las formas diferenciales *alternantes*. En otros contextos también se encuentran formas diferenciales cuadráticas no alternantes, tales como la que da el cuadrado del elemento lineal en el espacio o sobre una superficie (ver la p. 332):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Dando a S los parámetros diferentes s', t', a partir de la ley de multiplicación para los jacobianos (ver la p. 305), se obtiene

$$\text{(56c)} \qquad \frac{\omega}{ds'\,dt'} = a\frac{d(y, z)}{d(s', t')} + b\frac{d(z, x)}{d(s', t')} + c\frac{d(x, y)}{d(s', t')} = \frac{\omega}{ds\,dt}\,\frac{d(s, t)}{d(s', t')}.$$

Posteriormente (p. 658), también se definirá la integral doble y se

$$\iint_S \omega$$

verá que no depende de la representación paramétrica particular de la superficie S.

De manera semejante, puede considerarse una forma diferencial ω que sea cúbica en dx, dy, dz. Tal forma asigna valores $\omega/dr\,ds\,dt$ correspondientes a cualquier representación paramétrica

$$x = \phi(r, s, t), \quad y = \psi(r, s, t), \quad z = \chi(r, s, t),$$

donde, nuevamente, los cocientes

$$\frac{dx\,dx\,dx}{dr\;ds\,dt}, \frac{dx\,dy\,dz}{dr\;ds\,dt}, \ldots$$

se interpretan como los jacobianos

$$\frac{d(x, x, x)}{d(r, s, t)}, \frac{d(x, y, z)}{d(r, s, t)}, \ldots.$$

Como los jacobianos se anulan cuando dos de las variables dependientes son idénticas, y cambian de signo cuando se intercambian dos de las variables dependientes, todas las formas diferenciales cúbicas en las tres variables independientes x, y, z son del tipo

$$\text{(56d)} \qquad \omega = \alpha(x, y, z)dx\,dy\,dz.$$

Siempre que x, y, z se representen como funciones de r, s, t, a partir de ω se obtiene el valor

$$\text{(56e)} \qquad \frac{\omega}{dr\,ds\,dt} = \alpha(x, y, z)\frac{d(x, y, z)}{d(r, s, t)}.$$

Procediendo de la misma manera podrían definirse formas diferenciales "alternantes" en dx, dy, dz de grados 4, 5, ... Pero todas éstas son idénticamente 0, ya que cualquier jacobiano de orden 4, 5, ... que pudiera formarse tendría idénticas a dos de las variables dependientes y, por tanto, se anularía.[1]

Ejercicios 3.6a

1. Encontrar $\omega/du\,dv$ en cada uno de los casos siguientes:

   (a) $\omega = x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy,$

   $x = \cos u \sin v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos v$

   (b) $\omega = (y - z)dy\,dz + (z - x)dz\,dx + (x - y)dx\,dy,$

   $x = au + bv, \quad y = bu + cv, \quad z = cu + av$

   (c) $\omega = dy\,dz + dz\,dx + dx\,dy,$

   $x = u^2 + v^2, \quad y = 2uv, \quad z = u^2 - v^2.$

b. Sumas y productos de formas diferenciales

Dos formas diferenciales del mismo orden (es decir, ambas lineales, ambas cuadráticas o ambas cúbicas) pueden sumarse trivialmente sumando los coeficientes correspondientes. De donde, para

$$\omega_1 = a_1\,dy\,dz + b_1\,dz\,dx + c_1\,dx\,dy,$$

$$\omega_2 = a_2\,dy\,dz + b_2\,dz\,dx + c_2\,dx\,dy,$$

Se define

$$\text{(57a)} \quad \omega_1 + \omega_2 = (a_1 + a_2)dy\,dz + (b_1 + b_2)dz\,dx + (c_1 + c_2)dx\,dy.$$

---

[1] Sin embargo, las formas de orden superior tienen un significado no trivial en los espacios de dimensiones superiores. En el espacio x, y, z, u tetradimensional, las formas diferenciales alternantes más generales de orden 1, 2, 3, 4 se pueden escribir como

(56f) $A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du$

(56g) $A\,dx\,dy + B\,dy\,dz + C\,dz\,du + D\,du\,dx + E\,dx\,dz + F\,dy\,du$

(56h) $A\,dy\,dz\,du + B\,dz\,du\,dx + C\,du\,dx\,dy + D\,dx\,dy\,dz$

(56i) $A\,dx\,dy\,dz\,du,$

respectivamente, con los coeficientes $A, B, \ldots$, los cuales son funciones de x, y, z, u. Las formas de orden superior a 4 se anulan.

Puede definirse el producto $\omega_1\omega_2$ de dos formas diferenciales cualesquiera ω_1 y ω_2 del mismo orden o de órdenes diferentes, simplemente sustituyendo ω_1 y ω_2 por sus expresiones en términos de dx, dy, dz y aplicando la ley distributiva de la multiplicación, teniendo cuidado, sin embargo, de conservar el orden original de las diferenciales en cada término.[1] Así, el producto de las dos formas lineales

$$\omega_1 = A_1\,dx + B_1\,dy + C_1\,dz \qquad \text{y} \qquad \omega_2 = A_2\,dx + B_2\,dy + C_2\,dz$$

sería la forma cuadrática

$$\begin{aligned}(57b)\quad \omega_1\omega_2 &= (A_1\,dx + B_1\,dy + C_1\,dz)(A_2\,dx + B_2\,dy + C_2\,dz)\\ &= A_1A_2\,dx\,dx + A_1B_2\,dx\,dy + A_1C_2\,dx\,dz + B_1A_2\,dy\,dx\\ &\qquad + B_1B_2\,dy\,dy + B_1C_2\,dy\,dz + C_1A_2\,dz\,dx\\ &\qquad + C_1B_2\,dz\,dy + C_1C_2\,dz\,dz\\ &= (B_1C_2 - C_1B_2)dy\,dz + (C_1A_2 - A_1C_2)dz\,dx\\ &\qquad + (A_1B_2 - B_1A_2)dx\,dy.\end{aligned}$$

Si se describen las formas individuales ω_1 y ω_2 por los "vectores de los coeficientes" $\mathbf{R}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ y $\mathbf{R}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, entonces los coeficientes del producto $\omega_1\omega_2$ son precisamente las componentes del *producto vectorial* $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2$ (ver la p. 221). Evidentemente, el producto de las formas no es conmutativo. Aquí, por ejemplo, $\omega_1\omega_2 = -\omega_2\omega_1$.

Multiplicando la forma de primer orden

$$\omega_1 = A\,dx + B\,dy + C\,dz$$

por la forma de segundo orden

$$\omega_2 = a\,dy\,dz + b\,dz\,dx + c\,dx\,dy,$$

de modo semejante se obtiene

$$\begin{aligned}(57c)\quad \omega_1\omega_2 &= (A\,dx + B\,dy + C\,dz)(a\,dy\,dz + b\,dz\,dx + c\,dx\,dy)\\ &= Aa\,dx\,dy\,dz + Ab\,dx\,dz\,dx + Ac\,dx\,dx\,dy\\ &\quad + Ba\,dy\,dy\,dz + Bb\,dy\,dz\,dx + Bc\,dy\,dx\,dy\\ &\quad + Ca\,dz\,dy\,dz + Cb\,dz\,dz\,dx + Cc\,dz\,dx\,dy\\ &= (Aa + Bb + Cc)dx\,dy\,dz.\end{aligned}$$

[1] El producto formado de esta manera a veces se denota por el símbolo $\omega_1 \wedge \omega_2$.

Se observa que, en este caso, el coeficiente de $\omega_1\omega_2$ es el producto escalar de los vectores de los coeficientes (A, B, C) y (a, b, c). De aquí que, incidentalmente, $\omega_1 \omega_2 = \omega_2 \omega_1$.

Cuando se forma el producto de una forma de primer orden y una de tercero, de dos formas de segundo orden, o bien de una forma de segundo orden y una de tercero, se llega a formas de orden mayor que 3, que se anulan.

Para completar, resulta conveniente definir las formas diferenciales de orden 0 como los escalares $\alpha(x, y, z)$. Entonces, el producto de una forma α de orden 0 con una forma ω de cualquier orden $k = 0, 1, 2, 3$ se obtiene multiplicando cada uno de los coeficientes de ω por el escalar α.

A partir de la definición se ve fácilmente que los productos de las formas diferenciales son asociativos. Para tres formas lineales

$$L_i = A_i\, dx + B_i\, dy + C_i\, dz, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

por ejemplo, como se probará en el Ejercicio 5,

$$\text{(57d)} \qquad L_1(L_2L_3) = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} dx\, dy\, dz,$$

y para $(L_1 L_2) L_3$ se obtiene la misma evaluación.

Por supuesto, se puede formar una mayor variedad de productos de formas diferenciales cuando el número de variables independientes es mayor que 3.

Ejercicios 3.6b

1. Evaluar los productos siguientes:
   (a) $(x\, dx + y\, dy)(x\, dx - y\, dy)$
   (b) $[(x^2 + y^2)dx + 2xy\, dy]\, [2xy\, dx + (x^2 - y^2)dy]$
   (c) $(a\, dx + b\, dy)(a\, dy\, dz + b\, dz\, dx + c\, dx\, dy)$
   (d) $(dx + dy + dz)(dy\, dz - dx\, dy)$.
2. Para cualquier forma ω de orden 1 en x, y, z, demostrar que $\omega^2 = 0$.
3. Para las formas de primer orden ω_1, ω_2 en tres variables, demostrar que
$$(\omega_1 + \omega_2)(\omega_1 - \omega_2) = 2\omega_2\omega_1.$$
4. Demostrar, para las formas de primer orden en tres variables, que
$$(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) = 2(\omega_2 + \omega_4)(\omega_1 + \omega_3).$$
5. Deducir (57d).

c. Derivadas exteriores de formas diferenciales

Para una forma diferencial de orden 0, es decir, para un escalar $\alpha(x, y, z)$ por definición se tiene

$$d\alpha = \alpha_x\,dx + \alpha_y\,dy + \alpha_z\,dz. \tag{58a}$$

Los coeficientes de esta forma diferencial son precisamente las componentes del vector que se denotó por grad α en la p. 249. De modo más general, se define la *derivada exterior* $d\omega$ de cualquier forma diferencial ω. Con este fin se escribe ω como una suma de términos, donde cada término es un producto de determinadas diferenciales de la terna dx, dy, dz *precedido* por un factor escalar, y se remplaza cada uno de los factores escalares por su diferencial formada en el sentido ordinario. Así, para una forma de primer orden

$$L = A\,dx + B\,dy + C\,dz,$$

se encuentra para dL la forma diferencial de segundo orden

(58b)

$$\begin{aligned} dL &= dA\,dx + dB\,dy + dC\,dz \\ &= (A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz)dx \\ &\quad + (B_x\,dx + B_y\,dy + B_z\,dz)dy + (C_x\,dx + C_y\,dy + C_z\,dz)dz \\ &= (C_y - B_z)dy\,dz + (A_z - C_x)dz\,dx + (B_x - A_y)dx\,dy. \end{aligned}$$

Si se asocia a L el vector $\mathbf{R} = (A, B, C)$, se tiene el hecho notable de que *los coeficientes de* dL *son precisamente las componentes del rotacional de* $\mathbf{R}$ (ver la p. 252).

Para una forma de segundo orden

$$\omega = a\,dy\,dz + b\,dz\,dx + c\,dx\,dy$$

la derivada exterior $d\omega$ es la forma de tercer orden

$$\begin{aligned} d\omega &= da\,dy\,dz + db\,dz\,dx + dc\,dx\,dy \\ &= (a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz)dy\,dz \\ &\quad + (b_x\,dx + b_y\,dy + b_z\,dz)dz\,dx \\ &\quad + (c_x\,dx + c_y\,dy + c_z\,dz)dx\,dy \\ &= (a_x + b_y + c_z)dx\,dy\,dz. \end{aligned} \tag{58c}$$

De aquí que, si se combinan los coeficientes de ω en el vector $\mathbf{R} = (a, b, c)$, entonces el coeficiente de $d\omega$ es el escalar div $\mathbf{R}$ (ver la p. 253).

La derivada de una forma diferencial de tercer orden es de cuarto orden y, por tanto, se anula.

Una importante regla general ("lema de Poincaré") es que *la segunda derivada exterior de cualquier forma diferencial* ω *se anula:*

$$dd\omega = 0. \tag{58d}$$

En el espacio tres ésto sólo se tiene que probar para los casos en donde ω es de orden 0, o bien, 1. Ahora bien, si ω es un escalar $\alpha(x, y, z)$, por (58a, b) se tiene

$$d^2\omega = d(\alpha_x\, dx + \alpha_y\, dy + \alpha_z\, dz) = 0.$$

En realidad, ésto sólo es una manera diferente de expresar la regla enunciada en la p. 253 de que rot(grad α) = $\mathbf{0}$ para cualquier escalar α. De modo semejante, a partir de (58b, c), para caso de una forma diferencial de primer orden

$$\omega = A\, dx + B\, dy + C\, dz$$

se encuentra que

$$d^2\omega = d[(C_y - B_z)dy\, dz + (A_z - C_x)dz\, dx + (B_x - A_y)dx\, dy] = 0.$$

Nuevamente, ésto no es otra cosa que la regla div(rot$\mathbf{R}$) = 0, válida para cualquier vector $\mathbf{R}$ (ver la p. 211).

El problema inverso, de encontrar una forma τ que tenga una forma ω dada como su derivada exterior, es básico. Es posible que se desee representar una forma diferencial ω dada, como

$$\omega = d\tau \tag{58e}$$

con una forma diferencial apropiada τ. Se dirá que ω es una *diferencial exacta,* o *total,* cuando es posible esa representación. Aplicando la regla (59) a la diferencial τ, se ve que *una condición necesaria para que* ω *sea una diferencial exacta es que* $d\omega = 0$.[1] Resulta que esta condición también es suficiente; es decir, *para* $d\omega = 0$, *la ecuación* (58e) *tiene una solución* τ, *siempre que nos restrinjamos a una vecindad rectangular de un punto* (x_0, y_0, z_0) *interior al dominio de definición*[2] *de* ω.

[1]Las formas ω para las cuales $d\omega = 0$ se llaman *cerradas*.

Se probará esta proposición por separado para cada orden de ω. Si es de orden 1, digamos

$$\omega = A\,dx + B\,dy + C\,dz,$$

entonces, por (58b), la condición $d\omega = 0$ es equivalente a las relaciones

$$C_y - B_z = 0, \quad A_z - C_x = 0, \quad B_x - A_y = 0. \tag{58f}$$

Pero, precisamente, éstas son las *condiciones de integrabilidad* que nos permiten representar a ω como la diferencial total de alguna función f, siempre que el punto (x, y, z) esté restringido a encontrarse en un paralelepípedo rectangular que contenga a (x_0, y_0, z_0) o, más generalmente, un conjunto simplemente conexo (ver la p. 134).

Para ω de orden 2,

$$\omega = a\,dy\,dz + b\,dz\,dx + c\,dx\,dy,$$

por (58c), la condición $d\omega = 0$ es equivalente a

$$a_x + b_y + c_z = 0. \tag{58g}$$

Supóngase que esta condición se satisface en el paralelepípedo rectangular

$$|x - x_0| < r_1, \quad |y - y_0| < r_2, \quad |z - z_0| < r_3.$$

Se tiene que demostrar que $\omega = d\tau$, donde τ es de la forma

$$\tau = A\,dx + B\,dy + C\,dz.$$

Esto significa que tienen que encontrarse las funciones A, B, C para las cuales

$$a = C_y - B_z, \quad b = A_z - C_x, \quad c = B_x - A_y.$$

Tratemos de satisfacer estas ecuaciones haciendo $C \equiv 0$. Entonces A y B tienen que ser de la forma

[2] Siempre se supondrá que las formas diferenciales consideradas aquí tienen coeficientes con tantas derivadas continuas como sean necesarias para que se cumplan los argumentos de que se trate.

$$A(x, y, z) = \alpha(x, y) + \int_{z_0}^{z} b(x, y, \zeta)\, d\zeta,$$

$$B(x, y, z) = \beta(x, y) - \int_{z_0}^{z} a(x, y, \zeta)\, d\zeta$$

para satisfacer las dos primeras ecuaciones. Se concluye, aplicando la condición (58g), que

$$\frac{\partial}{\partial z}(B_x - A_y) = \frac{\partial}{\partial x} B_z - \frac{\partial}{\partial y} A_z = - a_x - b_y = c_z.$$

De aquí que $B_x - A_y - c$ no depende de z. La tercera ecuación $c = B_x - A_y$, se satisfará para toda z en cuestión si se cumple para $z = z_0$. De aquí que sólo se tienen que determinar las funciones $\alpha(x, y)$ y $\beta(x, y)$ de tal manera que

$$\beta_x(x, y) - \alpha_y(x, y) = c(x, y, z_0).$$

Esto se logra, por ejemplo, tomando

$$\alpha(x, y) = 0, \quad \beta(x, y) = \int_{x_0}^{x} c(\xi, y, z_0) d\xi.$$

Por último, para un operador de tercer orden

$$\omega = \alpha(x, y, z) dx\, dy\, dz$$

siempre se satisface la condición $d\omega = 0$. Se desea representar ω en la forma $\omega = d\tau$, donde τ es una forma diferencial de segundo orden

$$\tau = a\, dy\, dz + b\, dz\, dx + c\, dx\, dy.$$

Por (58c), ésto equivale a encontrar funciones a, b, c para las cuales

$$a_x + b_y + c_z = \alpha.$$

Evidentemente, una solución está dada por

$$a(x, y, z) = b(x, y, z) = 0, \qquad c(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} \alpha(x, y, \zeta) d\zeta.$$

Esto prueba el teorema.

Ejercicios 3.6c

1. Evaluar $d\omega$ para cada uno de los casos siguientes:

   (a) $\omega = \arctan y/x$

   (b) $\omega = y\,dx - x\,dy$

   (c) $\omega = f(x, y)\,dx\,dy$

   (d) $\omega = x^2 \cos y \operatorname{sen} z\,dy\,dz - x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z\,dz\,dx + x \cos z\,dx\,dy$

   (e) $\omega = (z^2 - y^2)x\,dy\,dz + (x^2 - z^2)y\,dz\,dx + (y^2 - x^2)z\,dx\,dy.$

2. Para las formas de primer orden en tres variables, demostrar que

$$d(\omega_1\omega_2) = \omega_1(d\omega_2) + (d\omega_1)\omega_2.$$

3. Demostrar que cualquier producto de formas exactas de primer orden en tres variables es exacta.

d. Formas diferenciales exteriores en coordenadas arbitrarias

Hasta aquí siempre se han considerado las formas diferenciales como combinaciones lineales de productos alternantes de las diferenciales dx, dy, dz de las coordenadas cartesianas x, y, z en el espacio. Se hizo un uso esencial de esta representación de las formas en términos de dx, dy, dz al definir el producto de dos formas y la derivada de una forma. La utilidad de las formas diferenciales alternantes en las aplicaciones depende del hecho de que pueden definirse estas formas y llevarse a cabo las operaciones con ellas de la misma manera, cuando el espacio euclidiano tridimensional[1] es referido a *coordenadas curvilíneas* u, v, w. cualesquiera. Más generalmente, ésto se cumple sobre cualquier espacio o *variedad*[2] no euclidianos tridimensionales referidos a los parámetros u, v, w, por ejemplo, sobre una "superficie" tridimensional en el espacio euclidiano tetradimensional. Lo importante es que las operaciones con las formas pueden definirse de una *manera invariante*, sin hacer referencia a un sistema coordenado especial, y que las fórmulas resultantes son semejantes en todos los sistemas.

En este contexto, se piensa en los puntos P del espacio tridimensional, o de una variedad Σ como objetos *geométricos* que existen

---

[1] Aquí se elige la dimensión 3 sólo en beneficio de la definición. Todas estas consideraciones son igualmente válidas para cualquier otro número de dimensiones.

[2] Por lo general, se usa el término "variedad" para denotar un conjunto dado paramétricamente de cualquier número de dimensiones $m \leqq n$ en el espacio euclidiano n-dimensional.

independientemente de cualquier sistema coordenado. Un escalar f es una función de P con números reales como valores (es decir, una *aplicación* de Σ hacia el eje de los números reales). Sin embargo, existen muchas maneras de describir los puntos P por medio de *coordenadas curvilíneas*, es decir, por medio de ternas de números (u, v, w); por ejemplo, pueden usarse coordenadas rectangulares o coordenadas esféricas en el espacio euclidiano. Siempre supondremos que dos sistemas coordenados cualesquiera de ese tipo, digamos u, v, w y u', v', w', están relacionados por las ecuaciones de transformación

$$u' = \phi(u, v, w), \quad v' = \psi(u, v, w), \quad w' = \chi(u, v, w),$$

donde ϕ, ψ, χ son funciones continuas con tantas derivadas continuas como se requieran para las operaciones consideradas, y con un jacobiano $\dfrac{d(u', v', w')}{d(u, v, w)}$ que no se anula.[2] En ese caso, u, v, w pueden expresarse mediante fórmulas semejantes en términos de u', v', w'. En un sistema coordenado dado, u, v, w un escalar $f = f(P)$ se convierte en una función $f(u \; v, w)$ de las coordenadas u, v, w del punto P. En general, en sistemas coordenados diferentes las funciones que representan el mismo escalar son bastante diferentes.

Sobre la variedad Σ, sea C una curva con la representación paramétrica $P = P(t)$; con cada número real t de un cierto intervalo, la ecuación paramétrica asocia un punto P de la variedad Σ. Cualquier escalar $f(P)$ definido sobre Σ proporciona una función de t a lo largo de C, obtenida formando la composición $f(P(t))$. Si esta función es diferenciable tiene sentido formar la derivada df/dt, la cual está definida para la curva dada y la representación paramétrica de C, independientemente de cualquier sistema coordenado curvilíneo usado para Σ. En un sistema coordenado dado las propias coordenadas u, v, w de un punto P son funciones $u = u(t), v = v(t), w = w(t)$; y $f(P(t))$ está dada por la función compuesta $f(u(t), v(t), w(t))$. Suponiendo que $f(u, v, w)$ y $u(t), v(t), w(t)$ tienen derivadas continuas, por la regla de la cadena de la derivación se encuentra que en el sistema particular u, v, w, df/dt toma la forma

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dt}. \tag{59}$$

[2] La representación particular de la transformación que comprende las funciones uniformes ϕ, ψ, χ sólo necesita ser válida localmente, es decir, en una vecindad lo suficientemente pequeña de algún punto.

Una forma diferencial de orden cero en $\sum$ es precisamente un escalar f. La forma diferencial general de primer orden, w, se define como una expresión formal del tipo

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} a_i \, df_i,$$

donde $a_1, \ldots, a_N, f_1, \ldots, f_N$ son escalares dados. A lo largo de cualquier curva C referida a un parámetro t, con ω se asocia la función de t, denotada por ω/dt, que se define por

$$\frac{\omega}{dt} = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{df_i}{dt}.$$

Dos formas,

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} a_i \, df_i \qquad \text{y} \qquad \omega' = \sum_{i=1}^{m} b_i \, dg_i,$$

se consideran iguales si

$$\frac{\omega}{dt} = \frac{\omega'}{dt}$$

para cualquier curva C y cualquier parámetro t a lo largo de c.

En un sistema coordenado u, v, w particular, ω/dt se convierte en

$$\frac{\omega}{dt} = \sum_{i=1}^{N} a_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f_i}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial f_i}{\partial w} \frac{dw}{dt} \right) = A \frac{du}{dt} + B \frac{dv}{dt} + C \frac{dw}{dt},$$

donde

$$A = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial f_i}{\partial u}, \qquad B = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial f_i}{\partial v}, \qquad C = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial f_i}{\partial w}$$

son escalares definidos en $\sum$. Debido a la definición de igualdad de formas diferenciales de primer orden, se puede escribir ω como

$$\omega = A \, du + B \, dv + C \, dw$$

Aquí los coeficientes A, B, C de ω, referidos a un sistema coordenado u, v, w particular, están determinados de modo único; porque si para la curva C se toma una "línea coordenada", digamos $u = t$, $v =$ constante, $w =$ constante, se encuentra

$$\frac{\omega}{dt} = \frac{\omega}{du} = A,$$

y, de modo semejante,

$$\frac{\omega}{dv} = B, \qquad \frac{\omega}{dw} = C.$$

De donde en cualquier sistema coordenado u, v, w, particular ω se puede escribir como

(60) $$\omega = \frac{\omega}{du}\,du + \frac{\omega}{dv}\,dv + \frac{\omega}{dw}\,dw,$$

donde ω/du en realidad representa la derivada parcial que se forma a lo largo de una curva donde v y w son constantes. Esta fórmula puede considerarse como una extensión de la regla de la cadena (59), partiendo de la diferencial df de cualquier escalar f y extendiéndola a una forma diferencial general de primer orden, ω.

Exactamente de la misma manera puede ahora definirse una *forma diferencial alternante de segundo orden*, ω, como una expresión formal del tipo

(61a) $$\omega = \sum_{i=1}^{N} a_i\, df_i\, dg_i,$$

donde $a_1, \ldots, a_N, f_1, \ldots, f_N, g_1, \ldots, g_N$ son escalares definidos sobre Σ. Sobre cualquier superficie S en Σ, referida a los parámetros $s, t,$ con la forma ω se asocian los valores $\omega/ds\,dt$ definidos por

(61b) $$\frac{\omega}{ds\,dt} = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{d(f_i, g_i)}{d(s, t)} = \sum_{i=1}^{N} a_i \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_i}{\partial s} & \dfrac{\partial f_i}{\partial t} \\ \dfrac{\partial g_i}{\partial s} & \dfrac{\partial g_i}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

Dos formas, ω y ω', aunque se representen con la ayuda de escalares diferentes se consideran idénticas cuando determinan los mismos valores $\omega/ds\,dt = \omega'/ds\,dt$ sobre cada una de las superficies correspondientes a todas las representaciones paramétricas. Ahora bien, en cualquier sistema coordenado u, v, w particular, para dos ecalares f, g se tiene

Esto es equivalente a la fórmula

(63c) $$dL = \sum_i da_i\, df_i,$$

y muestra que la forma de segundo orden dL no depende de la representación particular (63a) de L en términos de los escalares a_i, f_i. Es la generalización natural de la fórmula (58b) para el caso especial de la derivada de una forma L expresada como $L = A\,dx + B\,dy + C\,dz$.

En el caso particular en que la forma de primer orden, L, es una diferencial total —es decir, $L = df$ con un escalar f— de (63c) se encuentra, por supuesto, que $dL = 0$. Por lo tanto, para un operador f de orden 0 se cumple la regla

$$ddf = 0$$

Cuando L se representa en términos de un sistema coordenado u, v, w particular en el espacio, por medio de la forma estándar

$$L = A\,du + B\,dv + C\,dw,$$

de (61f), (63b) se encuentra que

$$\begin{aligned}
dL &= dA\,du + dB\,dv + dC\,dw \\
&= \frac{dL}{dv\,dw}\,dv\,dw + \frac{dL}{dw\,du}\,dw\,du + \frac{dL}{duv}\,du\,dv \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{L}{dw} - \frac{\partial}{\partial w}\,\frac{L}{dv}\right)dv\,dw + \left(\frac{\partial}{\partial w}\,\frac{L}{du} - \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{L}{dw}\right)dw\,dv \\
&\qquad + \left(\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{L}{dv} - \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{L}{du}\right)du\,dv \\
&= (C_v - B_w)\,dv\,dw + (A_w - C_u)\,dw\,du + (B_u - A_v)\,du\,dv,
\end{aligned}$$

lo que concuerda con la fórmula (58b).

Si $dL = 0$, se obtiene, como antes, que $C_v - B_w = A_w - C_u = B_u - A_v = 0$. Se concluye que localmente existe un escalar f para el cual $A = f_u$, $B = f_v$, $C = f_w$, o bien $L = df$.

Finalmente, se define una forma diferencial alternante de tercer orden por una expresión formal

(64a) $$\omega = \sum_{i=1}^{N} a_i\, df_i\, dg_i\, dh_i\,,$$

El *producto* LM de dos formas de primer orden,

(62a) $$L = \sum_i a_i\, df_i, \qquad M = \sum_i b_k\, dg_k,$$

sobre una superficie con parámetros s, t, se define como aquella forma de segundo orden, ω, para la cual

(62b) $$\begin{aligned}\frac{\omega}{ds\,dt} &= \frac{L}{ds}\frac{M}{dt} - \frac{L}{dt}\frac{M}{ds}\\ &= \sum_i a_i \frac{\partial f_i}{\partial s}\sum_k b_k \frac{\partial g_k}{\partial t} - \sum_i a_i \frac{\partial f_i}{\partial t}\sum_k b_k \frac{\partial g_k}{\partial s}\\ &= \sum_{i,k} a_i b_k \frac{d(f_i, g_k)}{d(s, t)}.\end{aligned}$$ [1]

Consecuentemente, si L y M están dadas por (62a), LM puede identificarse con la forma de segundo orden

(62c) $$\omega = \sum_{i,k} a_i b_k\, df_i\, dg_k.$$

Sin embargo, la definición de $\omega/\,ds\,dt$ dada por (62b) no depende de la representación particular de L y M en términos de los escalares a_i, f_i, b_k, g_k; de aquí que la fórmula (62c) debe representar la misma forma $\omega = LM$ para todas las representaciones de los factores L, M.

Otra manera de generar formas de segundo orden a partir de las de primer orden es derivando. Dada la forma de primer orden

(63a) $$L = \sum_i a_i df_i,$$

puede definirse dL sin hacer referencia a algún sistema coordenado particular, por medio de la prescripción

(63b) $$\begin{aligned}\frac{dL}{ds\,dt} &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{L}{dt} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{L}{ds}\\ &= \frac{\partial}{\partial s}\sum_i a_i \frac{\partial f_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\sum_i a_i \frac{\partial f_i}{\partial s}\\ &= \sum_i \left(\frac{\partial a_i}{\partial s}\frac{\partial f_i}{\partial t} - \frac{\partial a_i}{\partial t}\frac{\partial f_i}{\partial s}\right) = \sum \frac{d(a_i, f_i)}{d(s, t)}.\end{aligned}$$

[1] Aquí M/ds y M/dt denotan la derivación (o derivada) "parcial" con t y s, respectivamente, mantenidas constantes. (Difícilmente puede hacerse una distinción consistente entre la derivación ordinaria y la parcial.)

$$= \sum_{i,k} a_i b_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial r} \frac{d(g_k, h_k)}{d(s, t)} + \frac{\partial f_i}{\partial s} \frac{d(g_k, h_k)}{d(t, r)} + \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{d(g_k, h_k)}{d(r, s)} \right)$$

$$= \sum_{i,k} a_i b_k \frac{d(f_i, g_k, h_k)}{d(r, s, t)}.$$

Esto equivale a la fórmula

$$L\omega = \sum_{i,k} a_i b_k \, df_i \, dg_k \, dh_k, \tag{65a}$$

como puede esperarse a partir de la multiplicación formal de las expresiones para L y ω. Cuando L y ω están en su forma estándar

$$L = A\,du + B\,dv + C\,dw, \quad \omega = a\,dv\,dw + b\,dw\,du + c\,du\,dv$$

para un sistema coordenado u, v, w dado, el producto se convierte en

$$L\omega = (Aa + Bb + Cc)\,du\,dv\,dw, \tag{65b}$$

en acuerdo con (57c).

La derivada de la forma de segundo orden

$$\omega = \sum a_i \, dg_i \, dh_i$$

se puede definir independientemente de cualquier sistemacoordenado especial, por la regla

$$\frac{d\omega}{dr\,ds\,dt} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\omega}{ds\,dt} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\omega}{dt\,dr} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\omega}{dr\,ds}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \sum_i a_i \frac{d(g_i, h_i)}{d(s, t)} + \frac{\partial}{\partial s} \sum_i a_i \frac{d(g_i, h_i)}{d(t, r)} + \frac{\partial}{\partial t} \sum_i a_i \frac{d(g_i, h_i)}{d(r, s)}.$$

Así,

$$\frac{d\omega}{dr\,ds\,dt} = \sum_i \frac{d(a_i, g_i, h_i)}{d(r, s, t)}, \tag{66a}$$

como se verifica fácilmente. De aquí que la definición dada para $d\omega$ implica que

$$d\omega = \sum_i da_i \, dg_i \, dh_i. \tag{66b}$$

Para ω en la forma estándar

con escalares a_i, f_i, g_i, h_i. En cualquier sistema paramétrico r, s, t en el espacio, (64a) define los valores

$$\text{(64b)} \qquad \frac{\omega}{dr\, ds\, dt} = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{d(f_i, g_i, h_i)}{d(r, s, t)} .$$

Con referencia a un sistema coordenado u, v, w particular se puede escribir

$$\text{(64c)} \qquad \frac{\omega}{dr\, ds\, dt} = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{d(f_i, g_i, h_i)}{d(u, v, w)} \frac{d(u, v, w)}{d(r, s, t)} .$$

Esto equivale a la identidad

$$\text{(64d)} \qquad \omega = \alpha\, du\, dv\, dw,$$

donde

$$\text{(64e)} \qquad \alpha = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{d(f_i, g_i, h_i)}{d(u, v, w)} .$$[1]

Se puede definir el producto $L\omega$ de una forma de primer orden,

$$L = \sum_i a_i\, df_i ,$$

y una forma de segundo orden,

$$\omega = \sum_k b_k\, dg_k\, dh_k ,$$

especificando que

$$\frac{L\omega}{dr\, ds\, dt} = \frac{L}{dr} \frac{\omega}{ds\, dt} + \frac{L}{ds} \frac{\omega}{dt\, dr} + \frac{L}{dt} \frac{\omega}{dr\, ds}$$

[1]En el espacio n dimensional, referida a los parámetros $u_1, \ldots, u_n$, en lugar de (64c, d, e) se tiene la fórmula

$$\omega = \sum_{\substack{j,k,m=1,\ldots,n \\ j<k<m}} A_{jkm}\, du_j\, du_k\, du_m,$$

donde

$$A_{jkm} = \sum_i a_i \frac{d(f_i, g_i, h_i)}{d(u_j, u_k, u_m)} = \frac{\omega}{du_j\, du_k\, du_m} .$$

$f(x, y)$ para todo $(x, y) \neq (x_1, y_1)$ en R. El teorema básico de la p. 144 nos asegura que *si R es un conjunto cerrado y acotado y f es continua en R, entonces existen puntos en R donde f tiene su máximo y también puntos donde f tiene su mínimo.*

Como un ejemplo, considérese la función $u = x^2 + y^2$ en el disco cerrado dado por $x^2 + y^2 < 1$. La superficie S es la porción del paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$ que se encuentra por debajo del plano $z = 1$. Aquí los máximos de f ocurren en todos los puntos del círculo frontera $x^2 + y^2 = 1$, mientras que f tiene un *mínimo estricto* en el origen.

El cálculo se aplica directamente a la determinación de los máximos o mínimos *relativos,* en lugar de los extremos absolutos. Un punto (x_0, y_0) del dominio R es un *máximo relativo* si $f(x_0, y_0) \geqq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) de R que se encuentren en una vecindad lo suficientemente pequeña de (x_0, y_0). El valor $f(x_0, y_0)$ en un máximo relativo no tiene que ser el mayor valor de f en todo R, sino que es un máximo de f si nos restringimos a puntos lo suficientemente próximos a (x_0, y_0). Los mínimos relativos se definen de manera análoga. Todo máximo (mínimo) absoluto también es un máximo (mínimo) relativo, pero la recíproca no se cumple.

Por ejemplo, la función $u = (x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2)$, cuyo dominio sea el disco abierto $x^2 + y^2 < 4$, no tiene máximo pero tiene un máximo relativo en el orgien. Todos los puntos sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ son puntos mínimos. Aquí la superficie S se genera haciendo girar la curva $z = x^6 - 3x^2$ alrededor del eje z.

Las definiciones de mínimos absolutos o relativos para funciones $u = f(x, y, z, \ldots)$ de más variables independientes son enteramente semejantes.

Se darán primero las condiciones *necesarias* para la ocurrencia de un máximo o mínimo relativo en un punto *interior* (x_0, y_0) del dominio R de la función $f(x, y)$. Usaremos el término extremo relativo para incluir tanto a los máximos como a los mínimos. Sea ahora (x_0, y_0) un punto interior del dominio R de la función $f(x, y)$, y supóngase que f tiene las derivadas parciales $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ en ese punto. *Para que ocurra un extremo relativo de f en el punto* (x_0, y_0), *es necesario que:*

(67a) $$f_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Las condiciones (67a) se deducen inmediatamente a partir de las conocidas condiciones para las funciones de una sola variable. Pón-

(66c) $$\omega = a\,dv\,dw + b\,dw\,du + c\,du\,dv$$

se obtiene

(66d) $$d\omega = (a_u + b_v + c_w)du\,dv\,dw.$$

Puede usarse nuevamente esta representación especial para $d\omega$, como en la p. 315, para demostrar que una forma de segundo orden ω con $d\omega = 0$ es representable localmente como $\omega = dL$, donde L es una forma diferencial de primer orden apropiada.

Ejercicios 3.6d

1. En las coordenadas esféricas $x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$, $z = \rho \cos\phi$, elíjanse los vectores unitarios $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ en la dirección de las líneas r, ϕ, θ respectivamente. Demostrar que $d\mathbf{X} = (dx, dy, dz) = \mathbf{u}d\rho + \mathbf{v}\rho d\phi + \mathbf{w}\rho \operatorname{sen}\phi\, d\theta$. De aquí, encontrar la expresión para $\nabla f(\rho, \phi, \theta)$ en coordenadas esféricas, donde ∇f se define por $\nabla f \cdot d\mathbf{X} = df$.

3.7 Máximos y mínimos

a. Condiciones necesarias

Para las funciones de varias variables, como para las funciones de una sola variable, una de las aplicaciones más importantes de la derivación es la teoría de los máximos y mínimos.

Empezaremos por considerar una función $u = f(x, y)$ de las dos variables independientes x, y. El *dominio* de la función será un cierto conjunto R en el plano x, y. Puede representarse f en el espacio x, y, z por la superficie S con ecuación $z = f(x, y)$. Se dice que $f(x, y)$ tiene un *máximo*[1] en el punto (x_0, y_0) de su dominio R, si $f(x_0, y_0) \geqq f(x, y)$ para todo (x, y) en R. Tal máximo corresponde a uno de los puntos más elevados de la superficie S. Se habla de un *máximo estricto* si, realmente, $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ para todo (x, y) en R que sea diferente de (x_0, y_0), de modo que el valor máximo de la función únicamente se alcanza en el punto (x_0, y_0). De modo semejante, se dice que $f(x, y)$ tiene un *mínimo* en el punto (x_1, y_1) de R si $f(x_1, y_1) \leqq f(x, y)$ para todo (x, y) en R, un *mínimo estricto* si $f(x_1, y_1) <$

[1]También llamado *máximo absoluto,* en contraste con el *maximo relativo* que se define a continuación. La terminología usada aquí es exactamente la misma que para las funciones de una sola variable; ver el Volumen I (pp. 238 y siguientes).

tiene punto máximo ni mínimo sino que tiene un *punto silla de montar* (o simplemente, *punto silla*) en el origen (ver la Fig. 3.1).

Se ve que los puntos máximo y mínimo de una función diferenciable se encuentran sobre la frontera del dominio o se tienen que buscar entre sus puntos críticos. Para decidir si, en realidad, un punto crítico es un máximo o mínimo se requiere una investigación especial. En la p. 349 se encontrarán las condiciones que son suficientes para asegurar que un punto crítico es al menos un extremo relativo.

El *valor máximo M* de una función $f(x, y)$ es el mayor de todos los valores alcanzados por f en los puntos de su dominio R. Los puntos máximos de f son aquellos para los cuales $f(x, y) = M$.[1] De modo semejante, los *valores críticos* o *estacionarios* de f son aquellos que alcanza en los puntos críticos o estacionarios.

b. Ejemplos

1. La función

$$u = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad (x^2 + y^2 < 1)$$

tiene las derivadas parciales

$$u_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \qquad u_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

y éstas se anulan en el origen. Aquí se tiene un máximo, porque en todos los demás puntos (x, y) en la vecindad del origen la cantidad $1 - x^2 - y^2$ en el radicando es menor que la que se tiene en el origen.

2. Se desea construir el triángulo para el cual el producto de los senos de los tres ángulos sea máximo; es decir, se desea encontrar el máximo de la función

$$f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x + y)$$

en la región $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \pi$, $0 \leqq x + y \leqq \pi$. Como f es positiva en el interior de esta región, su valor máximo es positivo. Sobre la frontera de la región, donde se cumple el signo de igualdad en al

[1] A veces se usa el término "máximo" en una forma un tanto ambigua, refiriéndose ya sea al valor máximo o a un punto argumento (x, y) donde f toma su valor máximo.

gase $\phi(x) = f(x, y_0)$. Entonces $\phi(x)$ está definida para toda x lo suficientemente próxima a x_0 y tiene en x_0 la derivada $\phi'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$. Si $f(x_0, y_0) \geqq f(x, y)$ para todo (x, y) en R que esté lo suficientemente próximo a (x_0, y_0), entonces, en particular, $\phi(x_0) \geqq \phi(x)$ para toda x lo suficientemente próxima a x_0. Se concluye (ver el Volumen I, p. 241) que $\phi'(x_0) = 0$; ésto es, $f_x(x_0, y_0) = 0$. De modo semejante se deduce la segunda condición necesaria, $f_y(x_0, y_0) = 0$

Geométricamente, la anulación de las derivadas parciales de $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) significa que en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ es paralelo al plano x, y. Se dice que (x_0, y_0) es un punto *estacionario* o *crítico* de $f(x, y)$ si las primeras derivadas $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ ambas existen y se anulan. De aquí que todo extremo relativo en el interior del dominio de una función diferenciable f es un punto crítico de f.

El mismo resultado se aplica a las funciones $f(x, y, z, \ldots)$ de cualquier número de variables independientes. Aquí $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ es un punto *estacionario* o *crítico* de f si todas las primeras derivadas $f_x, f_y, \ldots$ en ese punto existen y satisfacen

(67b) $$f_x(x_0, y_0, z_0, \ldots) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0, \ldots) = 0,$$
$$f_z(x_0, y_0, z_0, \ldots) = 0, \ldots .$$

El número de condiciones es igual al de variables independientes $x, y, z \ldots$. Pueden combinarse las condiciones en el requerimiento único de que

$$df = f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz + \cdots = 0$$

para $(x, y, z, \ldots) = (x_0, y_0, z_0, \ldots)$ y todas las $dx, dy, dz, \ldots$.

Como el número de las ecuaciones (67b) es igual al número de incógnitas $x_0, y_0, z_0, \ldots$, comúnmente se espera encontrar un número finito de puntos críticos, aunque, por supuesto, no siempre es así. Es más, un punto crítico no necesariamente tiene que ser un extremo relativo

Considérese, por ejemplo, la función $u = xy$. Las dos ecuaciones (67a) inmediatamente dan el punto $x = 0, y = 0$ como el único punto crítico. Sin embargo, en toda vecindad de $(0, 0)$, la función puede tomar tanto valores positivos como negativos, dependiendo del cuadrante que contenga a (x, y). Por lo tanto, la función no tiene extremo relativo en este punto. Geométricamente, la superficie que representa a la función $u = xy$ es un paraboloide hiperbólico que no

tiene punto máximo ni mínimo sino que tiene un *punto silla de montar* (o simplemente, *punto silla*) en el origen (ver la Fig. 3.1).

Se ve que los puntos máximo y mínimo de una función diferenciable se encuentran sobre la frontera del dominio o se tienen que buscar entre sus puntos críticos. Para decidir si, en realidad, un punto crítico es un máximo o mínimo se requiere una investigación especial. En la p. 349 se encontrarán las condiciones que son suficientes para asegurar que un punto crítico es al menos un extremo relativo.

El *valor máximo* M de una función $f(x, y)$ es el mayor de todos los valores alcanzados por f en los puntos de su dominio R. Los puntos máximos de f son aquéllos para los cuales $f(x, y) = M$.[1] De modo semejante, los *valores críticos* o *estacionarios* de f son aquellos que alcanza en los puntos críticos o estacionarios.

b. Ejemplos

1. La función

$$u = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad (x^2 + y^2 < 1)$$

tiene las derivadas parciales

$$u_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \qquad u_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

y éstas se anulan en el origen. Aquí se tiene un máximo, porque en todos los demás puntos (x, y) en la vecindad del origen la cantidad $1 - x^2 - y^2$ en el radicando es menor que la que se tiene en el origen.

2. Se desea construir el triángulo para el cual el producto de los senos de los tres ángulos sea máximo; es decir, se desea encontrar el máximo de la función

$$f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x + y)$$

en la región $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \pi$, $0 \leqq x + y \leqq \pi$. Como f es positiva en el interior de esta región, su valor máximo es positivo. Sobre la frontera de la región, donde se cumple el signo de igualdad en al

[1]A veces se usa el término "máximo" en una forma un tanto ambigua, refiriéndose ya sea al valor máximo o a un punto argumento (x, y) donde f toma su valor máximo.

menos una de las desigualdades que la definen, se tiene $f(x, y) = 0$, de modo que el valor máximo se debe encontrar en el interior.

Si se igualan las derivadas a 0 se obtienen las dos ecuaciones

$$\cos x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos(x + y) = 0,$$

$$\operatorname{sen} x \cos y \operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos(x + y) = 0.$$

Supuesto que $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$, $0 < x + y < \pi$, éstas dan $\tan x = \tan y$, o bien, $x = y$. Si se sustituye este valor en la primera ecuación se obtiene la relación $\operatorname{sen} 3x = 0$; de aquí que $x = \pi/3$, $y = \pi/3$ es el único punto estacionario y el triángulo requerido es equilátero.

3. Tres puntos P_1, P_2, P_3, con coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2), y (x_3, y_3), respectivamente, son los vértices de un triángulo acutángulo. Se desea encontrar un cuarto punto P con coordenadas (x, y) tal que la suma de sus distancias a P_1, P_2, y P_3 sea la menor posible. Esta suma de distancias es una función continua de x y y, y en algún punto P interior a un círculo grande que encierre al triángulo tiene un valor mínimo. Este punto P no puede estar en un vértice del triángulo, porque entonces el pie de la perpendicular bajada desde cualquiera de los otros dos vértices a su lado opuesto correspondería a una suma menor de las distancias. Nuevamente, P no puede estar sobre la circunferencia del círculo, si ésta está lo suficientemente alejada del triángulo. Con las distancias r_i definidas por

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

se desea minimizar la función

$$f(x, y) = r_1 + r_2 + r_3,$$

la cual es diferenciable en todo punto excepto en P_1, P_2, y P_3. Se sabe que en el punto P las derivadas parciales con respecto a x y a y deben anularse. Por tanto, derivando f se obtienen las condiciones

$$\frac{x - x_1}{r_1} + \frac{x - x_2}{r_2} + \frac{x - x_3}{r_3} = 0,$$

$$\frac{y - y_1}{r_1} + \frac{y - y_2}{r_2} + \frac{y - y_3}{r_3} = 0$$

para P. De acuerdo con estas ecuaciones, los tres vectores coplanares

$$\left(\frac{x_1 - x}{r_1}, \frac{y_1 - y}{r_1}\right), \quad \left(\frac{x_2 - x}{r_2}, \frac{y_2 - y}{r_2}\right), \quad \left(\frac{x_3 - x}{r_3}, \frac{y_3 - y}{r_3}\right)$$

tienen el vector suma **0**. También, cada uno de estos vectores tiene longitud unitaria. Cuando se les da el punto inicial común P sus puntos finales forman un triángulo equilátero; es decir, cada vector se hace coincidir con el que le sigue haciéndolo girar un ángulo de $\frac{2}{3}\pi$ (Fig. 3.27). Como estos tres vectores tienen las mismas direcciones que los tres vectores desde P hacia P_1, P_2, P_3, se deduce que cada uno de los tres lados del triángulo debe subtender el mismo ángulo $\frac{2}{3}\pi$ en el punto P.

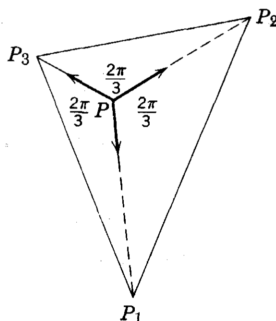


Figura 3.27

Ejercicios 3.7b

1. Encontrar los puntos estacionarios de las funciones siguientes, y establecer su naturaleza:

   (a) $f(x, y) = y^2(\operatorname{sen} x - x/2)$

   (b) $f(x, y) = \cos(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)$

   (c) $f(x, y) = y^x$

   (d) $f(x, y) = x/y$

   (e) $f(x, y) = ye^{-x^2}$.

2. Determinar los máximos y mínimos de la función

$$(ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2} \qquad (0 < a < b).$$

3. Encontrar los valores de x, y que hagan estacionaria a

$$2x^3 + (x - y)^2 - 6y$$

4. La suma de las longitudes de las 12 aristas de un bloque rectangular es a; la suma de las áreas de las 6 caras es $a^2/25$. Calcular las longitudes de las aristas cuando es máximo el exceso del volumen del bloque sobre el de un cubo cuya arista es igual a la menor arista del bloque.
5. Encontrar los puntos estacionarios y establecer su naturaleza, para la función.

$$f(x, y, z) = x^2(y-1)^2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2.$$

6. De acuerdo con las presentes normas postales en los Estados Unidos, se puede transportar un bulto rectangular con longitudes de sus lados iguales a x, y, z pulgadas, con $x \leqq y \leqq z$ sólo si $2(x+y)+z \leqq 100$. Encontrar el volumen máximo de un bulto transportable bajo esta condición. [Sugerencia. Hágase $z = 100 - 2(x+y)$.]
7. Minimizar la suma de los cuadrados de las distancias de un punto $\mathbf{X}$ a n puntos dados.

c. Máximos y mínimos con condiciones subsidiarias

El problema de determinar los máximos y mínimos de funciones de varias variables frecuentemente se presenta en una forma diferente. Por ejemplo, es posible que se desee hallar el punto de una superficie dada $\phi(x, y, z) = 0$ más próximo al origen. Entonces se tiene que minimizar la función

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

donde, empero, las cantidades x, y, z ya no son tres variables *independientes* sino que están relacionadas a través de la ecuación de la superficie $\phi(x, y, z) = 0$ como una condición subsidiaria. De hecho, tales máximos y mínimos con condiciones subsidiarias no representan un problema fundamentalmente nuevo. Así, en el ejemplo sólo se requiere resolver una de las variables, digamos z, como una función de las otras dos, para reducir el problema al de determinar los valores estacionarios de una función de las dos variables independientes x, y.

No obstante, es más conveniente y también más elegante expresar las condiciones para un valor estacionario en una forma simétrica, en la cual no se da preferencia a ninguna de las variables.

Un caso típico sencillo lo presenta el problema de *encontrar los valores estacionarios de una función $f(x, y)$, cuando las dos variables x, y no son mutuamente independientes sino que están relacionadas por medio de una condición subsidiaria*

$$\phi(x, y) = 0.$$

Con el fin de tener una visión geométrica, supóngase primero que la condición subsidiaria se representa, como en la Fig. 3.28, por una curva en el plano x, y sin singularidades y que, además, la familia de curvas $f(x, y) = c =$ constante cubre una porción del plano, como en la figura. Entre las curvas de la familia que se cortan con la curva

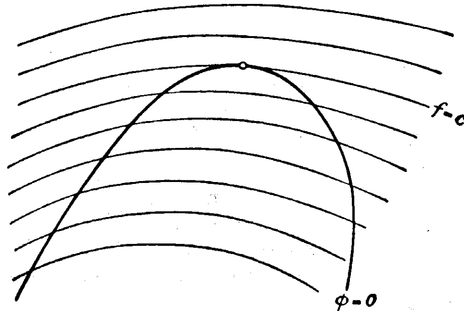


Figura 3.28 Valor extremo de f con la condición subsidiaria $\phi = 0$.

$\phi = 0$, se tiene que encontrar aquella para la cual la constante c es máxima o mínima. Conforme se describe la curva $\phi = 0$, se cruzan las curvas $f(x, y) = c$, y en general, c cambia monótonamente; en el punto en donde se invierte el sentido en el que se recorre la escala c, se puede esperar tener un valor extremo. En la Fig. 3.28 se ve que ésto ocurre para la curva de la familia que toca a la curva $\phi = 0$. Las coordenadas del punto de contacto serán los valores requeridos $x = \xi$, $y = \eta$ correspondientes al valor extremo de $f(x, y)$. Si las dos curvas $f =$ constante y $\phi = 0$ se tocan, tienen la misma tangente. De donde, en el punto $x = \xi$, $y = \eta$, se cumple la relación proporcional

$$f_x : f_y = \phi_x : \phi_y ;$$

o bien, si se introduce la constante de proporcionalidad λ, se satisfacen las dos ecuaciones

$$f_x + \lambda\phi_x = 0$$
$$f_y + \lambda\phi_y = 0$$

Estas, junto con la ecuación

$$\phi(x, y) = 0,$$

sirven para determinar las coordenadas (ξ, η) del punto de contacto y también la constante de proporcionalidad λ.

Este argumento puede fallar, por ejemplo, cuando la curva $\phi = 0$ tiene un punto singular (digamos una cúspide, como en la Fig. 3.29) en el punto (ξ, η) en el cual encuentra a una curva $f = c$, con la c más grande o más pequeña posible. En este caso, sin embargo, se tienen las dos condiciones

$$\phi_x(\xi, \eta) = 0 \qquad \text{y} \qquad \phi_y(\xi, \eta) = 0.$$

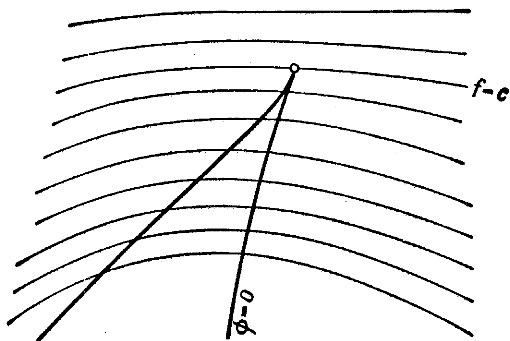


Figura 3.29 Valor extremo en un punto singular de $\phi = 0$

Se ha llegado intuitivamente a la regla que sigue, la cual se probará en la subsección siguiente:

Para que pueda ocurrir un valor extremo de la función $f(x, y)$ con la condición subsidaria $\phi(x, y) = 0$, en el punto $x = \xi$, $y = \eta$, donde no se anulan simultáneamente $\phi_x(\xi, \eta)$ y $\phi_y(\xi, \eta)$ debe existir una constante de proporcionalidad λ tal que se satisfagan las dos ecuaciones

$$\text{(67c)} \qquad f_x(\xi, \eta) + \lambda\phi_x(\xi, \eta) = 0 \qquad \text{y} \qquad f_y(\xi, \eta) + \lambda\phi_y(\xi, \eta) = 0$$

junto con la ecuación

$$\text{(67d)} \qquad \phi(\xi, \eta) = 0.$$

Este se conoce como *método de Lagrange de los multiplicadores indeterminados* y el factor λ es el *multiplicador de Lagrange*.

Se observa que esta regla da tantas ecuaciones para la determinación de las cantidades ξ, η, y λ como incógnitas existen. Por lo

tanto, se ha remplazado el problema de encontrar las posiciones de los valores extremos (ξ, η) por un problema en el que existe una incógnita adicional, λ, pero en el que se tiene la ventaja de la completa simetría. Normalmente, la regla de Lagrange se expresa del modo siguiente:

Para encontrar los valores extremos de la función $f(x, y)$ sujeta a la condición subsidiaria $\phi(x, y) = 0$, a $f(x, y)$ se le agrega el producto de $\phi(x, y)$ y un factor desconocido λ independiente de x y y, y se escriben las condiciones necesarias conocidas,

$$f_x + \lambda\phi_x = 0, \qquad f_y + \lambda\phi_y = 0,$$

para un valor extremo de $F = f + \lambda\phi$. En conjunción con la condición subsidiaria $\phi = 0$, éstas sirven para determinar las coordenadas del punto extremo y la constante de proporcionalidad.

Como un ejemplo, encontremos los valores extremos de la función

$$u = xy$$

sobre el círculo con radio unitario y centro en el origen, es decir, con la condición subsidiaria

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

De acuerdo con la regla dada, derivando $xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ con respecto a x y a y se encuentra que, en los puntos estacionarios, tienen que satisfacerse las dos ecuaciones

$$y + 2\lambda x = 0$$

$$x + 2\lambda y = 0$$

Además, se tiene la condición subsidiaria

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Resolviendo, se obtienen los cuatro puntos

$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad \eta = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\xi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad \eta = -\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad \eta = -\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\xi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad \eta = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

Los dos primeros puntos dan un valor máximo $u = \frac{1}{2}$, y los dos segundos, un valor mínimo $u = -\frac{1}{2}$, para la función $u = xy$. Que los dos primeros realmente dan el valor máximo y los dos segundos el valor mínimo de la función u, se deduce a partir del hecho de que sobre la circunferencia la función debe tomar un valor máximo y un valor mínimo (ver la p. 376), puesto que la circunferencia es cerrada y acotada.

Ejercicios 3.7c

1. Resolver el Ejercicio 6 de la Sección 3.7b como un problema de maximizar el volumen sujeto a la condición $2(x + y) + z = 100$.
2. Minimizar la función $z = x^2y^2$ sujeta a la condición $x + y = 1$.
3. Maximizar la función $z = \cos \pi (x + y)$ sujeta a la condición $x^2 + y^2 = 1$.
4. En el plano, minimizar la suma de los cuadrados de las distancias de un punto $\mathbf{X}$ a n puntos dados, sujeta a la condición de que $\mathbf{X}$ está sobre una recta dada (comparar con la Sección 3.7b, Ejercicio 7).
5. Si $C = f(a, b)$ es un máximo o mínimo verdadero de $f(x, y)$ sujeto a la condición $\phi(x, y) = C'$, demostrar que, en general, $C' = \phi(a, b)$ es un máximo o mínimo verdadero de $\phi(x, y)$ sujeto a la condición $f(x, y) = C$.

d. *Demostración del método de los multiplicadores indeterminados en el caso más sencillo*

Como es de esperar, se llega a una demostración analítica del método de los multiplicadores indeterminados, reduciéndolo al caso conocido de los valores extremos "libres". Se supondrá que en un punto extremo no se anulan simultáneamente las dos derivadas parciales $\phi_x(\xi, \eta)$ y $\phi_y(\xi, \eta)$; para se específicos, supóngase que $\phi_y(\xi, \eta) \neq 0$. Entonces, por el teorema de la función implícita (p. 266), en una vecindad de este punto la ecuación $\phi(x, y) = 0$ determina a y de modo único como una función continuamente diferenciable de x, digamos $y = g(x)$. Si se sustituye esta expresión en $f(x, y)$, la función

$$f(x, g(x))$$

debe tener un valor extremo libre en el punto $x = \xi$. Para ésto se debe cumplir la ecuación

$$f'(x) = f_x + f_y g'(x) = 0$$

en $x = \xi$. Además, la función $y = g(x)$ definida implícitamente satisface la relación $\phi_x + \phi_y g'(x) = 0$ idénticamente. Si se multiplica esta ecuación por $\lambda = -f_y/\phi_y$ y se le suma a $f_x + f_y g'(x) = 0$, se obtiene

$$f_x + \lambda\phi_x = 0,$$

y, por la definición de λ, se cumple la ecuación

$$f_y + \lambda\phi_y = 0$$

Esto establece el método de los multiplicadores indeterminados.

Esta demostración hace resaltar la importancia de la hipótesis de que las derivadas ϕ_x y ϕ_y no se anulan simultáneamente en el punto (ξ, η). Si ambas derivadas se anulan, la regla falla, como muestra el ejemplo que sigue. Se desea hacer que la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

sea un mínimo, sujeta a la condición

$$\phi(x, y) = (x - 1)^3 - y^2 = 0.$$

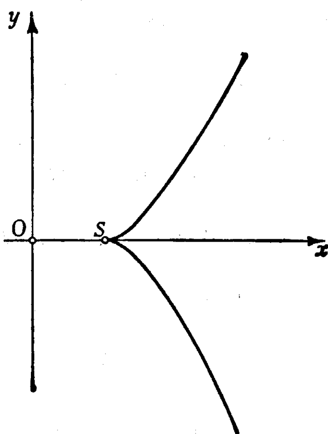


Figura 3.30 La curva $(x - 1)^3 - y^2 = 0$.

En la Fig. 3.30, la distancia más corta del origen a la curva $(x-1)^3 - y^2 = 0$ obviamente está dada por la recta que une el origen con la cúspide S de la curva (fácilmente puede probarse que el círculo unitario con centro en el origen no contiene a otro punto de la curva).
Las coordenadas de S —es decir, $x = 1$ y $y = 0$— satisfacen las ecuaciones $\phi(x, y) = 0$ y $f_y + \lambda\phi_y = 0$, sin importar el valor que se le asigne a λ, pero

$$f_x + \lambda\phi_x = 2x + 3\lambda(x-1)^2 = 2 \neq 0.$$

El método de los multiplicadores indeterminados se puede enunciar en una forma ligeramente diferente, la cual es particularmente conveniente para la generalización. Se ha visto que la anulación de la diferencial de una función $F(x, y)$ en un punto dado es una condición necesaria para que un valor extremo de la función ocurra en ese punto. Para el problema presente, de modo semejante, se puede hacer la siguiente afirmación:

Para que la función $f(x, y)$ tenga un valor extremo en el punto (ξ, η) sujeto a la condición subsidiaria $\phi(x, y) = 0$, la diferencial df debe anularse en ese punto, donde se considera que las diferenciales dx y dy no son independientes sino que están sujetas a la ecuación

$$d\phi = \phi_x\, dx + \phi_y\, dy = 0 \tag{67e}$$

deducida de $\phi = 0$. Supóngase que en el punto (ξ, η) las diferenciales dx y dy satisfacen la ecuación

$$df = f_x(\xi, \eta)\, dx + f_y(\xi, \eta)\, dy = 0 \tag{67f}$$

siempre que satisfagan la ecuación $d\phi = 0$. Multiplicando la ecuación (67e) por un número λ y sumándola a (67f), se obtiene

$$(f_x + \lambda\phi_x)\, dx + (f_y + \lambda\phi_y)\, dy = 0.$$

Si se determina λ de modo que

$$f_y + \lambda\phi_y = 0, \tag{67g}$$

como es posible en virtud de la hipótesis de que $\phi_y \neq 0$, se concluye que $(f_x + \lambda\phi_x)\, dx = 0$, y, como la diferencial dx en (67e) puede elegirse arbitrariamente, digamos igual a 1, se tiene

(67h) $$f_x + \lambda\phi_x = 0.$$

Recíprocamente, las relaciones (67g, h) con cualquier λ implican, por supuesto, que $df = 0$ siempre que $d\phi = 0$.

Ejercicios 3.7d

1. Describir la apariencia de la superficie $z = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$, para el multiplicador de Lagrange λ y la ecuación restrictiva $\phi = 0$

e. Generalización del método de los multiplicadores indeterminados

El método de los multiplicadores indeterminados se puede extender a un mayor número de variables y también a un mayor número de condiciones subsidiarias. Consideraremos un caso especial que incluya todas las características esenciales. Se buscarán los valores extremos de la función

(68a) $$u = f(x, y, z, t),$$

cuando las cuatro variables x, y, z, t satisfagan las dos condiciones subsidiarias

(68b) $$\phi(x, y, z, t) = 0, \quad \psi(x, y, z, t) = 0.$$

Se supondrá que en el punto (ξ, η, ζ, τ) la función f toma un valor que es un valor extremo cuando se compara con los valores en todos los puntos vecinos que satisfacen las condiciones subsidiarias. Se requiere que, en la vecindad del punto $P = (\xi, \eta, \zeta, \tau)$, dos de las variables, digamos z y t, se puedan representar como funciones de las otras dos, x y y, por medio de las ecuaciones (68b). Con el fin de asegurar que puedan hallarse tales soluciones $z = g(x, y)$ y $t = h(x, y)$ supóngase que en el punto P el jacobiano

(68c) $$\frac{d(\phi, \psi)}{d(z, t)} = \phi_z\psi_t - \phi_t\psi_z$$

no es cero (ver la p. 313). Sustitúyanse ahora las funciones

$$z = g(x, y) \qquad \text{y} \qquad t = h(x, y)$$

en la función $u = f(x, y, z, t)$, para obtener una función de las dos variables independientes x y y; esta función debe tener un valor ex-

tremo libre en el punto $x = \xi$, $y = \eta$; es decir, sus dos derivadas parciales deben anularse en ese punto. Por lo tanto, se deben cumplir las dos ecuaciones

(69a) $$f_x + f_z \frac{\partial z}{\partial x} + f_t \frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

(69b) $$f_y + f_z \frac{\partial z}{\partial y} + f_t \frac{\partial t}{\partial y} = 0.$$

Para calcular, a partir de las condiciones subsidiarias, las cuatro derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}$ que ocurren aquí, se pueden escribir las dos parejas de ecuaciones

(69c) $$\phi_x + \phi_z \frac{\partial z}{\partial x} + \phi_t \frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

(69d) $$\psi_x + \psi_z \frac{\partial z}{\partial x} + \psi_t \frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

y

(69e) $$\phi_y + \phi_z \frac{\partial z}{\partial y} + \phi_t \frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

(69f) $$\psi_y + \psi_z \frac{\partial z}{\partial y} + \psi_t \frac{\partial t}{\partial y} = 0$$

y resolverlas para las incógnitas $\partial z/\partial x, \ldots, \partial t/\partial y$; ésto es posible porque el jacobiano $d(\phi,\psi)/d(z,t)$ no se anula. Por tanto, el problema se resolvería.

En lugar de lo anterior preferimos conservar la simetría formal, procediendo como sigue. Se determinan dos números λ y μ de tal manera que las dos ecuaciones

(70a) $$f_z + \lambda\phi_z + \mu\psi_z = 0,$$

(70b) $$f_t + \lambda\phi_t + \mu\psi_t = 0$$

se satisfacen en el punto donde ocurre el valor extremo. Es posible la determinación de estos multiplicadores λ y μ, dado que se ha supuesto que el jacobiano $d(\phi,\psi)/d(z,t)$ es diferente de cero. Si se multiplican las ecuaciones (69c, d) por λ y μ, respectivamente, y se

suman a la ecuación (69a), se tiene

$$f_x + \lambda\phi_x + \mu\psi_x + (f_z + \lambda\phi_z + \mu\psi_z)\frac{\partial z}{\partial x} + (f_t + \lambda\phi_t + \mu\psi_t)\frac{\partial t}{\partial x} = 0.$$

De aquí que, por la definición (70a, b) de λ y μ,

$$f_x + \lambda\phi_x + \mu\psi_x = 0.$$

De modo semejante, si se multiplican las ecuaciones (69e, f) por λ y μ, respectivamente, y se les suma a la ecuación (69b), se obtiene la otra ecuación

$$f_y + \lambda\phi_y + \mu\psi_y = 0.$$

Así se llega al resultado siguiente: *si el punto (ξ, η, ζ, τ) es un extremo de $f(x, y, z, t)$ sujeto a las condiciones subsidiarias*

(71a) $$\phi(x, y, z, t) = 0,$$

(71b) $$\psi(x, y, z, t) = 0,$$

y si en ese punto $d(\phi,\psi)/d(z,t)$ no es cero, entonces existen los dos números λ y μ tales que, en el punto (ξ, η, ζ, τ) se satisfacen las ecuaciones

(72a) $$f_x + \lambda\phi_x + \mu\psi_x = 0,$$

(72b) $$f_y + \lambda\phi_y + \mu\psi_y = 0,$$

(72c) $$f_z + \lambda\phi_z + \mu\psi_z = 0,$$

(72d) $$f_t + \lambda\phi_t + \mu\psi_t = 0,$$

y las condiciones subsidiarias (71*a*, *b*).

Estas últimas condiciones son perfectamente simétricas. Ha desaparecido de ellas todo rastro de énfasis especial sobre las dos variables x y y, y pudieron haberse obtenido igualmente bien (72a, b, c, d) si, en lugar de suponer que $\partial(\phi, \psi)/\partial(z, t) \neq 0$, simplemente se hubiera supuesto que cualquiera de los jacobianos $\partial(\phi, \psi)/\partial(x, y)$, $\partial(\phi, \psi)/\partial(x, z)$, . . ., $\partial(\phi, \psi)/\partial(z, t)$ no se anulaba, de modo que, en la vecindad del punto en cuestión, una cierta pareja de las cantidades x, y, z, t (no necesariamente z y t) pudieran expresarse en términos de la otra pareja. Por supuesto, por esta simetría de las ecuaciones se ha pagado un precio; además de las incógnitas ξ, η, ζ, τ, ahora también

se tienen λ y μ. En lugar de cuatro incógnitas ahora se tienen seis, determinadas por las seis ecuaciones anteriores.

Exactamente de la misma manera, se puede enunciar y probar el método de los multiplicadores indeterminados para un número arbitrario de variables y un número arbitrario de condiciones subsidiarias. La regla general es como sigue:

Si en una función

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *no son independientes sino que están relacionadas por las m condiciones subsidiarias* $(m < n)$

$$\phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\phi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

entonces se introducen m multiplicadores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *y se igualan a 0 las derivadas de la función*

$$F = f + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \cdots + \lambda_m\phi_m$$

con respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *cuando* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *son constantes. Las ecuaciones*

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

así obtenidas[1], *junto con las m condiciones subsidiarias*

$$\phi_1 = 0, \ldots, \phi_m = 0,$$

representan un sistema de $m + n$ *ecuaciones para las* $m + n$ *cantidades desconocidas* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. *Estas ecuaciones deben ser satisfechas en cualquier punto extremo de f, a menos que todos los jacobianos de las m funciones* $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$ *con respecto a m de las variables* $x_1, \ldots, x_n$ *tengan el valor 0.*

Se observa que esta regla nos proporciona un elegante método formal para determinar los puntos donde ocurren los valores extremos; sin embargo simplemente constituye una condición necesaria. Aún faltan por investigar las circunstancias bajo las cuales los puntos que se encuentran por medio del método de los multi-

[1] Las cuales son idénticas a las correspondientes a un extremo "libre" de la función auxiliar *F*.

plicadores en realidad corresponden a un máximo o a un mínimo de la función. No consideraremos esta cuestión; su discusión nos llevaría muy lejos. Como en el caso de los valores extremos libres, cuando se aplica el método de los multiplicadores indeterminados normalmente se sabe de antemano que existe un extremo en el interior del dominio de f. Si el método determina el punto de manera única y no se presenta el caso excepcional (todos los jacobianos iguales a 0) en punto alguno de la región bajo consideración, entonces se puede tener la seguridad de que realmente se ha encontrado el punto en donde ocurre el valor extremo.

Ejercicios 3.7e

1. Interpretar geométricamente el problema de minimizar $u = f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $\phi(x, y, z) = 0$
2. Dar un ejemplo de un problema de la forma: extremizar $f(x, y, z)$ sujeta a las restricciones $\phi(x, y) = 0$, $\psi(y, z) = 0$. Interpretar ésto geométricamente.

f. Ejemplos

1. Como primer ejemplo, intentemos encontrar el máximo de la función $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$, sujeto a la condición subsidiaria $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$. Sobre la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, la función debe tomar un valor máximo, puesto que la superficie es un conjunto acotado y cerrado. De acuerdo con la regla, se forma la expresión

$$F = x^2y^2z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - c^2)$$

y, derivando, se obtiene

$$2xy^2z^2 + 2\lambda x = 0,$$

$$2x^2yz^2 + 2\lambda y = 0,$$

$$2x^2y^2z + 2\lambda z = 0.$$

Se pueden excluir las soluciones con $x = 0, y = 0$, ó $z = 0$, porque en estos puntos la función toma su menor valor: cero. Las otras soluciones de la ecuación son $x^2 = y^2 = z^2$, $\lambda = -x^4$. Usando la condición subsidiaria se obtienen los valores

$$x = \pm \frac{c}{\sqrt{3}}, \qquad y = \pm \frac{c}{\sqrt{3}}, \qquad z = \pm \frac{c}{\sqrt{3}}$$

para las coordenadas requeridas.

En todos estos puntos la función toma el mismo valor $c^6/27$, el cual, en consecuencia, es el máximo. De aquí que cualquier triada de números satisface la relación

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leqq \frac{c^2}{3} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3},$$

la cual afirma que *la media geométrica de los tres números no negativos* x^2, y^2, z^2 *nunca es mayor que su media aritmética.*

De modo sumejante se prueba, para un número arbitrario de reales positivos, que la media geométrica nunca es mayor que la media aritmética.[1]

2. Como un segundo ejemplo se tratará de encontrar el triángulo (de lados x, y, z) con perímetro dado $2s$ y la mayor área posible. Por la conocida fórmula de Herón, el cuadrado del área está dado por

$$f(x, y, z) = s(s - x)(s - y)(s - z).$$

Por lo tanto, se desea el máximo de esta función sujeta a la condición subsidiaria

$$\phi = x + y + z - 2s = 0,$$

donde x, y, z están restringidas por las desigualdades

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x + y \geqq z,\ x + z \geqq y,\ y + z \geqq x.$$

Sobre la frontera de esta región cerrada (es decir, donde una de estas desigualdades se convierte en una ecuación), siempre se tiene $f = 0$. Consecuentemente, el valor mayor de f ocurre en el interior y es un máximo. Se forma la función

$$F(x, y, z) = s(s - x)(s - y)(s - z) + \lambda(x + y + z - 2s),$$

y, derivando, se obtienen las tres condiciones

$$-s(s - y)(s - z) + \lambda = 0, \qquad -s(s - x)(s - z) + \lambda = 0,$$

$$-s(s - x)(s - y) + \lambda = 0.$$

[1]Para otra demostración, ver el Volumen I, Problema 13, p. 109, o el Problema 11, p. 318.

Igualando las tres expresiones se obtiene $x = y = z = 2s/3$; es decir, la solución es un triángulo equilátero.

3. A continuación se probará la desigualdad

$$uv \leqq \frac{1}{\alpha} u^{\alpha} + \frac{1}{\beta} v^{\beta} \tag{73a}$$

para toda $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ y toda $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tales que $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

Evidentemente, la desigualdad es válida si alguna de las cantidades u o v se anula. Por lo tanto, nos podemos restringir a los valores de u y v tales que $uv \neq 0$. Si la desigualdad se cumple para una pareja de números u, v, también se cumple para todos los números $ut^{1/\alpha}$, $vt^{1/\beta}$ donde t es un número positivo arbitrario. Por lo tanto, sólo es necesario considerar los valores de u, v para los cuales $uv = 1$. De aquí que se tiene que demostrar que la desigualdad

$$\frac{1}{\alpha} u^{\alpha} + \frac{1}{\beta} v^{\beta} \geqq 1$$

se cumple para todos los números positivos u, v tales que $uv = 1$.

Para hacerlo, se resuelve el problema de encontrar el mínimo de

$$\frac{1}{\alpha} u^{\alpha} + \frac{1}{\beta} v^{\beta}$$

sujeto a la condición subsidiaria $uv = 1$. Obviamente, este mínimo existe y ocurre en un punto (u, v), donde $u \neq 0$, $v \neq 0$. Como consecuencia, existe un multiplicador $-\lambda$ para el cual se tiene

$$u^{\alpha-1} - \lambda v = 0 \qquad \text{y} \qquad v^{\beta-1} - \lambda u = 0.$$

Multiplicando por u y v, respectivamente, estas ecuaciones dan inmediatamente $u^{\alpha} = \lambda$, $v^{\beta} = \lambda$. Tomados con $uv = 1$, los últimos resultados implican que $u = v = 1$. Por lo tanto, el valor mínimo de

$$\frac{1}{\alpha} u^{\alpha} + \frac{1}{\beta} v^{\beta}$$

es $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Es decir, queda demostrada la proposición de que

$$\frac{1}{\alpha} u^{\alpha} + \frac{1}{\beta} v^{\beta} \geqq 1$$

cuando $uv = 1$.

Si en la desigualdad (73a) se remplazan u y v por

$$u = u_i/\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^\alpha\right)^{1/\alpha} \qquad \text{y} \qquad v = v_i/\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^\beta\right)^{1/\beta},$$

respectivamente, donde $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n$ son números no negativos arbitrarios y por lo menos un u y un v no son cero, y si se suma sobre $i = 1, \ldots, n$, se obtiene la *desigualdad de Hölder:*

$$\text{(73b)} \qquad \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^\alpha\right)^{1/\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^\beta\right)^{1/\beta}.$$

Esta se cumple para cualesquiera $2n$ números u_i, v_i donde $u_i \geqq 0$, $v_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; no todos los u ni todos los v son cero; y los índices α, β son tales que $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$. La desigualdad de Cauchy-Schwarz es el caso especial $\alpha = \beta = 2$ de la desigualdad de Hölder.

4. Finalmente, busquemos el punto sobre la superficie cerrada

$$\phi(x, y, z) = 0$$

que se encuentre a la distancia mínima del punto fijo (ξ, η, ζ). Si la distancia es un mínimo su cuadrado también es un mínimo; en consecuencia, considérese la función

$$F(x, y, z) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 + \lambda\phi(x, y, z).$$

Derivando se obtienen las condiciones

$$2(x - \xi) + \lambda\phi_x = 0, \quad 2(y - \eta) + \lambda\phi_y = 0, \quad 2(z - \zeta) + \lambda\phi_z = 0,$$

o, en otra forma,

$$\frac{x - \xi}{\phi_x} = \frac{y - \eta}{\phi_y} = \frac{z - \zeta}{\phi_z}.$$

Estas ecuaciones afirman que el punto fijo (ξ, η, ζ) se encuentra sobre la normal a la superficie en el punto (x, y, z) correspondiente a la distancia extrema. Por lo tanto, para ir a lo largo de la trayectoria más corta desde un punto hasta una superficie (diferenciable), el movimiento debe ser en una dirección normal a la superficie. Por supuesto, se requiere una discusión adicional para decidir si se ha encontrado un máximo o un mínimo, o ninguno de los dos. Considérese, por ejemplo un punto dentro de una superficie esférica. Los

puntos a la distancia extrema están en los extremos del diámetro que pasa por el punto dado; la distancia a uno de estos puntos es un mínimo, la distancia al otro es un máximo.

Ejercicios 3.7f

1. Encontrar la distancia más corta entre el plano $Ax + By + Cz = D$ y el punto (a, b, c).

Encontrar las distancias mayor y menor desde un punto sobre la elipse $x^2/4 + y^2/1 = 1$ a la recta $x + y - 4 = 0$.

3. Demostrar que el valor máximo de la expresión

$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{ex^2 + 2fxy + gy^2} \qquad (eg - f^2 > 0)$$

es igual a la mayor de las raíces de la ecuación en λ:

$$(ac - b^2) - \lambda(ag - 2bf + ec) + \lambda^2(eg - f^2) = 0.$$

4. Calcular los valores máximos de las expresiones siguientes:

(a) $\dfrac{x^2 + 6xy + 3y^2}{x^2 - xy + y^2}$

(b) $\dfrac{x^4 + 2x^3y}{x^4 + y^4}$.

5. Encontrar los valores de a y b para la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ de menor área que contenga al círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ en su interior.
6. ¿Cuál punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ está a la mayor distancia del punto $(1, 2, 3)$?
7. Hallar el punto (x, y, z) del elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ para el cual

   (a) $A + B + C$

   (b) $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$,

   es un mínimo, donde A, B, C denotan las intersecciones del plano tangente en (x, y, z), donde $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, con los ejes coordenados.
8. Hallar el paralelepípedo rectangular de mayor volumen inscrito en el elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.
9. Encontrar el rectángulo de perímetro máximo inscrito en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
10. Hallar el punto de la elipse $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ para el cual la tangente se encuentra a la distancia máxima del origen.
11. Probar que la longitud l del eje mayor del elipsoide

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 1$$

está dada por la mayor raíz real de la ecuación

$$\begin{vmatrix} a-\frac{1}{l^2} & d & e \\ d & b-\frac{1}{l^2} & f \\ e & f & c-\frac{1}{l^2} \end{vmatrix}$$

12. (a) Maximizar $x^a y^b z^c$, donde a, b, c son constantes positivas, sujeta a la condición $x^k + y^k + z^k = 1$, donde x, y, z son no negativos y $k > 0$.
    (b) A partir del resultado de la parte (a) deducir la siguiente desigualdad para cualesquiera seis números reales positivos:

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a \left(\frac{v}{b}\right)^b \left(\frac{w}{c}\right)^c \leqq \left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}$$

13. Sea $P_1P_2P_3P_4$ un cuadrilátero convexo. Encontrar el punto O para el cual la suma de las distancias a P_1, P_2, P_3, P_4 es un mínimo.
14. Encontrar el cuadrilátero con lados a, b, c, d dados que encierre el área máxima.

Apéndice

A.1 Condiciones suficientes para los valores extremos

En la teoría de los máximos y mínimos del capítulo precedente nos contentamos con encontrar las condiciones necesarias para la ocurrencia de un valor extremo. En muchos casos que se presentan en la práctica, puede determinarse la naturaleza del punto "estacionario" así encontrado a partir de la naturaleza especial del problema, que nos permite decidir si se trata de un máximo o de un mínimo. Sin embargo, es importante tener condiciones generales *suficientes* para la ocurrencia de extremos relativos. Aquí se desarrollarán esos criterios para el caso típico de dos variables independientes.

Si se considera un punto (x_0, y_0) en el cual la función es estacionaria, es decir, un punto en el cual ambas derivadas parciales de la función se anulan, ocurre un valor extremo si y sólo si la expresión

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

tiene el mismo signo para todos los valores lo suficientemente pequeños de h y k. Si se desarrolla esta expresión por el teorema de Taylor, con residuo de tercer orden, y se aplican las ecuaciones $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$, se obtiene

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}) + \varepsilon\rho^2,$$

donde $\rho^2 = h^2 + k^2$ y ε tiende a cero con ρ.

Esto sugiere que, en una vecindad lo suficientemente pequeña del punto (x_0, y_0), el comportamiento de la diferencia funcional $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ está determinado esencialmente por la expresión

$$Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2,$$

donde, por brevedad, se ha puesto

$$a = f_{xx}(x_0, y_0), \quad b = f_{xy}(x_0, y_0), \quad c = f_{yy}(x_0, y_0).$$

Para estudiar el problema de los valores extremos se debe investigar esta expresión cuadrática homogénea o forma cuadrática Q en h y k. Se supondrá que los coeficientes a, b, c no se anulan todos. En el caso excepcional en que todos se anulan, el cual no consideraremos, se debe empezar con una serie de Taylor que se extienda hasta términos de orden superior.

En relación con la forma cuadrática Q, existen tres casos diferentes posibles:

1. La forma es *definida*. Es decir, cuando h y k toman todos sus valores Q toma valores de un solo signo y sólo se anula para $h = 0$, $k = 0$. Se dice que la forma es *definida positiva*, o bien, *definida negativa* según este signo sea positivo o negativo. Por ejemplo, la expresión $h^2 + k^2$, la cual se obtiene cuando $a = c = 1$, $b = 0$, es definida positiva, mientras que la expresión $-h^2 + 2hk - 2k^2 = -(h - k)^2 - k^2$ es definida negativa.

2. La forma es *indefinida*. Es decir, puede tomar valores de signo diferente; por ejemplo, la forma $Q = 2hk$, la cual tiene el valor 2 para $h = 1, k = 1$ y el valor -2 para $h = -1$, $k = 1$.

3. La tercera posibilidad es que la forma se anule para valores de h, k que no sean $h = 0$, $k = 0$, pero en caso contrario tome valores de un solo signo; por ejemplo, la forma $(h + k)^2$, que se anula para todas las parejas de valores h, k tales que $h = -k$. Tales formas se llaman *semidefinidas*.

La forma cuadrática $Q = ah^2 + 2bhk + ck^2$ es definida si y sólo si su *discriminante* $ac - b^2$ satisface la condición

$$ac - b^2 > 0;$$

entonces es definida positiva si $a > 0$ (de modo que también $c > 0$); de lo contrario, es definida negativa.

Para que la forma sea indefinida es necesario y suficiente que

$$ac - b^2 < 0,$$

mientras que el caso semidefinido se caracteriza por la ecuación[1]

$$ac - b^2 = 0.$$

Ahora se probarán las proposiciónes siguientes. Si la forma cuadrática $Q(h, k)$ es definida positiva, el valor estacionario que toma para $h = 0$, $k = 0$ es un mínimo relativo incluso un mínimo relativo *estricto*). Si la forma es definida negativa, el valor estacionario es un *máximo* relativo. Si la forma es indefinida no se tiene máximo ni mínimo; el punto es un *punto silla de montar*. De donde, el carácter definido de la forma Q es una condición suficiente para un valor extremo, mientras que el carácter indefinido de Q excluye la posibilidad de un valor extremo. No se considerará el caso semidefinido, el cual conduce a discusiones complicadas.

Con el fin de probar la primera proposición, se observa que si Q es una forma definida positiva, existe un número positivo m independiente de h y k tal que[2]

$$Q \geqq 2m(h^2 + k^2) = 2m\rho^2.$$

Por lo tanto,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} Q(h, k) + \varepsilon\rho^2 \geqq (m + \varepsilon)\rho^2.$$

---

[1] Estas condiciones se obtienen fácilmente como sigue. $a = 0$, o bien $c = 0$, en cuyo caso se debe tener $b \neq 0$ y la forma es, como ya se hizo notar, indefinida; por lo tanto, el criterio se cumple para este caso; de lo contrario, debe tenerse, digamos, $a \neq 0$. se puede escribir

$$ah^2 + 2bhk + ck^2 = a\left[\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{ca - b^2}{a^2}k^2\right].$$

Obviamente, esta forma es definida si $ca - b^2 > 0$, y entonces tiene el mismo signo que a. Es semidefinida si $ca - b^2 = 0$, porque entonces se anula para todos los valores de h, k que satisfagan la ecuación $h/k = -b/a$, pero para todos los demás valores tiene el mismo signo. Es indefinida si $ca - b^2 < 0$, porque entonces toma valores de signo diferente cuando k se anula y cuando $h + (b/a)k$ se anula.

[2] Para observar ésto considérese el cociente $Q(h, k)/(h^2 + k^2)$ como una función de las dos cantidades $u = h/\sqrt{h^2 + k^2}$ y $v = k/\sqrt{h^2 + k^2}$. Entonces $u^2 + v^2 = 1$, y la forma se convierte en una función continua de u y v, la cual debe tener un valor mínimo $2m$ sobre el círculo $u^2 + v^2 = 1$. Obviamente, este valor satisface las condiciones dadas; no es cero, porque u y v nunca se anulan simultáneamente sobre el círculo.

Si ahora se elige ρ tan pequeño que el número ε sea menor en valor absoluto que $\frac{1}{2}m$, obviamente se tiene

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \geqq \frac{m}{2} \rho^2 > 0.$$

De donde, para esta vecindad del punto (x_0, y_0) el valor de la función en todo punto es mayor que $f(x_0, y_0)$, excepto, por supuesto, en el propio (x_0, y_0). De la misma manera, cuando la forma es definida negativa, el punto es un máximo.

Por último, si la forma es indefinida existe un par de valores (h_1, k_1) para los cuales Q es negativa y otra pareja (h_2, k_2) para los cuales Q es positiva. Por lo tanto, se puede encontrar un número positivo m tal que

$$Q(h_1, k_1) < -2m\rho_1^2,$$

$$Q(h_2, k_2) > 2m\rho_2^2.$$

Si ahora se pone $h = th_1$, $k = tk_1$, $\rho^2 = h^2 + k^2$, $(t \neq 0)$ — es decir, si se considera un punto $(x_0 + h, y_0 + k)$ sobre la recta que une a (x_0, y_0) con $(x_0 + h_1, y_0 + k_1)$— entonces, a partir de $Q(h, k) = t^2Q(h_1, k_1)$ y $\rho^2 = t^2\rho_1^2$, se tiene

$$Q(h, k) < -2m\rho^2.$$

De donde, eligiendo una t lo suficientemente pequeña (y la ρ correspondiente), la expresión $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ puede hacerse negativa. Sólo es necesario elegir t tan pequeña que, para $h = th_1$, $k = tk_1$, el valor absoluto de la cantidad ε sea menor que $\frac{1}{2}m$. Para tal conjunto de valores se tiene $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) < -m\rho^2/2$, de modo que el valor $f(x_0 + h, y_0 + k)$ es menor que el valor estacionario $f(x_0, y_0)$. De la misma manera, llevando a cabo el proceso correspondiente para el sistema $h = th_2$, $k = tk_2$, se encuentra que en una vecindad arbitrariamente pequeña de (x_0, y_0) existen puntos en los que el valor de la función es mayor que $f(x_0, y_0)$. Así, no se tiene máximo ni mínimo sino que, en lugar de ello, se tiene lo que se conoce como un valor silla.

Si $a = b = c = 0$ en el punto estacionario, la forma cuadrática se anula idénticamente, y en el caso semidefinido esta discusión no se puede aplicar. Obtener condiciones suficientes para estos casos conduciría a conclusiones complicadas.

Así, se tiene la regla siguiente para distinguir máximos y mínimos: *En un punto* (x_0, y_0) *donde las derivadas parciales se anulan,*

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0,$$

y la desigualdad

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

se cumple, la función f *tiene un valor extremo relativo. Este es un máximo relativo si* $f_{xx} < 0$ *(y, consecuentemente,* $f_{yy} < 0$*), y un mínimo relativo si* $f_{xx} > 0$. *Si, por otra parte,*

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0,$$

el valor estacionario no es máximo ni mínimo. El caso

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$$

queda indeciso.

Estas condiciones tienen una interpretación geométrica sencilla. Las condiciones necesarias $f_x = f_y = 0$ afirman que el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ es horizontal. Si en realidad se tiene un valor extremo, entonces en la vecindad del punto en cuestión el plano tangente no se intersecta con la superficie. En el caso de un punto silla, por el contrario, el plano corta a la superficie en una curva que tiene varias ramas en el punto. Esto quedará claro después de la discusión de los puntos singulares en la Sección A.3.

Como ejemplo, busquemos los valores extremos de la función

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + ax + by.$$

Si se igualan las primeras derivadas a 0, se obtienen las ecuaciones

$$2x + y + a = 0, \quad x + 2y + b = 0,$$

las cuales tienen la solución $x = \frac{1}{3}(b - 2a), y = \frac{1}{3}(a - 2b)$. La expresión

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 3$$

es positiva, como también lo es $f_{xx} = 2$. Por lo tanto, la función tiene un mínimo en el punto en cuestión.

La función

$$f(x, y) = (y - x^2)^2 + x^5$$

tiene un punto estacionario en el origen. Allí, la expresión $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ se anula y el criterio falla. Sin embargo, se ve fácilmente que la función no tiene un valor extremo allí porque en la vecindad del origen la función toma tanto valores positivos como negativos.

Por otra parte, la función

$$f(x, y) = (x - y)^4 + (y - 1)^4$$

tiene un mínimo en el punto $x = 1$, $y = 1$, aunque la expresión $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ se anula allí. Porque

$$f(1 + h, 1 + k) - f(1, 1) = (h - k)^4 + k^4,$$

y esta cantidad es positiva cuando $\rho \neq 0$.

Ejercicios A.1

1. Encontrar y caracterizar los valores extremos de las funciones:
   (a) $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$
   (b) $f(x, y) = \cos(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) + x^2$
   (c) $f(x, y) = x \cosh y - y^2$.

2. Si $\phi(a) = k \neq 0$, $\phi'(a) \neq 0$, y x, y, z satisfacen la relación $\phi(x)\phi(y)\phi(z) = k^3$, probar que la función $f(x) + f(y) + f(z)$ tiene un máximo cuando $x = y = z = a$, siempre que
$$f'(a)\left(\frac{\phi''(a)}{\phi'(a)} - \frac{\phi'(a)}{\phi(a)}\right) > f''(a).$$

3. Sea $P_1P_2P_3$ un triángulo plano con sus tres ángulos menores que 120°. Probar, por medio del criterio de la p. 402, o bien, del Ejercicio 6 que sigue, que en el punto P interior a $P_1P_2P_3$ tal que $\angle P_2PP_3 = \angle P_3PP_1 = \angle P_1PP_2 = 120°$, la suma $PP_1 + PP_2 + PP_3$ es realmente un mínimo (ver el Ejemplo 3, p. 380).
4. ¿Dónde ocurre el mínimo de la suma $PP_1 + PP_2 + PP_3$ si en el triángulo del ejercicio 3 el ángulo $P_2P_1P_3$ es mayor que, o igual a, 120°?
5. (a) Probar que, si todos los simbolos denotan cantidades positivas, el valor estacionario de $lx + my + nz$ sujeto a la condición $x^p + y^p + z^p = c^p$ es $c(l^q + m^q + n^q)^{1/q}$, donde $q = p/(p - 1)$.
   (b) Demostrar que el valor es un máximo o un mínimo según que $p \gtrless 1$.
6. Generalizar la investigación de la Sección A.1 a funciones de n variables, probando los resultados siguientes. Sea $f(x_1, \ldots, x_n)$ continuamen-

te diferenciable por tres veces en la vecindad de un punto estacionario $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$, es decir, un punto donde $f_{x_1} = f_{x_2} = f_{x_n} = 0$. Considérese la segunda diferencial total de f en el punto x^0, $d^2f^0 = \sum_{i,k=1}^{n} f_{x_ix_k}{}^0\, dx_i\, dx_k$; ésta es una forma cuadrática en las variables $dx_1, \ldots, dx_n$. Si esta forma cuadrática es no degenerada, es decir, si

$$D = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}{}^0 & \cdots & f_{x_1x_n}{}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}{}^0 & \cdots & f_{x_nx_n}{}^0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces d^2f^0 puede ser (1) definida positiva, (2) definida negativa o (3) indefinida. Probar que estos casos posibles corresponden respectivamente a las siguientes propiedades de f en el punto x^0: (1) f tiene un mínimo, (2) tiene un máximo, (3) f no tiene mínimo ni máximo.

7. Investigar los puntos estacionarios de $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, donde las variables satisfacen las relaciones

$$(1) \qquad \phi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \phi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (m < n);$$

se puede suponer que se han encontrado valores numéricos para las variables y los multiplicadores λ_μ tales que $F = f + \lambda_1\phi_1 + \cdots + \lambda_m\phi_m$ satisface las ecuaciones

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0,$$

y tales que el jacobiano de $\phi_1, \ldots, \phi_m$ con respecto a las variables $x_1, \ldots, x_m$ no es 0. Para aplicar el criterio del Ejercicio 6 se puede proceder como sigue: considerando a $x_{m+1}, \ldots, x_n$ como las variables independientes, al derivar (1) se pueden obtener las primeras y segundas diferenciales de $x_1 \ldots, x_m$ como funciones de $x_{m+1}, \ldots, x_n$ y, finalmente, introducir estos valores en

$$(3) \qquad d^2f = \sum_{i,k=1}^{n} f_{x_ix_k}\, dx_i\, dx_k + f_{x_1}\, d^2x_1 + \cdots + f_{x_m}\, d^2x_m.$$

Probar la segunda regla que sigue, que no comprende el cálculo de las segundas diferenciales $d^2x_1, \ldots, d^2x_m$: considerando a $x_1, \ldots, x_n$ como variables independientes, tómese

$$d^2F = \sum F_{x_ix_k}\, dx_i\, dx_k = d^2f + \lambda_1 d^2\phi_1 + \cdots + \lambda_m\, d^2\phi_m;$$

calcúlense $dx_1, \ldots, dx_m$ a partir de las ecuaciones

$$d\phi_\mu = \phi_{\mu x_1}\, dx_1 + \cdots + \phi_{\mu x_n}\, dx_n = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

e introdúzcanse estos valores en d^2F, obteniéndose así una forma cuadrática $\delta^2 F$ en las variables $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$. Si esta forma cuadrática es no degenerada, entonces f tiene, respectivamente, un mínimo, un

máximo o ninguno de éstos, según que d^2f sea definida positiva, definida negativa o indefinida.

8. En el problema de encontrar el máximo de $f = x_1 x_2 \cdots x_n$ sujeto a la condición $\phi = x_1 + x_2 + \cdots + x_n - a = 0$ $(a > 0)$, la regla de los multiplicadores indeterminados da un valor estacionario de f en el punto $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = a/n$. Aplicar la regla del Ejercicio 7, en lugar de la consideración del máximo absoluto, para demostrar que f tiene un valor máximo en este punto.
9. Aplicar el criterio del Ejercicio 7 para probar que entre todos los triángulos de perímetro constante el triángulo equilátero tiene el área máxima (ver la p. 394).

A.2 Números de puntos críticos relacionados con los índices de un campo vectorial

Evidentemente, por el teorema fundamental (ver la p. 144), una función continua $f(x, y)$ definida en un conjunto R cerrado y acotado tiene un punto máximo y un punto mínimo en R. Si un punto máximo o mínimo (x_0, y_0) es un punto interior de R y si f es diferenciable en (x_0, y_0), entonces (x_0, y_0) es un punto crítico de f. En algunos casos esta observación nos permite deducir la existencia de al menos un punto crítico de f. Por ejemplo, si el conjunto R consiste de un conjunto S abierto y acotado y su frontera B, y si f es constante sobre B y diferenciable en S, entonces f tiene al menos un punto crítico en S. Esta es precisamente una extensión del *teorema de Rolle* (ver el Volumen I, p. 175) a funciones de varias variables, y se prueba en la misma forma: la función f tiene puntos máximos y mínimos. Si todos éstos se encuentran sobre la frontera B, donde f es constante, entonces los valores máximo y mínimo de f coinciden; entonces f también es constante en S y todo punto de S es crítico. De aquí que, por lo menos, existe un punto crítico de f en S.

En el caso de funciones de una sola variable independiente se cuenta con más información acerca del número de puntos críticos de un cierto tipo. Los máximos y mínimos relativos *se alternan* (ver el Volumen I, p. 239). De aquí que, cuando más, los números totales de máximos y de mínimos relativos de una función en un intervalo difieren en 1. Esto no es cierto para las funciones de dos variables definidas en un conjunto R del plano. No obstante, existe una relación (intuitivamente menos obvia) entre los números totales de extremos relativos y de puntos silla en el interior de R y los valores de f sobre la frontera de R. Con el fin de plantear esta relación, primero tiene que considerarse el *campo del gradiente* de f e introducir la

noción de índice de una curva cerrada con respecto a un campo vectorial.

Supóngase que f es continua y que tiene primeras derivadas continuas en el conjunto R del plano x, y. Entonces, en cada punto de R, f determina las dos cantidades

$$u = f_x(x, y), \quad v = f_y(x, y). \tag{74}$$

Estas se pueden interpretar como las componentes de un cierto vector, el *gradiente* de f. Los gradientes en los diversos puntos de R forman un *campo vectorial.* Los puntos críticos de R son aquellos en donde el gradiente se anula. En todos los demás puntos el vector gradiente tiene una dirección determinada de modo único, descrita, por ejemplo, por sus *cosenos directores*

$$\xi = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \text{y} \quad \eta = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

(ver el Volumen I, p. 383). Evidentemente, ξ y η son funciones continuas de (x, y) en todo punto no crítico de R. Puede ponerse

$$\xi = \cos\theta, \quad \eta = \operatorname{sen}\theta,$$

donde, sin embargo, el ángulo θ — la *inclinación* del vector (u, v)— sólo está determinado hasta múltiplos enteros de 2π. En general, no es posible seleccionar un valor definido para θ que varíe continuamente con (x, y). Por otra parte, la diferencial

$$\begin{aligned} d\theta &= d \arctan\frac{v}{u} = \frac{u\,dv - v\,du}{u^2 + v^2} \\ &= \frac{(uv_x - vu_x)dx + (uv_y - vu_y)dy}{u^2 + v^2} \end{aligned} \tag{75}$$

está definida sin ambigüedad para todo punto no crítico (x, y) de R.

Sea ahora C una curva cerrada orientada que se encuentra en R y no pasa por punto crítico alguno de f. Se define el *índice de Poincaré* de C con respecto al campo vectorial, como el número

$$I_C = \frac{1}{2\pi}\int_C d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{u\,dv - v\,du}{u^2 + v^2}. \tag{76}$$

Si C está dada paramétricamente por

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (a \leqq t \leqq b),$$

donde ϕ y ψ tienen los mismos valores en los dos puntos extremos del intervalor de t y donde la orientación de C corresponde al sentido de la t creciente, entonces el índice de C está dado por la integral

$$I_C = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \left(\frac{u}{u^2 + v^2} \frac{dv}{dt} - \frac{v}{u^2 + v^2} \frac{du}{dt} \right) dt.$$

Como después de recorrer la curva C se regresa al mismo punto (x, y), los valores para θ correspondientes a $t = a$ y $t = b$ sólo pueden diferir en un múltiplo de 2π. De aquí que I_C siempre es un entero. Este entero cuenta el número total de rotaciones en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj llevadas a cabo por el vector (u, v) a medida que se recorre la curva c en el sentido indicado por su orientación.[1] Por supuesto, I_C cambia de signo cuando se cambia la orientación de C. Como ejemplo considérese la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Aquí, el gradiente

$$(u, v) = (2x, 2y)$$

en cualquier punto (x, y) tiene la dirección del radio vector que emana del origen. Supóngase que se usa un sistema coordenado derecho. Para una curva cerrada C que no pasa por el origen, el índice

$$I_C = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

mide el número total de vueltas en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj realizadas por el radio que parte del origen, al recorrer toda la curva C. Esta es exactamente la fórmula, deducida en el Volumen I (p. 434), para el número de veces que la curva C rodea el origen.

Generalmente, en los puntos donde u y v no se anulan simultáneamente la diferencial $d\theta$ de la ecuación (75) satisface la condición de integrabilidad

[1]Para la definición de "índice" no es necesario que el campo vectorial sea el campo de un gradiente.

$$\left(\frac{uv_x - vu_x}{u^2 + v^2}\right)_y = \left(\frac{uv_y - vu_y}{u^2 + v^2}\right)_x,$$

la cual puede verificarse directamente y, por supuesto, sólo refleja la relación

$$\left[\left(\text{arc tan}\,\frac{v}{u}\right)_x\right]_y = \left[\left(\text{arc tan}\,\frac{v}{u}\right)_y\right]_x,$$

la cual se cumple sin importar la posible multiformidad de la función arc tan (v/u). *Por el teorema fundamental acerca de las integrales de línea* (ver la p. 135 y la p. 127), *se concluye que* $I_C = 0$ *si* C *es la frontera de un subconjunto simplemente conexo de* R *que no contiene puntos críticos de* f.

De modo más general, considérese un conjunto R múltiplemente conexo con un cierto número de curvas frontera cerradas $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Supóngase que el sistema coordenado x, y es derecho, como se acostumbra. Asimismo, que cada C_i está orientada de tal manera que al recorrerla en el sentido correspondiente a su orientación R queda a la izquierda. Supóngase que R puede dividirse en los conjuntos simplemente conexos R_k, por medio de arcos auxiliares apropiados que unan a las diversas C_i (ver la Fig. 3.31). Considérese que f no tiene puntos críticos en R. Entonces,

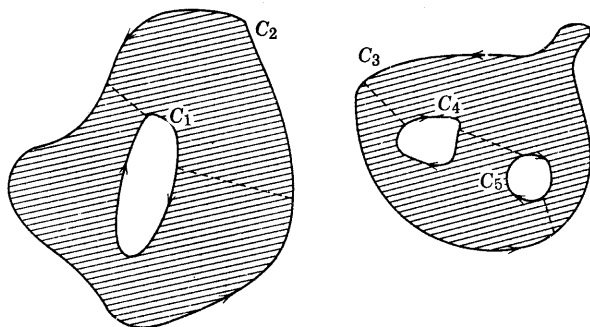


Figura 3.31 Región múltiplemente conexa con curvas frontera C_i, orientadas positivamente, dividida en conjuntos simplemente conexos.

$$\int d\theta = 0$$

cuando se extiende sobre la frontera de cualquiera de los R_k recorrida en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Formando la suma de las integrales sobre las fronteras de todos los R_k, se ve que las contribuciones de los arcos auxiliares se cancelan (ver la p. 124) y se encuentra que

$$0 = \sum_i \int_{C_i} d\theta.$$

Empero, ésto significa que

(77) $$\sum_{i=1} I_{C_i} = 0$$

si las C_i son curvas cerradas que forman la frontera de un conjunto R libre de puntos críticos de f, y con un sentido de orientación que deja a R a la izquierda.

Como consecuencia se obtiene el teorema: *existe al menos un punto crítico en R, siempre que la suma de los índices de las curvas frontera de R (orientadas como se explicó) sea diferente de cero.*

Se obtiene una información más precisa acerca del número de puntos críticos en R, si se supone que f tiene segundas derivadas continuas en R, que f tiene sólo un número finito de puntos críticos $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$, y que, en cada punto crítico, el discriminante

$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

no se anula. Entonces todos los puntos críticos son máximos o mínimos relativos correspondientes a $D > 0$, o bien, puntos silla correspondientes a $D < 0$ (ver la p. 402). Supóngase que R nuevamente está limitado por las curvas simples cerradas y orientadas $C_1, \ldots, C_n$ que no pasan por ninguno de los puntos críticos de f. Puede cortarse una pequeña vecindad de cada punto crítico (x_k, y_k), limitada por una curva γ_k. Queda un conjunto limitado por las curvas $C_1, \ldots, C_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_N$ que no contiene puntos críticos de f. Dando a cada γ_k la orientación contraria al movimiento de las manecillas del reloj, por (77) se tiene

(78) $$\sum_{i=1}^{n} I_{C_i} - \sum_{k=1}^{N} I_{\gamma_k} = 0.$$

Ahora bien, el índice de una de las curvas γ_k que limita a un conjunto que contiene a un solo punto crítico (x_k, y_k) depende precisamente del *tipo* de ese punto, como se demostrará.

Sea γ_k un pequeño círculo

$$x = x_k + r\cos t, \quad y = y_k + r\,\text{sen}\, t$$

de radio r y centro en el punto crítico (x_k, y_k). Por el teorema de Taylor, sobre γ_k se tiene

(79a) $$u = f_x(x, y) = (x - x_k)f_{xx}(x_k, y_k) + (y - y_k)f_{xy}(x_k, y_k) + \cdots$$
$$= r(a\cos t + b\,\text{sen} t) + O(r^2)$$

(79b) $$v = f_y(x, y) = (x - x_k)f_{xy}(x_k, y_k) + (y - y_k)f_{yy}(x_k, y_k) + \cdots$$
$$= r(b\cos t + c\,\text{sen}\, t) + O(r^2),$$

donde se puso

$$a = f_{xx}(x_k, y_k), \quad b = f_{xy}(x_k, y_k), \quad c = f_{yy}(x_k, y_k).$$

Para averiguar cuántas veces el vector (u, v) gira en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj a medida que t varía desde 0 hasta 2π), se observa que el punto en el plano con coordenadas (u, v) (es decir, el punto cuyo vector de posición tiene las componentes u, v) describe aproximadamente la elipse E con representación paramétrica

(80) $$u = r(a\cos t + b\,\text{sen}\, t), \quad v = r(b\cos t + c\,\text{sen} t).$$

Esta elipse tiene su centro en el origen y la ecuación no paramétrica

$$(cu - bv)^2 + (av - bu)^2 = r^2(ac - b^2)^2.$$

Es evidente que el punto (u, v) describe la elipse E dada en (80) exactamente una vez, conforme t crece desde 0 hasta 2π, de modo que el índice de γ_k sin duda es $+1$, o bien, -1, dependiendo del sentido, contrario o en el mismo del movimiento de las manecillas del reloj, de E correspondiente a la t creciente. Ahora bien, la aplicación lineal

$$u = r(au + bv), \quad v = r(bu + cv)$$

evidentemente lleva al círculo

$$u = \cos t, \quad v = \text{sen}\, t$$

del plano u, v(donde el crecimiento de t corresponde al sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj sobre el círculo) hacia E. Dado que el sentido de las curvas se conserva o se invierte, de

acuerdo con el signo del jacobiano $r^2(ac - b^2)$ de la aplicación (ver la p. 307), se ve que

$$\begin{aligned} I_{\gamma_k} &= \operatorname{sgn}(ac - b^2) = \operatorname{sgn}[f_{xx}(x_k, y_k)f_{yy}(x_k, y_k) - f_{xy}{}^2(x_k, y_k)] \\ &= \operatorname{sgn} D(x_k, y_k).^1 \end{aligned}$$

De (78) se deduce que

$$\sum_{i=1}^{n} I_{C_i} = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{sgn} D(x_k, y_k).$$

Como se observó con anterioridad, sgn $D(x_k, y_k) = +1$ cuando el punto crítico (x_k, y_k) es un máximo o un mínimo relativo, y sgn $D(x_k,y_k) = -1$, cuando es un punto silla. Denotemos por M_0, M_1, M_2, respectivamente, los números de mínimos, de puntos silla y de máximos en R. El resultado obtenido se convierte en la *identidad de Poincaré*.[1]

$$\sum_{i=1}^{N} I_{C_i} = M_0 - M_1 + M_2. \tag{81}$$

En palabras, *el exceso del número de máximos y mínimos relativos de f en R sobre el número de puntos silla es igual a la suma de los índices de las curvas frontera de R con respecto al campo del gradiente de f, donde cada curva frontera está orientada de modo que R quede a la izquierda.*

El resultado es particularmente sencillo cuando f es constante a lo largo de cada curva frontera C_i de R. Entonces el vector gradiente de f es perpendicualr a C (ver la p. 279) y tiene la dirección de la normal exterior o interior de C_i. Si no se tiene punto crítico alguno de f sobre C_i y ésta es una curva suave simple cerrada, la dirección del gradiente varía continuamente y no puede saltar en punto al-

---

[1]Se puede obtener el mismo resultado analíticamente, observando que, por las fórmulas (79a, b),

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0} I_{\gamma_k} &= \lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k} \frac{u\,dv - v\,du}{u^2 + v^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ac - b^2}{(a\cos t + b \operatorname{sen} t)^2 + (b \cos t + c \operatorname{sen} t)^2}\,dt. \end{aligned}$$

La integral se puede evaluar explícitamente (ver el Volumen I, p. 294) y tiene el valor 2π sgn $(ac - b^2)$.

[1]Las fórmulas correspondientes para las funciones de más de dos variables independientes son las de M. Morse.

guno de C_i desde la dirección de la normal exterior hacia la de la normal interior o viceversa. Es evidente entonces que el vector gradiente gira exactamente una vez a lo largo de C_i y en el mismo sentido que el vector tangente a C_i, con el cual el gradiente forma un ángulo fijo. De donde, $I_{C_i} = +1$ cuando C_i tiene el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, y -1 cuando el sentido es el mismo. Fácilmente se ve que con la convención tomada acerca de la orientación de las curvas frontera de R, una curva frontera C_i tiene la orientación del sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj cuando forma la frontera "externa" de una de las partes no conexas que constituyen a R, y tiene orientación en el sentido de ese movimiento si limita a uno de los "hoyos" en R (ver la Fig. 3.31). Se concluye que, para f constante sobre las curvas frontera,

$$M_0 - M_1 + M_2 = N_0 - N_1, \tag{82}$$

donde N_0 es el número de componentes conexas de R y N_1 es el número total de hoyos en R (la "conectividad" de R).

Tómese, por ejemplo, el caso en donde R es un disco circular. Aquí, $N_0 = 1, N_1 = 0$, y, por tanto, para f constante sobre la frontera,

$$M_0 - M_1 + M_2 = 1.$$

Aquí se encuentra que *el número total de puntos críticos en el interior de R es*

$$M_0 + M_1 + M_2 = 1 + 2M_1$$

y de aquí que, evidentemente, es un número impar. Es más, si el número $M_0 + M_2$ de extremos relativos de f es mayor que 1, entonces f tiene al menos un punto silla en R.

Para un anillo circular R, se tiene

$$N_0 = 1, \quad N_1 = 1,$$

y, por tanto, para f constante sobre cada curva frontera,

$$M_0 - M_1 + M_2 = 0.$$

Tómese el caso en donde f tiene el *mismo* valor constante sobre cada una de las dos curvas frontera. Entonces f es constante en todo punto o toma su máximo o mínimo en el interior de R. Si se postula que f

sólo tiene puntos críticos con $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$, se excluye el caso de f constante. Entonces se concluye que $M_0 + M_2 > 0$ y, de aquí, que $M_1 > 0$. Por tanto, *una función en un anillo circular que se anula en todo punto sobre la frontera, tiene por lo menos un punto crítico con* $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \leqq 0$ *en el interior.*

Ejercicios A.2

1. Dar un ejemplo de una función continua f que tenga una singularidad en el origen de índice
   (a) -1;
   (b) -2;
   (c) $-n$, donde n es un número natural.
2. Dar un ejemplo de una función f (no se requiere que sea continua) que tenga una singularidad en el origen de índice
   (a) 2;
   (b) n, donde n es un número natural.
3. Sea R una región convexa cerrada en el plano x, y limitada por una curva convexa cerrada C con una tangente que gira contínuamente.
   Sea
   $$\xi = f(x, y), \quad \eta = g(x, y)$$
   una aplicación contínuamente diferenciable de R hacia sí misma. Probar que la aplicación tiene por lo menos un "punto fijo" en R, es decir, que existe un punto (x, y) en R tal que
   $$x = f(x, y), \quad y = g(x, y).$$
   El teorema análogo del punto fijo en n dimensiones se debe a Brouwer. [Sugerencia. Considérese el campo de vectores con componentes $u = f(x, y) - x$, $v = g(x, y) - y$.]

A.3 Puntos singulares de curvas planas

En la p. 282 se vió que, en general, una curva $f(x, y) = 0$ tiene una singularidad en un punto $x = x_0$, $y = y_0$ tal que se cumplen las tres ecuaciones

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

Para estudiar sistemáticamente estos puntos singulares supóngase que en la vecindad de (x_0, y_0) la función $f(x, y)$ tiene derivadas continuas hasta el segundo orden y que, en ese punto, no todas las segundas

derivadas se anulan. Desarrollando en una serie de Taylor hasta los términos de segundo orden se obtiene la ecuación de la curva en la forma

$$2f(x,y) = (x - x_0)^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) f_{xy}(x_0, y_0) + (y - y_0)^2 f_{yy}(x_0, y_0) + \varepsilon\rho^2 = 0,$$

donde se ha puesto $\rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ y ε tiende a 0 con ρ.

Usando un parámetro t, la ecuación de la recta general que pasa por el punto (x_0, y_0) puede escribirse en la forma

$$x - x_0 = at, \quad y - y_0 = bt,$$

donde a y b son dos constantes arbitrarias que puede suponerse se eligen de modo que $a^2 + b^2 = 1$. Para determinar el punto de intersección de esta recta con la curva $f(x, y) = 0$, se sustituyen estas expresiones en el desarrollo anterior para $f(x, y)$. Así, para el punto de intersección se obtiene la ecuación

$$a^2t^2f_{xx} + 2abt^2f_{xy} + b^2t^2f_{yy} + \varepsilon t^2 = 0.$$

Una primera solución es $t = 0$, es decir, el propio punto (x_0, y_0) como es obvio. Sin embargo, es digno de hacerse notar que el primer miembro de la ecuación es divisible entre t^2, de modo que $t = 0$ es una *raíz doble* de la ecuación. Por esta razón, en ocasiones a los puntos singulares también se les da el nombre de *puntos dobles* de la curva. Si se elimina el factor t^2, queda la ecuación

$$a^2f_{xx} + 2abf_{xy} + b^2f_{yy} + \varepsilon = 0.$$

Ahora se desea saber si es posible que la recta se interseque con la curva en otro punto que tienda a (x_0, y_0) a medida que la recta tiende hacia alguna posición límite particular. Por supuesto, esa posición límite de una secante es lo que se conoce como tangente. Para discutir ésto, se observa que a medida que un punto tiende a (x_0, y_0) la cantidad t tiende a 0 y, por lo tanto, ε también tiende a 0. Si la ecuación anterior todavía tiene que ser satisfecha, la expresión $a^2f_{xx} + 2abf_{xy} + b^2f_{yy}$ también debe tender a 0, es decir, para la posición límite de la recta debe tenerse

$$a^2f_{xx} + 2abf_{xy} + b^2f_{yy} = 0.$$

Esta ecuación nos da una condición cuadrática que determina la razón a/b, la cual fija la pendiente de una tangente.

Si el discriminante de la ecuación es negativo, es decir, si

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0,$$

se obtienen dos tangentes reales distintas. La curva tiene un *punto doble,* o *nodo,* como el que exhibe la lemniscata $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) =$ en el origen, o la estrofoide $(x^2 + y^2)(x - 2a) + a^2x = 0$ en el punto $x_0 = a$, $y_0 = 0$.

Si el discriminante se anula, es decir, si

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0,$$

se obtienen dos tangentes coincidentes; entonces es posible que dos ramas de la curva se toquen o que la curva tenga un *cúspide*.[1]

Por último, si

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0,$$

no hay tangente (real) en lo absoluto. Esto ocurre, por ejemplo, en el caso de los llamados *puntos aislados* de una curva algebraica. Estos son puntos en los cuales se satisface la ecuación de la curva pero en cuya vencindad ningún otro punto de la curva se encuentra.

La curva $(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 = a^4 + b^4$ es un ejemplo de ésto. Los valores $x = 0$, $y = 0$ satisfacen la ecuación, pero para todos los demás valores en la región $|x| < a\sqrt{2}$, $|y| < b\sqrt{2}$, el primer miembro es menor que el segundo.

Se ha omitido el caso en el que se anulan todas las derivadas de segundo orden. Este caso conduce a consideraciones complicadas y no lo investigaremos. A través de uno de tales puntos pueden pasar varias ramas de la curva, o pueden ocurrir singularidades de otros tipos.

Por último, mencionaremos brevemente la relación entre lo que se ha discutido aquí y la teoría de los máximos y mínimos. Debido a que las primeras derivadas se anulan, la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en un punto estacionario (x_0, y_0) es sencillamente

$$z - f(x_0, y_0) = 0.$$

[1]En este caso la curva no necesita tener una singularidad en lo absoluto; por ejem- $f(x, y) = (x - y)^2$ en el origen.

¡Por lo tanto, la ecuación

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = 0$$

nos da la proyección sobre el plano x,y de la curva de intersección del plano tangente con la superficie, y se ve que el punto (x_0, y_0) es un punto singular de esta curva. Si este es un punto aislado, en una cierta vecindad el plano tangente no tiene otro punto en común con la superficie y la función $f(x, y)$ tiene un máximo o un mínimo en el punto (x_0, y_0) (ver la p. 402). Si, no obstante, el punto singular es un punto múltiple, el plano tangente corta a la superficie en una curva con dos ramas y (x_0, y_0) es un punto silla. Estas observaciones nos conducen precisamente a las condiciones suficientes que se encontraron con anterioridad en la Sección A.1.

Ejercicios A.3

1. Encontrar los puntos singulares de las curvas siguientes y discutir su naturaleza:

   (a) $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0, c \neq 0$

   (b) $x^2 + y^2 - 2x^3 - 2y^3 + 2x^2y^2 = 0$

   (c) $x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 = 0$

   (d) $x^5 - x^4 + 2x^2y - y^2 = 0.$

A.4 Puntos singulares de superficies

De manera semejante, puede discutirse un punto singular de una superficie $f(x, y, z) = 0$, es decir, un punto para el cual

$$f = 0, \quad f_x = f_y = f_z = 0.$$

Sin pérdida de generalidad se puede tomar el punto como el origen O. Si se escribe

$$f_{xx} = \alpha, \quad f_{yy} = \beta, \quad f_{zz} = \gamma, \quad f_{xy} = \lambda, \quad f_{yz} = \mu, \quad f_{xz} = \nu,$$

para los valores en este punto, se obtiene la ecuación

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\lambda xy + 2\mu yz + 2\nu xz = 0,$$

para un punto (x, y, z) que se encuentra sobre una tangente a la superficie en O.

Esta ecuación representa un cono cuadrático que toca a la superficie en el punto singular (en lugar del plano tangente en un punto ordinario de la superficie), si se supone que no todas las cantidades $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ se anulan y que la ecuación anterior tiene soluciones reales que no sean $x = y = z = 0$.

Ejercicios A.4

1. Usando los resultados del Ejercicio 6 de A.1, examinar el comportamiento de una superficie en la vecindad de un punto singular.

A.5 Relación entre la representación de Euler y la de Lagrange del movimiento de un fluido

Sean (a, b, c) las coordenadas de una partícula en el instante $t = 0$ en un medio continuo (líquido o gas) en movimiento. Entonces el movimiento se puede representar por medio de las tres funciones

$$x = x(a, b, c, t),$$
$$y = y(a, b, c, t),$$
$$z = z(a, b, c, t),$$

o en términos de un vector de posición, $\mathbf{X} = \mathbf{X}(a, b, c, t)$. La velocidad y la aceleración están dadas por las derivadas con respecto al tiempo t. De donde el vector velocidad es $\dot{\mathbf{X}}$ con componentes $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, y el vector aceleración es $\ddot{\mathbf{X}}$ con componentes $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$, las cuales todas aparecen como funciones de la posición inicial (a, b, c) y del parámetro t. Para cada valor de t se tiene una transformación de las coordenadas (a, b, c) que pertenecen a los diferentes puntos del medio continuo en movimiento, hacia las coordenadas (x, y, z) en el instante t. Esta se conoce como *representación de Lagrange del movimiento.* Otra representación, introducida por Euler, se basa en el conocimiento de tres funciones

$$u(x, y, z, t), \quad v(x, y, z, t), \quad w(x, y, z, t)$$

que representan las componentes $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ de la velocidad $\mathbf{X}$ del movimiento en el punto (x, y, z), en el instante t.

Con el fin de pasar de la primera representación a la segunda, se tiene que usar la primera representación para calcular a, b, c como funciones de x, y, z, y t y sustituir estas expresiones en las expresiones para $\dot{x}(a, b, c, t)$, $\dot{y}(a, b, c, t)$, $\dot{z}(a, b, c, t)$:

$$u(x, y, z, t) = \dot{x}(a(x, y, z, t),\ b(x, y, z, t),\ c(x, y, z, t), t), \ldots .$$

A continuación se obtienen las componentes de la aceleración a partir

$$\dot{x}(a, b, c, t) = u(x(a, b, c, t),\ y(a, b, c, t),\ z(a, b, c, t), t), \ldots .,$$

derivando con respecto a t, para a, b, c fijas:

$$\ddot{x} = u_x\dot{x} + u_y\dot{y} + u_z\dot{z} + u_t, \ldots$$

o bien,

$$\ddot{x} = u_x u + u_y v + u_z w + u_t,$$

$$\ddot{y} = v_x u + v_y v + v_z w + v_t,$$

$$\ddot{z} = w_x u + w_y v + w_z w + w_t.$$

En la mecánica de un medio continuo es fundamental la ecuación siguiente, que relaciona las representaciones de Euler y de Lagrange:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} = u_x + v_y + w_z = \frac{\dot{D}}{D},$$

donde

$$D(x, y, z, t) = \frac{d(x, y, z)}{d(a, b, c)}$$

es el jacobiano que caracteriza a la transformación.

El lector puede completar la demostración de ésto y el teorema correspondiente en dos dimensiones, usando las diversas reglas para la derivación de funciones implícitas (ver la p. 299).

Ejercicios A.5

1. ¿Cuál es la interpretación física de las relaciones $u_t = v_t = w_t = 0$.
2. Interpretar las relaciones

$$\ddot{x} = u_x u + u_y v + u_z w + u_t,$$

$$\ddot{y} = v_x u + v_y v + v_z w + v_t,$$

$$\ddot{z} = w_x u + w_y v + w_z w + w_t.$$

físicamente; reescríbanse estas relaciones usando notación vectorial.

A.6 Representación tangencial de una curva cerrada y la desigualdad isoperimétrica

Una familia de rectas con parámetro α se puede dar por medio de

$$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p(\alpha) = 0, \cdot \cdot \cdot \cdot, \tag{83}$$

donde p(α) denota una función que es continuamente diferenciable por dos veces y periódica de período 2π (aquí p representa la distancia de la recta de la familia con dirección normal α, al origen). La envolvente C de estas rectas es una curva cerrada que satisface (83) y la ecuación adicional

$$- x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha - p'(\alpha) = 0.$$

De aquí que

$$\begin{aligned} x &= p \cos \alpha - p' \operatorname{sen} \alpha \\ y &= p \operatorname{sen} \alpha + p' \cos \alpha \end{aligned} \tag{84}$$

es la representación paramétrica de C (siendo α el parámetro). La fórmula (83) da la ecuación de las tangentes de C y se conoce como *ecuación tangencial*[1] de C; $p(\alpha)$ es la llamada *función soporte* de C.

Dado que

$$x' = - (p + p'') \operatorname{sen} \alpha, \qquad y' = (p + p'')\cos \alpha,$$

inmediatamente se tienen las expresiones que siguen para la longitud L y el área A y C:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, d\alpha = \int_0^{2\pi} (p + p'')d\alpha = \int_0^{2\pi} p\, d\alpha$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (xy' - yx')d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (p + p'')p\, d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (p^2 - p'^2)d\alpha,$$

puesto que $p'(\alpha)$ también es una función de período 2π.[2]

[1] La representación de C en la forma (84) es válida para cualquier curva convexa cerrada cuya curvatura sea finita y positiva y varíe contínuamente a lo largo de C.

[2] Como, obviamente, $p(\alpha) + c$ es la función soporte de la curva paralela que se encuentra a una distancia c de C, las fórmulas para el área y la longitud de una curva paralela (ver el Volumen I, p. 437, Ejercicio 7, y su solución en A. Blank: *Problems in Calculus and Analysis*, p. 188) se deducen fácilmente a partir de estas expresiones.

De ésto se deduce la *desigualdad isoperimétrica*

$$L^2 \geqq 4\pi A,$$

donde sólo se cumple el signo de igualdad para el círculo. Esto también se puede expresar por medio de la proposición: *entre todas las curvas cerradas de longitud dada, el círculo tiene el área máxima.*

Para la demostración se aplica el desarrollo de Fourier de $p(\alpha)$ (Volumen I, p. 594),

$$p(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu\alpha + b_\nu \operatorname{sen} \nu\alpha);$$

entonces

$$p'(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu(b_\nu \cos \nu\alpha - a_\nu \operatorname{sen} \nu\alpha),$$

de modo que (aplicando las relaciones de ortogonalidad del Volumen I, p. 593) se tiene

$$L = \pi a_0,$$

$$A = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a_0{}^2}{2} - \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu^2 - 1)(a_\nu{}^2 + b_\nu{}^2)\right).$$

De donde,

$$A \leqq \frac{\pi a_0{}^2}{4} = \frac{L^2}{4\pi};$$

En particular, $A = L^2/4\pi$ sólo si $a_\nu = b_\nu = 0$ para $\nu \geqq 2$; es decir, $p(\alpha) = a_0/2 + a_1 \cos \alpha + b_1 \operatorname{sen} \alpha$. La última ecuación define un círculo, como se prueba fácilmente a partir de (84).

Ejercicios A.6

1. Encontrar las ecuaciones de las envolventes, sus longitudes y áreas encerradas, para cada una de las familias de rectas que siguen:
   (a) $(x + 2) \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha + 2 = 0$
   (b) $x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha = 0.$
2. Comparar las fórmulas para el área y la longitud. ¿Pueden existir curvas de longitud arbitrariamente grande que encierren un área arbitrariamente pequeña?
3. ¿Puede representarse cualquier curva cerrada como la envolvente de las rectas (83)?

CAPITULO 4

Integrales múltiples

La derivación y las operaciones con derivadas para funciones de varias variables son reducibles directamente a sus análogas para funciones de una variable. La integración y su relación con la derivación son más complicadas, debido a que el concepto de integral se puede generalizar de diversas maneras para las funciones de varias variables. Así, para una función $f(x, y, z)$ de tres variables independientes se tienen que considerar las integrales sobre superficies y líneas, así como integrales sobre regiones del espacio. Sin embargo, todas las cuestiones de la integración estarán relacionadas con el concepto original de la integral de una función de una sola variable independiente.

Por simplicidad, trabajaremos principalmente en el plano (es decir, con dos variables independientes). No obstante, todos los argumentos se aplican con igual propiedad a las dimensiones superiores, con simples cambios en la terminología ("área" por "volumen", "cuadrado" por "cubo", etc.).

4.1 Areas en el plano

a. Definición de la medida de Jordan de un área

En el Volumen I se expresó el área de una región en el plano x, y por medio de integrales de funciones de una sola variable. La idea básica (que nos condujo primero a la noción de *integral*) fue aproximar la región por medio de regiones más sencillas consistentes de un número finito de rectángulos. Para su desarrollo más siste-

mático de las áreas, que inmediatamente se extienda a volúmenes en tres o más dimensiones, resulta deseable dar una definiciíon directa que no esté ligada a la idea de integración de funciones de una variable y que corresponda más íntimamente a la noción intuitiva del área de una región como el "número" de unidades cuadradas" contenidas en la región. Al mismo tiempo, esta nueva y más natural definición es más general y evita toda discusión extraña acerca de la regularidad de la grontera, lo cual se vuelve inevitable siempre que se trata de reducir las áreas a integrales sencillas. Como es costumbre, pospondremos las demostraciones rigurosas de existencia hasta el Apéndice de este capítulo. Esas demostraciones sólo presentan sistemáticamente lo que ya debe ser más o menos obvio para el lector a partir de las discusiones informales de ideas y propósitos que se presentan en el texto principal.

Al definir las áreas se acepta la idea intuitiva de que el área $A(S)$ de un conjunto S debe ser un número no negativo ligado a S, tiene las propiedades siguientes:

1. Si S es un cuadrado de lado k, entonces $A = k^2$.
2. Aditividad: *el área del todo es la suma de las áreas de sus partes.* Más precisamente, si S consiste de los conjuntos que no se traslapan[1] $S_1, \ldots, S_N$ de áreas $A(S_1) \ldots, A(S_N)$, respectivamente, entonces el área de S es

$$A(S) = A(S_1) + \cdots + A(S_N)$$

Con base en estos sencillos requerimientos podremos asignar un valor $A(S)$ a la mayoría de los conjuntos bidimensionales que se encuentran en la práctica, aunque no a todos los conjuntos imaginables S en el plano.

Para llegar a un valor $A(S)$ determinado de modo único para un conjunto acotado S se usan divisiones muy especiales del plano a base de cuadrados; subsecuentemente se demostrará que cualquier otra manera de dividir el plano en cuadrados (o rectángulos) conducirá a la misma área. Los cuadrados congruentes proporcionan la manera más fácil de cubrir el plano sin espacios vacíos o traslapes. Se usará la rejilla asociada al sistema coordenado, proporcionada por las rectas $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ y $y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, la cual divide al plano

[1]Los conjuntos *no se traslapan* si todo punto interior de uno de los conjuntos es exterior a todos los demás conjuntos. Se dice que los conjuntos son *ajenos* si todo punto de uno de los conjuntos no pertenece a los otros.

completo en cuadrados *cerrados* de lado I. Denotemos por $A_0^+(S)$ el número de cuadrados que tienen puntos en común con S y por $A_0^-(S)$ el número de aquéllos que están completamente contenidos en S: A continuación, dividamos cada cuadrado en cuatro cuadrados iguales de lado $\frac{1}{2}$ y área $\frac{1}{4}$ y denotemos por $A_1^+(S)$ la cuarta parte del número de aquellos subcuadrados que tienen puntos en común con S y por $A_1^-(S)$ la cuarta parte del número de aquéllos completamente contenidos en S. Como cada cuadrado unitario completamente contenido en S da lugar a cuatro subcuadrados completamente contenidos en S, se tiene $A_0^-(S) \leqq A_1^-(S)$, y, de modo semejante, $A_0^+(S) \geqq A_1^+(S)$. En seguida, divídase cada cuadrado de lado $\frac{1}{2}$ todavía más en 4 cuadrados de lado $\frac{1}{4}$. Un dieciseisavo de esos cuadrados que tienen puntos en común con S y un dieciseisavo de aquéllos contenidos en S se denotarán, respectivamente, por $A_2^+(S)$ y $A_2^-(S)$. Procediendo en esta forma se asocian los valores $A_n^+(S)$ y $A_n^-(S)$ con una división del plano en cuadrados de lado 2^{-n} (ver la Fig. 4.1). Es evidente que los valores $A_n^+(S)$ forman una sucesión monótona decreciente y acotada que converge hacia un valor $A^+(S)$, mientras que los $A_n^-(S)$ crecen monótonamente y convergen hacia un

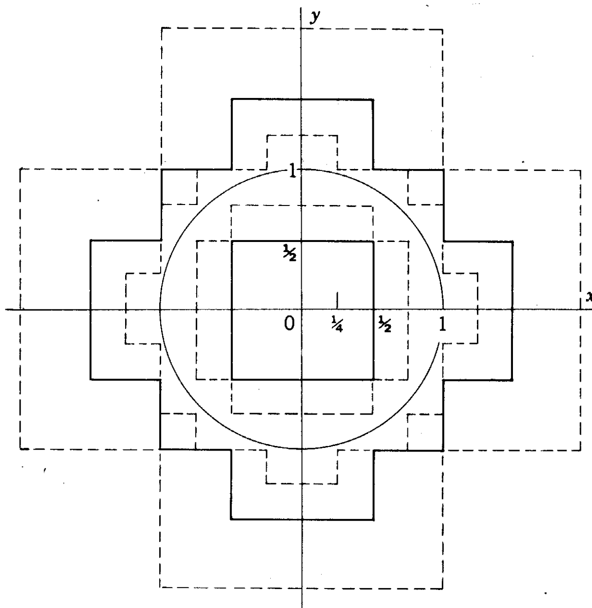


Figura 4.1 Aproximaciones interior y exterior para el área del disco unitario $x^2 + y^2 \leqq 1$, para $n = 0,\ 1,\ 2$, donde $A_0^- = 0$, $A_1^- = 1$, $A_2^- = 2$, $A_2^+ = 4\frac{1}{4}$, $A_1^+ = 6$, $A_0^+ = 12$.

valor $A^{-}(S)$. El valor $A^{-}(S)$ representa el *área interior*, lo mejor que puede aproximarse el área de S desde abajo por medio de cuadrados congruentes contenidos en S; el *área exterior* $A^{+}(S)$ representa la mejor cota superior obtenible cubriendo S por medio de cuadrados congruentes. Si ambos valores concuerdan se dice que S es *mensurable según Jordán* y el valor común $A^{-}(S) = A^{+}(S)$ se llama *contenido, o medida de Jordan,* de S. Usaremos el término más sencillo *área* $A(S)$ para el contenido de S y diremos que "S tiene un área", en lugar de usar la frase más incómoda "S es mensurable según Jordan", para denotar el hecho de que $A^{-}(S) = A^{+}(S)$, (lo cual es cierto para casi todos los conjuntos que se presentan en la práctica).

La diferencia $A_n^{+}(S) - A_n^{-}(S)$ representa el área total de los cuadrados en la n-ésima subdivisión que tiene puntos en común con S sin que estén completamente en S. Todos estos cuadrados contienen puntos frontera de S, de modo que

$$A_n^{+}(S) - A_n^{-}(S) \leqq A_n^{+}(\partial S)$$

donde ∂S es la frontera de S. Si la frontera de S tiene área 0, se encuentra que

$$A^{+}(S) - A^{-}(S) = \lim_{n\to\infty} [A_n^{+}(S) - A_n^{-}(S)] = \lim_{n\to\infty} A_n^{+}(\partial S) = 0,$$

es decir, que S tiene un área. *Por tanto, S tiene un área si su frontera ∂S tiene área* 0. Esta condición también es necesaria; ver la p. 578.

Para verificar que un conjunto dado S tiene un área o que ∂S tiene área 0, tendría que demostrarse que el área total de los cuadrados en la n-ésima subdivisión que tienen puntos en común con ∂S ies arbitrariamente pequeña para n lo suficientemente grande. En realidad, no es necesario usar cuadrados de lado 2^{-n} para este análisis. *Evidentemente, un conjunto S tiene un área si para cada* $\varepsilon > 0$ *se puede hallar un número finito de conjuntos $S_1, \ldots, S_N$ que cubran la frontera ∂S de S y tengan el área total* $< \varepsilon$. Entonces, obviamente para cualquier n,

$$A_n^{+}(\partial S) \leqq A_n^{+}(S_1) + \cdots A_n^{+}(S_N),$$

puesto que cualquier cuadrado que tiene puntos en común con ∂S tiene puntos en común con por lo menos uno de los conjuntos $S_1, \ldots, S_N$. Aquí, para $n \to \infty$, el segundo miembro tiende a la suma de las áreas de los S_i, la cual es menor que ε; de donde, $A^{+}(\partial S) \leqq \varepsilon$. Puesto que ε es un número positivo arbitrario, se concluye que $A^{+}(\partial S) = 0$.

Este criterio es suficiente para establecer que la mayoría de las regiones comunes S que se encuentran en el análisis tienen área. En particular, basta con saber que la frontera de S consiste de un número finito de arcos, cada uno de los cuales tiene una representación no paramétrica continua $y = f(x)$ o $x = g(y)$ con f o g, respectivamente, continuas en un intervalo cerrado finito. La continuidad uniforme las funciones continuas en intervalos cerrados y acotados inmediatamente nos permite demostrar que estos arcos se pueden cubrir por medio de un número finito de rectángulos de área total arbitrariamente pequeña.[1]

b. Un conjunto que no tiene área

Un ejemplo de un conjunto que no tiene área en el sentido establecido (o que no es "mensurable según Jordan") es el conjunto S de los puntos "racionales" en el cuadrado unitario, es decir, el conjunto de los puntos cuyas coordenadas x, y son ambas números racionales entre 0 y 1. Es evidente, por la propiedad de la densidad de los números racionales e irracionales, que

$$A_n^+ = 1, \quad A_n^- = 0$$

para toda n, de modo que S tiene área exterior 1 y área interior 0. Esto concuerda con el hecho de que la frontera ∂S de S consiste del cuadrado unitario cerrado completo y tiene área 1. Si se cubre S de cualquier manera por medio de un número finito de conjuntos cerrados $S_1, \ldots, S_N$ con áreas $A(S_1), \ldots, A(S_N)$, respectivamente, entonces

$$A(S_1) + \cdots + A(S_N) \geqq 1$$

puesto que los S_i necesariamente también cubren la frontera ∂S de S (ver el Ejercicio 6). Sin embargo, paradójicamente, es posible cubrir S por medio de un número *infinito* de conjuntos cerrados S_i de área total arbitrariamente pequeña. Sólo se tiene que aplicar el hecho de que las parejas (x,y) de números racionales forman un conjunto

---

[1] Se deja como un ejercicio para el lector probar que un rectángulo con lados paralelos a los ejes tiene un área (como se define aquí) igual al producto de dos lados adyacentes.

numerable (ver el Volumen I, p. 98).[1] Por tanto pueden arregalrse los puntos de S en una sucesión infinita (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... Sea ε un número positivo arbitrario. Denótese por S_m para cada entero $m > 0$, un cuadrado de área $\varepsilon 2^{-m}$ y centro en (x_m, y_m). Entonces los S_m cubren por completo el conjunto S, mientras que su área total está dada por

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{16} + \cdots = \varepsilon.$$

Por lo tanto, cubrir por medio de *un número infinito de cuadrados desiguales* puede conducir a una disminución considerable en la cota superior $A^+(S)$ para el "área" de S, reflejando de manera más aproximada lo "enrarecido" de los puntos racionales entre los reales. Uno de los puntos de partida en la teoría refinada de la medición de conjuntos, originada por Lebesgue, es definir el área exterior de un conjunto como la máxima cota inferior de la suma de las áreas de cualquier conjunto *finito o infinito* de cuadrados que lo cubran. Para el conjunto S dado el área exterior de Lebesgue tiene el valor 0, lo mismo que el área interior de S. Incidentalmente, para un conjunto S cerrado y acotado las dos definiciones de área exterior concuerdan, dado que, por el teorema de Heine-Borel (ver la p. 140), cualquier cobertura infinita de S ya contiene una cobertura finita.

c. Reglas para las operaciones con áreas

En la mayoría de los casos que nos interesan se puede establecer la existencia de un área de un conjunto S verificando que S está limitado por un número finito de arcos con representación paramétrica continua. Por esa razón podría ser tentador excluír de nuestra consideración todas las demás regiones con fronteras más complicadas. Sin embargo, resulta que tal restricción no sólo conduce a una pérdida de generalidad sino que también complica los procedimien-

[1] Se pueden arreglar, por ejemplo, en grupos, de acuerdo con la magnitud del mayor de los dos denominadores; cada grupo sólo tiene un número finito de elementos:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right),$$
$$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right); \quad \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right), \ldots.$$

tos, ya que se debe tener la seguridad de que las regiones que resultan de las operaciones de unión e intersección de conjuntos tienen a su vez fronteras sencillas. La ventaja de la definición general dada para el área como *contenido* es que se basa en la noción primitiva de contar cuadrados; nada se postula acerca de la frontera, en lo absoluto, más allá del requerimiento de que pueda ser cubierta por un número finito de cuadrados de área total arbitrariamente pequeña. La frontera de un conjunto mensurable según Jordan puede ser muy complicada en detalle, consistiendo quizá en un número infinito de curvas cerradas. Estas complicaciones no tendrán efecto en la teoría de la integración mientras se pueda demostrar que la contribución total que proviene de la frontera es despreciable.

Para trabajar con áreas son básicas las operaciones de dividir un conjunto en subconjuntos y de combinar los conjuntos en otros mayores. El punto importante es que al aplicar estas operaciones se permanezca dentro de la clase de conjuntos que tienen áreas. Se tiene el teorema fundamental de que *la unión,* $S \cup T$, *y la intersección* $S \cap T$ *de dos conjuntos* S *y* T *mensurables según Jordan son, a su vez, mensurables según Jordan*[1]. Esto se deduce inmediatamente a partir del hecho de que las fronteras de $S \cup T$ y de $S \cap T$ consisten de los puntos frontera de S o de T y, por tanto, a su vez tienen área 0 (ver la p. 581).

Para el caso importante de dos conjuntos S, T que *no se traslapan* —es decir, conjuntos tales que ningún punto interior de uno de ellos pertenece al otro o a su frontera— se cumple la *ley de aditividad para las áreas:*

$$A(S \cup T) = A(S) + A(T).$$

Con mayor generalidad, para cualquier número finito de conjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_N$, mensurables según Jordan, de los cuales ningún par se traslapa, se tiene la relación.

$$(1) \qquad A\left(\bigcup_{i=1}^{N} S_i\right) = \sum_{i=1}^{N} A(S_i).$$

La demostración es trivial, con base en las desigualdades

$$A_n^+\left(\bigcup_{i=1}^{N} S_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} A_n^+(S_i)$$

$$A_n^-\left(\bigcup_{i=1}^{N} S_i\right) \geq \sum_{i=1}^{N} A_n^+(S_i).$$

[1]Se recuerda al lector que la unión de conjuntos consiste de los puntos que pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos, y la intersección, de aquellos puntos que pertenecen a todos.

Aquí la primera desigualdad se deduce sencillamente del hecho de que cualquier cuadrado que tiene puntos en común con la unión de los S_i debe tener puntos en común con por lo menos uno de los S_i. La segunda se deduce del hecho de que cualquier cuadrado contenido en un conjunto S_i no puede estar contenido en algún otro S_k (supuesto que los dos no se traslapan) pero está contenido en su unión. Para $n \to \infty$, se concluye que

$$A^+\left(\bigcup_{i=1}^{N} S_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{N} A^+(S_i)$$

$$A^-\left(\bigcup_{i=1}^{N} S_i\right) \geqq \sum_{i=1}^{N} A^-(S_i).$$

A partir de la hipótesis de que los S_i tienen áreas, es decir, que

$$A^+(S_i) = A^-(S_i) = A(S_i),$$

y el área interior de la unión no puede ser mayor que el área exterior, se llega a la ecuación (1).

Ahora es fácil verificar que las "áreas", como se definen aquí, se pueden expresar en términos de integrales en los casos específicos considerados en el Volumen I. Por ejemplo, supóngase que el conjunto S consiste de los puntos "por debajo" de la gráfica de una función positiva continua $y = f(x)$ en un intervalo $a \leqq x \leqq b$. Es decir, el conjunto de los puntos (x, y) para los cuales

$$a \leqq x \leqq b, \quad 0 \leqq y \leqq f(x).$$

Considérese cualquier subdivisión del intervalo $[a, b]$ en N subintervalos de longitud Δx_i, y sean m_i el mínimo y M_i el máximo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo. Evidentemente, los rectángulos con base Δx_i y altura m_i no se traslapan y su unión está contenida en S, de modo que

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \, \Delta x_i \leqq A(s).$$

De modo semejante,

$$A(S) \leqq \sum_{i=1}^{N} M_i \, \Delta x_i.$$

Para f continua tanto la suma inferior como la superior tienen a la integral de f, y se llega a la expresión clásica

$$A(S) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

para el área de S.

Ejercicios 4.1

1. Demostrar que si S y T tienen área y si S está contenido en T, entonces $A(S) \leqq A(T)$.
2. Bajo la hipótesis del Ejercicio 1, demostrar que $T - S$ tiene área, donde $T - S$ es el conjunto de los puntos de T que no están contenidos en S.
3. Demostrar que si S y T están acotados,

   (a) $A^+(S \cup T) + A^+(S \cap T) \leqq A^+(S) + A^+(T)$

   (b) $A^-(S \cup T) + A^-(S \cap T) \geqq A^-(S) + A^-(T)$

4. Sean S y T conjuntos ajenos cualesquiera cuya unión tenga área. Demostrar que $A^+(S) + A^-(T) = A(S \cup T)$.
5. (a) Demostrar que si un conjunto S tiene área en un sistema coordenado, tiene área en cualquier otro sistema coordenado que se obtenga por medio de la rotación y traslación de los ejes.
   (b) Demostrar que el área de S es la misma en ambos sistemas coordenados.
6. Supóngase que S está cubierto por una colección finita $S_1, \ldots, S_N$ de conjuntos cerrados. Demostrar que la colección también cubre la frontera ∂S de S.
7. ¿Tiene un área el conjunto S de los puntos $(1/p, 1/q)$, donde P y q son números naturales?

4.2 Integrales dobles

a. La integral doble como un volumen

Todo lo que se dijo acerca de las áreas en los párrafos anteriores se lleva inmediatamente hacia los volúmenes en tres o más dimensiones. Para definir el volumen $V(S)$ de un conjunto acotado S en el espacio x, y, z sólo se necesitan usar subdivisiones del espacio en *cubos* de lado 2^{-n}. El conjunto S *tendrá un volumen* cuando su frontera pueda ser cubierta por un número finito de estos cubos de volumen total arbitrariamente pequeño. Este es el caso para todos los conjuntos acotados S cuya frontera consista de un número finito de superficies, cada una de las cuales tenga una representación no paramétrica continua $z = f(x, y)$ o $y = g(x, z)$ o $x = h(y, z)$ sobre un conjunto plano cerrado.

El intento de representar el volumen analíticamente conduce directamente a la noción de integral múltiple, la cual tiene una gran variedad de aplicaciones.

Sea R, conjunto cerrado y acotado en el plano x, y, mensurable según Jordan, el dominio de una función de valor positivo $z = f(x, y)$. Se desea encontrar el volumen "por debajo" de la superficie $z = f(x, y)$, es decir, el volumen $V(S$ del conjunto S de los puntos (x, y, z) para los cuales

$$(x, y) \in R, \qquad 0 \leqq z \leqq f(x, y).$$

Con este fin se divide R en los conjuntos cerrados que no se traslapan $R_1, \ldots, R_N$ mensurables según Jordan. Sean m_i el mínimo y M_i el máximo de f para (x, y) en R_i. Fácilmente se ve que el cilindro con base R_i y altura m_i tiene el volumen $m_i A(R_i)$, donde $A(R_i)$ es el área de R_i (Fig. 4.2).[1] Estos cilindros no se traslapan. De modo semejan-

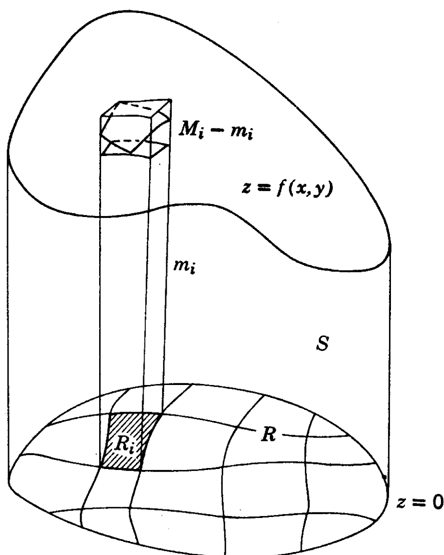


Figura 4.2

[1]Cuando se divide el espacio en cubos de lado 2^{-n}, los cubos que tienen puntos en común con el cilindro pueden arreglarse en "columnas" cilíndricas cuya sección recta es un cuadrado que tiene un punto en común con R_i y cuya altura difiere de 2^{-n} en menos que m_i.

te los cilindros con base R_i y altura M_i tiene el volumen $M_iA(R_i)$ y no se traslapan. Se deduce que

$$\text{(3a)} \qquad \sum_{i=1}^{N} m_iA(R_i) \leqq V(S) \leqq \sum_{i=1}^{N} M_iA(R_i)$$

Las sumas que aparecen en esta desigualdad reciben los nombres, respectivamente, de sumas *inferior* y *superior* .

Hágase ahora esta subdivisión cada vez más fina, en el sentido de que tienda hacia cero el diámetro máximo de cualquier R_i que se tenga en la subdivisión.[1] La función continua $f(x, y)$ es *uniformemente continua* en el conjunto compacto R, de modo que la diferencia máxima $M_i - m_i$ tiende a cero con el diámetro máximo de los conjuntos R_i en la subdivisión. La diferencia entre las sumas superior e inferior también tiende a cero, puesto que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} M_iA(R_i) - \sum_{i=1}^{N} m_iA(R_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} (M_i - m_i)A(R_i) \leqq [\operatorname*{Max}_i(M_i - m_i)] \sum_{k=1}^{N} A(R_k) \\ &= [\operatorname*{Max}_i(M_i - m_i)]A(R).\end{aligned}$$

De (3a) se deduce que tanto la suma superior como la inferior convergen hacia el límite $V(S)$ a medida que se afina indefinidamente la subdivisión. Obviamente, se puede obtener el mismo valor límite si en lugar de m_i o M_i se toma cualquier número entre m_i y M_i, tal como $f(x_i, y_i)$, el valor de la función en un punto (x_i, y_i) del conjunto R_i. Al límite $V(S)$ se le da el nombre de integral doble de f sobre el conjunto R y se escribe

$$\text{(3b)} \qquad V(S) = \iint_R f(x, y)dR.$$

b. El concepto analítico general de la integral

El concepto de la integral doble como un volumen, sugerido por la geometría, ahora debe ser estudiado analíticamente y hacerse más preciso sin referencia a la intuición. Considérese un conjunto cerrado

[1] El "diámetro" de un conjunto cerrado es la distancia máxima entre dos puntos cualesquiera en el conjunto.

y acotado R, mensurable según Jordan, con área $A(R) = \Delta R$, y una función $f(x, y)$ que sea continua en todo punto de R (incluyendo la frontera). Como antes, subdivídase R en N subconjuntos $R_1, R_2, \ldots, R_N$ que no se traslapen, mensurables según Jordan, con áreas $\Delta R_1, \ldots, \Delta R_N$. Elíjase en R_i un punto arbitrario (ξ_i, η_i), donde la función tiene el valor $f_i = f(\xi_i, \eta_i)$ y fórmese la suma

$$V_N = \sum_{i=1}^{N} f_i \Delta R_i = \sum_{i=1}^{N} f_i A(R_i).$$

Entonces el teorema fundamental de existencia afirma:

Si el número N crece más allá de toda cota y, al mismo tiempo, el mayor de los diámetros de las subregiones tiende hacia cero, entonces V_N tiende hacia el límite V. Este límite es independiente de la naturaleza particular de la subdivisión de las regiones R y de la elección del punto (ξ_i, η_i) en R_i. Al límite V se le da el nombre de integral (doble) de la función $f(x,y)$ sobre la región R y se le denota por

$$\iint_R f(x, y)dR.$$[1]

COROLARIO Se obtiene el mismo límite si se toma la suma sólo sobre aquellas subregiones R_i que se encuentran por completo en el interior de R, es decir, las que no tienen puntos en común con la frontera de R.[2]

---

[1] Este teorema puede refinarse aún más en una forma útil para muchos propósitos. En la subdivisión en N subregiones, no es necesario elegir un valor que en realidad sea tomado por la función $f(x, y)$ en un punto definido (ξ_i, η_i) de la subregión correspondiente; basta con elegir valores que difieran de los valores de la función $f(\xi_i, \eta_i)$ en cantidades que tiendan uniformemente a 0 a medida que la subdivión se hace más fina. En otras palabras, en lugar de los valores de la función $f(\xi_i, \eta_i)$

$$f_i = f(\xi_i, \eta_i) + \varepsilon_{i,N}$$

pueden considerarse las cantiadades donde $|\varepsilon_{i,N}| \leqq \varepsilon_N$, $\lim_{N\to\infty} \varepsilon_N = 0$. Este teorema es casi trivial porque, dado que los números $\varepsilon_{i,N}$ tienden uniformemente a 0, el valor absoluto de la diferencia entre las dos sumas es menor que $\varepsilon_N \sum \Delta R_i$, y puede hacerse

$$\sum_1^N f_i \,\Delta R_i \qquad \text{y} \qquad \sum_1^N (f_i + \varepsilon_{i,N})\Delta R_i$$

tan pequeño como se desee si se toma el número N lo suficientemente grande. Por ejemplo, si $f(x, y) = P(x, y)\, Q(x, y)$, puede tomarse $f_i = P_i Q_i$, donde P_i y Q_i son los máximos de P y Q en R_i, los cuales, en general, no se toman en el mismo punto.

[2] El corolario se deduce del hecho de que no sólo la frontera ∂R de R, sino también el conjunto de todos los puntos lo suficientemente próximos a ∂R pueden ser cubiertos por cuadrados de área total arbitrariamente pequeña.

Este teorema de existencia para la integral de una función continua puede probarse de una manera puramente analítica. La demostración, que es muy semejante a la demostración correspondiente para una variable, se encuentra en el apéndice de este capítulo (p. 526).

Ilustremos ahora este concepto de integral, considerando algunas subdivisiones especiales. En caso más sencillo es aquel en el que R es un rectángulo $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ y las subregiones R_i también son rectángulos (formados al subdividir el intervalo x en n partes iguales y el intervalo y en m partes iguales) de longitudes

$$h = \frac{b-a}{n} \qquad \text{y} \qquad k = \frac{d-c}{m}.$$

Denotaremos por $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ $y_0 = c, y_1, y_2, \ldots, y_m = d$. los puntos de subdivisión. Estos corresponden a paralelas al eje y y al eje x, respectivamente. Entonces se tiene $N = nm$. Las subregiones son todas rectángulos con área $A(R_i) = \Delta R_i = hk = \Delta x\, \Delta y$, donde $h = \Delta x$, $k = \Delta y$. Como punto (ξ_i, η_i) tómese cualquier punto en el rectángulo correspondiente R_i, y, a continuación, fórmese la suma

$$\sum_i f(\xi_i, \eta_i)\Delta x\, \Delta y$$

para todos los rectángulos de la subdivisión.

Si ahora se hace que n y m crezcan simultáneamente más alla de toda cota, la suma tiende a la integral de la función f sobre el rectángulo R.

También se pueden caracterizar estos rectángulos por medio de los dos subíndices μ y ν, correspondientes a las coordenadas $x = a + \nu h$ y $y = c + \mu k$ del vértice inferior izquierdo del rectángulo en cuestión. Aquí ν toma valores enteros desde 0 hasta $(n-1)$ y μ desde 0 hasta $(m-1)$. Con esta identificación de los rectángulos, por medio de los subíndices ν y μ, se puede escribir apropiadamente la suma como una suma doble[1]

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{m-1} f(\xi_\nu, \eta_\mu)\Delta x\, \Delta y. \tag{3c}$$

Incluso cuando R no es un rectángulo, a menudo resulta conveniente subdividir la región en subregiones rectangulares R_i. Para

[1]Si se va a escribir la suma en esta forma, debe suponerse que se eligen los puntos (ξ_i, η_i) de modo que estén en rectas verticales u horizontales.

hacerlo se sobrepone al plano la red rectangular formada por las rectas

$$x = \nu h \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$
$$y = \mu k \qquad (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

donde h y k son números que se eligen arbitrariamente. Considérense ahora todos aquellos rectángulos de la división que se encuentren completamente dentro de R. Denotaremos estos rectángulos por R_i. Por supuesto, no llenan completamente la región; por el contrario, además de estos rectángulos R también contiene ciertas regiones R_i adyacentes a la frontera que están limitadas parcialmente por rectas de la red y parcialmente por porciones de la frontera de R. Por el corolario de la p. 377, se puede calcular la integral de la función f sobre la región R sumando sólo sobre los rectángulos interiores y, a continuación, pasando al límite.

Otro tipo de subdivisión que se aplica con frecuencia es la subdivisión por medio de una red de coordenadas polares (Fig. 4.3). Se subdivide el ángulo completo 2π en n partes de magnitud $\Delta\theta = 2\pi/n = h$, y también se elige una segunda cantidad $k = \Delta r$. Trácense ahora las rectas $\theta = \nu h (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n - 1)$ que pasan por el origen, y también los círculos concéntricos $r_\mu = \mu k$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$. Se denotarán por R_i, aquellas regiones que se encuentran completamente en el interior de R, y sus áreas por ΔR_i. Entonces se puede considerar la integral de la función $f(x, y)$ sobre la región R como el límite de la suma

$$\sum f(\xi_i, \eta_i)\Delta R_i,$$

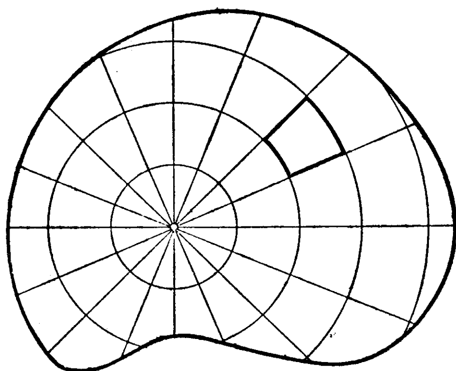


Figura 4.3 Subdivisión por medio de redes de coordenadas polares.

donde (ξ_i, η_i) es un punto que se elige arbitrariamente en R_i. La suma se toma sobre todas las subregiones R_i en el interior de R y el paso hacia el límite consiste en hacer que h y k tiendan simultaneamente a cero.

Por geometría elemental, el área ΔR_i está dada por la ecuación

$$\Delta R_i = \frac{1}{2}(r_{\mu+1}^2 - r_\mu^2)h = \frac{1}{2}(2\mu + 1)k^2h,$$

si se supone que R_i está en el anillo limitado por los círculos con radios μk y $(\mu + 1)k$.

c. Ejemplos

El ejemplo más sencillo es la función $f(x, y) = 1$. Obviamente, aquí el límite de la suma es independiente del modo de subdivisión y siempre es igual al área de la región R. En consecuencia, la integral de la función $f(x, y) = 1$ sobre la región también es igual a esta área. Esto podría haber sido de esperar, porque la integral es el volumen del cilindro de altura unitaria con la región R como base.

Como un ejemplo más, considérese la integral de la función $f(x, y) = x$ sobre el cuadrado $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$. La interpretación intuitiva de la integral como un volumen indica que el valor de la presente integral debe ser $\frac{1}{2}$. Esto se puede verificar por medio de la definición analítica de la integral. Subdivídase el rectángulo en cuadrados de lado $h = 1/n$, y como punto (ξ_i, η_i) elíjase el vértice inferior izquierdo de cada pequeño cuadrado. Entonces cada cuadrado en la columna vertical cuyo lado izquierdo tiene la abscisa νh contribuye a la suma con la cantidad νh^3. Esta expresión aparece n veces. De donde, la contribución de la columna completa de cuadrados equivale a $n\nu h^3 = \nu h^2$. Fórmese ahora la suma desde $\nu = 0$ hasta $\nu = n - 1$, para obtener

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \nu h^2 = \frac{n(n-1)}{2} h^2 = \frac{1}{2} - \frac{h}{2}.$$

Como se afirmó, el límite de esta expresión, conforme $h \to 0$ es $\frac{1}{2}$.

De modo semejante se puede integrar el producto xy o, más generalmente, cualquier función $f(x, y)$ que se pueda representar como un producto de una función de x y una función de y en la forma $f(x, y) = \phi(x)\psi(y)$, siempre que la región de integración sea un rectángulo con lados paralelos a los ejes, digamos $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$. Se usa la misma división del recángulo usada en (3c)y como

valor de la función en cada subrectángulo se toma el valor de la función en el vértice inferior izquierdo. Entonces la integral es el límite de la suma

$$hk \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{m-1} \phi(\nu h)\psi(\mu k)$$

la cual se puede escribir como el producto de dos sumas, en la forma

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} h\phi(\nu h) \sum_{\mu=0}^{m-1} k\psi(\mu k).$$

Por la definición de integral ordinaria, conforme $h \to 0$ y $k \to 0$ estos factores tienden a las integrales de las funciones correspondientes sobre los intervalos respectivos, desde a hasta b y desde c hasta d. Así se obtiene la regla general de que si una función $f(x, y)$ se puede representar como un producto de dos funciones $\phi(x)$ y $\psi(y)$, su integral doble sobre un rectángulo $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ puede descomponerse en el producto de dos integrales:

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \phi(x)\, dx \cdot \int_c^d \psi(y)\, dy.$$

Esta regla y la de la suma (ver (4b), p. 438) proporcionan la integral de cualquier polinomio sobre un rectángulo con lados paralelos a los ejes.

Como un último ejemplo, consideremos un caso en el que sea conveniente usar una subdivisión por medio de la red de coordenadas polares en lugar de una subdivisión en rectángulo. Sea la región R el círculo con radio unitario y centro en el origen, dado por $x^2 + y^2 \leqq 1$, y sea

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

La integral de f sobre R es simplemente el volumen de un hemisferio de radio unitario.

Constrúyase la red de coordenadas polares como antes. La subregión que se encuentra entre los círculos con radios $r_\mu = \mu k$ y $r_{\mu+1} = (\mu + 1)k$ y entre las rectas $\theta = \nu h$ y $\theta = (\nu + 1)h$, donde $h = 2\pi/n$ proporciona la contribución

$$\frac{1}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{r_{\mu+1} + r_\mu}{2}\right)^2}\, (r_{\mu+1}{}^2 - r_\mu{}^2)h = \sqrt{1 - \rho_\mu{}^2}\, \rho_\mu kh,$$

donde, como valor de la función en la subregión R_i se ha tomado el valor que toma la función sobre un círculo intermedio con el radio

$\rho_\mu = (r_{\mu+1} + r_\mu)/2$. Todas las subregiones que están en el mismo anillo dan la misma contribución y, como hay $n = 2\pi/h$ de esas regiones, la contribución de todo el anillo es

$$2\pi\sqrt{1 - \rho_\mu^2}\, \rho_\mu k.$$

Por lo tanto, la integral es el límite de la suma

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} 2\pi\sqrt{1 - \rho_\mu^2}\, \rho_\mu k.$$

Como ya se sabe, esta suma tiende a la integral sencilla

$$2\pi \int_0^1 r\sqrt{1 - r^2}\, dr = -\frac{2\pi}{3}\sqrt{(1 - r^2)^3}\,\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

De donde se obtiene

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dR = \frac{2\pi}{3},$$

que concuerda con la conocida fórmula para el volumen de una esfera.

d. Notación. Extensiones. Reglas fundamentales

La subdivisión rectangular de la región R está relacionada con el símbolo de la integral doble, usado desde la época de Leibnitz. Partiendo del símbolo

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{m-1} f(\xi_\nu, \eta_\mu)\Delta x\, \Delta y$$

para la suma sobre los rectángulos, se indica el paso al límite, de la suma a la integral, remplazando el signo doble de suma por un signo de integral doble y escribiendo el símbolo $dx\, dy$ en lugar del producto de las cantidades $\Delta x\, \Delta y$. En consecuencia, frecuentemente se escribe la integral doble en la forma

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

en lugar de hacerse en la forma

$$\iint_R f(x, y)\, dR$$

en la cual se remplaza el área ΔR por el símbolo dR. Por el momento, el símbolo $dx\, dy$ sólo se refiere simbólicamente al paso hacia el

límite de las sumas anteriores de nm términos, conforme $n \to \infty$ y $m \to \infty$.

Resulta claro que en las integrales dobles, precisamente como en las integrales ordinarias de una sola variable, no importa la notación para las variables de integración, de modo que, con igual propiedad pudo haberse escrito

$$\iint_R f(u, v)\, du\, dv \qquad \text{o} \qquad \iint_R f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Al introducir el concepto de integral se vio que para una función positiva $f(x, y)$ la integral representa el volumen debajo de la superficie $z = f(x, y)$. Sin embargo, en la definición analítica de integral es completamente innecesario que la función $f(x, y)$ deba ser positiva en todo punto; puede ser negativa o puede cambiar de signo, en cuyo caso la superficie se intersecta con la región R. Por lo tanto, en el caso general la integral da el volumen en cuestión con un signo definido, siendo el signo positivo para las superficies o porciones de superficies que estén por encima del plano x, y. Si la superficie consiste de varias porciones de ese tipo, la integral representa la suma de los volúmenes correspondientes tomados con sus signos propios. En particular, una integral doble se puede anular aunque la función bajo el signo integral no se anule en todas partes.

Tanto para las integrales dobles como para las integrales simples se cumplen las reglas fundamentales siguientes; sus demostraciones son simples repeticiones de las dadas en el Volumen I (p. 138). Si c es una constante, entonces

$$\text{(4a)} \qquad \iint_R cf(x, y)\, dR = c \iint_R f(x, y)\, dR.$$

Además, la integral de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus dos integrales (*linealidad de la operación de integración*):

$$\text{(4b)} \qquad \iint_R [f(x, y) + \phi(x, y)]\, dR = \iint_R f(x, y)\, dR + \iint_R \phi(x, y)\, dR.$$

Por último, si la región R consiste de dos subregiones R' y R'' que tienen en común a lo sumo porciones de la frontera, entonces

$$\text{(4c)} \qquad \iint_R f(x, y)\, dR = \iint_{R'} f(x, y)\, dR + \iint_{R''} f(x, y)\, dR;$$

es decir, *cuando se unen las regiones, las integrales correspondientes se suman* (aditividad de las integrales).

e. Estimaciones de la integral y el teorema del valor medio

En cuanto a las integrales ordinarias, existen algunas estimaciones muy útiles para las integrales dobles. Como las demostraciones son prácticamente las mismas que se dan en el Volumen I (p. 138), nos contentaremos simplemente con enunciar los hechos.

Si $f(x, y) \geqq 0$ en R, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dR \geqq 0; \tag{5a}$$

de modo semejante, si $f(x, y) \leqq 0$,

$$\iint_R f(x, y)\, dR \leqq 0. \tag{5b}$$

Esto conduce al resultado siguiente: *si la desigualdad*

$$f(x, y) \geqq \phi(x, y) \tag{5c}$$

se cumple en todo punto de R, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dR \geqq \iint_R \phi(x, y)\, dR. \tag{5d}$$

Una aplicación directa de este teorema da las relaciones

$$\iint_R f(x, y)\, dR \leqq \iint_R |f(x, y)|\, dR \tag{5e}$$

y

$$\iint_R f(x, y)\, dR \geqq -\iint_R |f(x, y)|\, dR. \tag{5f}$$

También se pueden combinar estas desigualdades en una sola fórmula:

$$\left|\iint_R f(x, y)\, dR\right| \leqq \iint_R |f(x, y)|\, dR. \tag{5g}$$

Si m es la máxima cota inferior y M la mínima cota superior de la función $f(x, y)$ en R, entonces

$$m\,\Delta R \leqq \iint_R f(x, y)\, dR \leqq M\,\Delta R, \tag{6}$$

donde ΔR es el área de la región R. Entonces la integral se puede expresar en la forma

(7a) $$\iint_R f(x, y)\, dR = \mu\, \Delta R,$$

donde μ está entre m y M. En general no se puede especificar con más exactitud el valor preciso de μ. [1]

Nuevamente, esta forma de la fórmula de estimación recibe el nombre de *teorema del valor medio del cálculo integral.*

Aquí se cumple una vez más la generalización siguiente: si $p(x, y)$ es cualquier función continua positiva en R, entonces

(7b) $$\iint_R p(x, y) f(x, y)\, dR = \mu \iint_R p(x, y)\, dR,$$

donde μ denota un número entre los valores máximo y mínimo de f que no se puede especificar más.

Como antes, estas estimaciones de la integral indican que *la integral varía continuamente con la función.* Más concretamente, sean $f(x, y)$ y $\phi(x, y)$ dos funciones que, en la región completa R, satisfacen la desigualdad

$$|f(x, y) - \phi(x, y)| < \varepsilon,$$

donde ε es un número positivo fijo. Si ΔR es el área de R, entonces las integrales $\iint_R f(x, y)\, dR$ y $\iint_R \phi(x, y)$ difieren en menos que $\varepsilon\, \Delta R$, es decir, en menos que un número que tiende a cero con ε.

De la misma manera se ve que *la integral de una función* varía continuamente con la región. Supóngase que dos regiones R' y R'' se obtienen una de la otra por la adición o la remoción de porciones cuya área total es menor que ε, y sea $f(x, y)$ una función continua en ambas regiones, tal que $|f(x, y)| < M$, donde M es un número fijo. Entonces las dos integrales $\iint_{R'} f(x, y)\, dR$ y $\iint_{R''} f(x, y) dR$ difieren en menos que $M\varepsilon$, es decir, en menos que un número que tiende a cero con ε. La demostración de este hecho se deduce inmediatamente a partir de la fórmula (4c) de la p. 438.

Por lo tanto, se puede calcular la integral sobre una región R tan exactamente como se desee, tomándola sobre una subregión de R cuya área total difiera de la de R en una cantidad lo suficientemente pequeña. Por ejemplo, en la región R se puede construir un polígono cuya área total difiera tan poco como se desee del área de R. En par-

---

*Precisamente como para las integrales de funciones continuas de una variable, es evidente que el valor μ es tomado por la función $f(x, y)$ en algún punto del conjunto R, si R es conexo y f es continua.

ticular, puede suponerse que este polígono está limitado por rectas paralelas a los ejes x y y alternadamente, es decir, que se forma por medio de rectángulos paralelos a los ejes.

4.3 Integrales sobre regiones en tres y más dimensiones

Cada una de las proposiciones que se han hecho para las integrales sobre regiones del plano x,y se puede extender sin más complicaciones o introducción de ideas nuevas hacia regiones en tres o más dimensiones. Por ejemplo, para tratar la integral sobre una región tridimensional R sólo es necesario subdividir R (por ejemplo, por medio de un número finito de superficies con representaciones no paramétricas continuas) en subregiones cerradas $R_1, R_2, \ldots, R_N$ que no se traslapen, mensurables según Jordan y que llenen a R por completo. Si $f(x, y, z)$ es una función continua en la región cerrada R y si (ξ_i, η_i, ζ_i) denota un punto arbitrario en la región R_i, fórmese nuevamente la suma

$$\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta R_i,$$

en la cual ΔR_i denota el volumen de la región R_i. La suma se toma sobre todas las regiones R_i, o bien, si es más conveniente, sólo sobre aquellas subregiones que no se unen con la frontera de R. Si ahora se hace que el número de subregiones crezca más allá de toda cota, de manera que el diámetro de la mayor de ellas tienda a cero, nuevamente se encuentra un límite independiente del modo particular de subdivisión y de la elección de los puntos intermedios. Este límite se llama integral de $f(x, y, z)$ sobre la región R y se denota por

$$\iint_R f(x, y, z)\, dR. \tag{7c}$$

En particular, si se efectúa una subdivisión de la región en regiones rectangulares con lados Δx, Δy, Δz, todos los volúmenes de las regiones interiores R_i tendrán el mismo valor $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z$. Como en la p. 437, el paso hacia el límite se indica a través de la notación

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Aparte de los cambios necesarios en la notación, todos los hechos que se han mencionado para las integrales dobles siguen siendo válidos para las integrales triples.

Para regiones de más de tres dimensiones, una vez que se ha definido de modo apropiado el concepto de volumen para tales regiones puede definirse la integral múltiple exactamente de la misma manera. Si nos restringimos a subregiones rectangulares y se define el volumen de una región rectangular.

$$a_i \leqq x_i \leqq a_i + h_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

como el producto $h_1 h_2 \ldots h_n$, la definición de integral no comprende nada nuevo. Una integral sobre la región n dimensional R se denota por

$$\iint \cdots \int_R f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n.$$

Para regiones y subdivisiones más generales debe contarse con la definición abstracta de volumen dada en el Apéndice.

En lo que sigue nos restringiremos a las integrales en tres dimensiones, cuando más.

4.4 Derivación en el espacio. Masa y densidad

Para funciones de una variable el integrando es la derivada de la integral. Este hecho representa la relación fundamental entre el cálculo diferencial y el integral. Para las integrales múltiples de funciones de varias variables existe la misma relación; pero aquí no es de carácter tan fundamental.

Considérese la integral múltiple (integral de dominio)

$$\iint_B f(x, y)\, dB \qquad \text{o} \qquad \iiint_B f(x, y, z)\, dB$$

de una función continua de dos o tres variables sobre una región B que contiene a un punto fijo P con coordenadas (x_0, y_0) o (x_0, y_0, z_0), respectivamente, y que tiene el contenido ΔB. Dividiendo esta integral entre el contenido ΔB, de la fórmula (7a) se deduce que el cociente es un valor intermedio del integrando, es decir, un número entre sus valores máximo y mínimo en la región. Si se hace que el diámetro de la región B alrededor del punto P tienda a cero, de modo que el contenido ΔB también tienda a cero, este valor intermedio de la función f debe tender a su valor en el punto P. De donde, el paso hacia el límite proporciona las relaciones respectivas

$$\lim_{\Delta B \to 0} \frac{1}{\Delta B} \iint_B f(x, y) dB = f(x_0, y_0)$$

y

$$(8) \qquad \lim_{\Delta B \to 0} \frac{1}{\Delta B} \iiint_B f(x, y, z) dB = f(x_0, y_0, z_0).$$

Este proceso de límite, que guarda cierto paralelismo con el proceso de derivación para las integrales con una variable inpendiente, recibe el nombre de *derivación en el espacio* de la integral. Entonces se ve que *la derivación en el espacio de una integral múltiple da el integrando.*

La relación del integrando con la integral se puede interpretar en el caso de varias variables independientes, por medio de los conceptos físicos de *densidad* y *masa total.* Se piensa en una masa de una sustancia como si estuviera distribuída sobre una región R de tres dimensiones, de tal manera que en cada subregión lo suficientemente pequeña esté contenida una masa arbitrariamente pequeña. Con el fin de definir la masa específica o densidad en un punto P, considérese primero una vecindad B del punto P, con contenido ΔB y divídase la masa total en esta vecindad entre el contenido. El cociente recibe el nombre de *densidad media* o *densidad promedio* en esta subregión. Si ahora se hace que el diámetro de B tienda a cero, a partir de la densidad media en la región B se obtiene un límite llamado *densidad* en el punto P, siempre que ese límite exista independientemente de la selección de la sucesión de regiones. Si se denota esta densidad por $\mu(x, y, z)$ y se supone que es continua, se ve inmediatamente que el proceso antes descrito proporciona el mismo valor que la derivación de la integral

$$\iiint_R \mu(x, y, z)\, dV,$$

tomada sobre toda la región R. Por lo tanto, esta integral tomada sobre la región completa representa masa total de la sustancia de densidad μ en la región[1] R.

Naturalmente, desde el punto de vista físico tal representación de la masa de una sustancia es una idealización. Que esta idealización es

*Lo que se ha demostrado es únicamente que la distribución dada por la integral múltiple tiene la misma derivada en el espacio que la distribución de masa dada originalmente. Falta por probar que esto implica que las dos distribuciones en realidad son idénticas; en otras palabras, que la proposición "la derivación en el espacio da la densidad μ" sólo puede ser satisfecha por una distribución de masa. La demostración, aunque no es difícil, se pasa por alto aquí. Se tiene que suponer que la masa es *aditiva,* es decir, que para una región R que consiste de dos regiones que no se traslapan R' y R'', la masa de R es la suma de las masas de R' y R''.

razonable, es decir, que da una proximación de la situación real con exactitud suficiente, es una de las hipótesis de la física.

Es más, estas ideas conservan su significado matemático incluso cuando μ no es positiva en todo punto. Las densidades y masas negativas también tienen una interpretación física, por ejemplo, en el estudio de distribuciones de carga eléctrica.

4.5 Reducción de la integral múltiple a integrales simples repetidas

El hecho de que toda integral múltiple puede reducirse a integrales simples tiene una importancia fundamental en la evaluación de las integrales múltiples. Este hecho nos permite aplicar todos los métodos que se han desarrollado previamente para encontrar integrales indefinidas a la evaluación de integrales múltiples.

a. Integrales sobre un rectángulo

Primero tomemos la región R como un rectángulo $a \leqq x \leqq b$, $\alpha \leqq y \leqq \beta$ en el plano x, y y consideremos una función continua $f(x, y)$ en R. Entonces se tiene el teorema:

Para encontrar la integral doble de $f(x,y)$ sobre la región R, primero se considera y como constante y se integra $f(x, y)$ con respecto a x entre los límites a y b. Esta integral

$$\phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

es una función del parámetro y, la cual se integra entre los límites a y x para obtener la integral doble. En símbolos,

$$\iint_R f(x, y)\, dR = \int_\alpha^\beta \phi(y)\, dy, \qquad \phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx,$$

o, más brevemente,

$$\iint_R f(x, y)\, dR = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)\, dx. \tag{9a}$$

Para probar esta proposición regresemos a la definición de integral múltiple (3c). Tomando

$$h = \frac{b-a}{m} \qquad \text{y} \qquad k = \frac{\beta - \alpha}{n},$$

se tiene

$$\iint_R f(x, y)\, dR = \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} f(a + \mu h, \alpha + \nu k)\, hk.$$

Aquí se debe entender que el límite significa que la suma del segundo miembro difiere del valor de la integral en menos que una cantidad positiva previamente asignada ε, arbitrariamente pequeña, únicamente bajo la condición de que tanto el número m como el n sean mayores que una cota N, la cual sólo depende de ε. Introduciendo la expresión[1]

$$\Phi_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} f(a + \mu h, \alpha + \nu k)\, h$$

esta suma puede escribirse en la forma

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Phi_\nu k.$$

Si ahora se elige para ε un valor arbitrariamente fijo y para n un número fijo mayor que N, se sabe que

$$\left| \iint_R f(x, y)\, dR - k \sum_{\nu=1}^{n} \Phi_\nu \right| < \varepsilon$$

sin importar cuál sea el número m, únicamente bajo el supuesto de que sea mayor que N. Si se mantiene n fijo y se hace que m tienda a infinito, la expresión anterior nunca es mayor que ε. De acuerdo con la definición de integral ordinaria, sin embargo, en este proceso de límite, la expresión Φ_ν tiende a la integral

$$\int_a^b f(x, \alpha + \nu k)\, dx = \phi(\alpha + \nu k),$$

y, por lo tanto, se obtiene

$$\left| \iint_R f(x, y)\, dR - k \sum_{\nu=1}^{n} \phi(\alpha + \nu k) \right| \leqq \varepsilon.$$

[1] La idea medular de la demostración que sigue es sencillamente la de resolver el límite doble, a medida que m y n crecen simultáneamente, en dos procesos sucesivos de tomar un sólo límite: primero, $m \to \infty$ cuando n se fija y, a continuación, $n \to \infty$.

Cualquiera que sea el valor de ε, esta desigualdad se cumple para todos los valores de n que sean mayores que un número fijo N, el cual sólo depende de ε. Si ahora se hace tender n hacia ∞ (es decir, se hace tender k hacia cero), entonces, por la definición de "integral" y la continuidad (ver la p. 74) de

$$\int_a^b f(x, y)\,dx = \phi(y),$$

se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} k \sum_{\nu=1}^{n} \phi(\alpha + \nu k) = \int_\alpha^\beta \phi(y)\,dy;$$

de donde

$$\left| \iint_R f(x, y)\,dR - \int_\alpha^\beta \phi(y)\,dy \right| \leqq \varepsilon.$$

Puesto que ε puede elegirse tan pequeño como se desee y el primer miembro es un número fijo, esta desigualdad sólo se puede cumplir si el primer miembro se anula, es decir, si

$$\iint_R f(x, y)\,dR = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)\,dx.$$

Esto da la transformación requerida.

El resultado permite *reducir la integración doble a dos integraciones simples sucesivas.*

Dado que las partes que juegan x y y son intercambiables, no se requiere más demostración para hacer ver que también se cumple la ecuación

$$\iint_R f(x, y)\,dR = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy \tag{9b}$$

b. Cambio del orden de integración. Derivación bajo el signo integral

Las dos fórmulas (9a), (9b) conducen a la relación

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy \tag{9c}$$

(ya probada en un forma diferente en la p. 80) o, expresado en palabras:

En la integración repetida de una función continua con límites de integración constantes se puede invertir el orden de la integración.

El teorema sobre el cambio del orden de integración tiene muchas aplicaciones. En particular, se usa frecuentemente en el cálculo explícito de integrales simples definidas para las cuales no se puede hallar una integral indefinida.

Como un ejemplo (para más ejemplos ver el Apéndice), considérese la integral

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx,$$

la cual converge para $a > 0$, $b > 0$. Puede expresarse I como una integral repetida en la forma

$$I = \int_0^\infty dx \int_a^b e^{-xy}\, dy.$$

En esta integral repetida impropia no se puede aplicar directamente el teorema de cambio de orden. Sin embargo, si se escribe

$$I = \lim_{T\to\infty} \int_0^T dx \int_a^b e^{-xy}\, dy,$$

cambiando el orden de la integración se obtiene

$$I = \lim_{T\to\infty} \int_a^b \frac{1 - e^{-Ty}}{y}\, dy = \log\frac{b}{a} - \lim_{T\to\infty} \int_a^b \frac{e^{-Ty}}{y}\, dy.$$

En virtud de la relación

$$\int_a^b \frac{e^{-Ty}}{y}\, dy = \int_{Ta}^{Tb} \frac{e^{-y}}{y}\, dy,$$

la segunda integral tiende a cero a medida que T crece; de aquí que

$$\text{(11a)} \qquad I = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \log\frac{b}{a}.$$

De manera semejante se puede probar el teorema general siguiente:

Si $f(t)$ es seccionalmente suave para $t \geqq 0$ y si la integral

$$\int_1^\infty \frac{f(t)}{t}\, dt$$

existe, entonces para a y b positivos

(11b) $$I = \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = f(0) \log \frac{b}{a}.$$

Aquí nuevamente puede expresarse la integral simple como la integral repetida

$$I = \int_0^\infty dx \int_b^a f'(xy)\, dy$$

y cambiarse el orden de la integración.

c. *Reducción de integrales dobles a integrales simples para regiones más generales*

Por una simple extensión de los resultados ya obtenidos, pueden deducirse resultados análogos para regiones más generales que los rectángulos. Empecemos por considerar una *región convexa R,* es decir, una región cuya curva frontera no es cortada por recta alguna en más de dos puntos, a menos que todo el segmento rectilíneo entre estos dos puntos sea parte de la frontera (Fig. 4.4). Supóngase que la

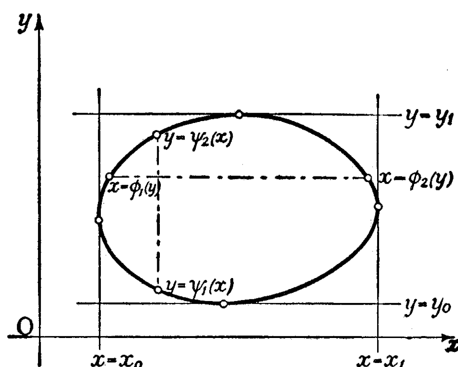


Figura 4.4 Región convexa general de integración.

región se encuentra entre las *rectas de soporte* (es decir, rectas que contienen a un punto frontera de R pero no separan a dos puntos

cualesquiera de R) $x = x_0$, $x = x_1$ y $y = y_0$, $y = y_1$, respectivamente. Como la coordenada x para cualquier punto de R está en el intervalo $x_0 \leqq x \leqq x_1$ y la coordenada y en el intervalo $y_0 \leqq y \leqq y_1$, considérense las integrales

$$\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y)\, dx$$

y

$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\, dy,$$

que se toman a lo largo de los segmentos en los que la rectas $y =$ constante y $x =$ constante, respectivamente, se intersectan con la región. Aquí $\phi_2(y)$ y $\phi_1(y)$ denotan las abscisas de los puntos en los cuales la frontera de la región se intersecta con la recta $y =$ constante, y $\psi_2(x)$ y $\psi_1(x)$ denotan las ordenadas de los puntos en los cuales la frontera se intersecta con las rectas $x =$ constante. Por lo tanto, la integral

$$\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y)\, dx$$

es una función del parámetro y, donde el parámetro aparece tanto bajo el signo integral como en los límites superior e inferior; se cumple una proposición semejante para la integral

$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\, dy$$

como una función de x. Entonces, la descomposición en integrales repetidas está dada por las ecuaciones

$$\iint_R f(x, y)\, dR = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y)\, dx \tag{12}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Para probar ésto elíjase primero una sucesión de puntos sobre el arco $y = \psi_2(x)$, siendo la distancia entre puntos sucesivos menor que un número positivo δ. Unanse los puntos sucesivos por medio de trayectorias, consistente cada una de ellas de un segmento rectilíneao horizontal y uno vertical que se encuentren en R. De modo semejante

se trata la frontera inferior $y = \psi_1(x)$, eligiendo puntos con las mismas abscisas que los de la frontera superior. Así se obtiene una región $\bar{R}$ en R, la cual consiste de un número finito de rectángulos; la frontera de $\bar{R}$ por arriba y por abajo se representa por medio de las funciones seccionalmente constantes $y = \bar{\psi}_2(x)$ y $y = \bar{\psi}_1(x)$, respectivamente (ver la Fig. 4.5). Por el conocido teorema para los rectángulos, se tiene

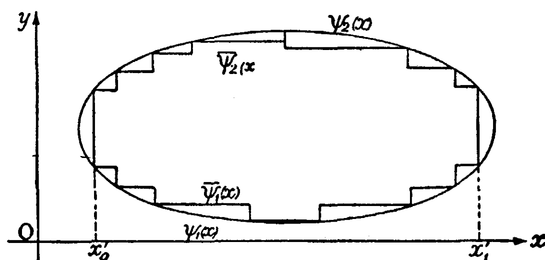


Figura 4.5

$$\iint_{\bar{R}} f(x, y)\, dR = \int_{x_0'}^{x_1'} dx \int_{\bar{\psi}_1(x)}^{\bar{\psi}_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Puesto que $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ son uniformemente continuas, a medida que $\delta \to 0$, las funciones $\bar{\psi}_1(x)$ y $\bar{\psi}_2(x)$ tienden uniformemente a $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$, respectivamente, y, por tanto,

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\bar{\psi}_1(x)}^{\bar{\psi}_2(x)} f(x, y)\, dy = \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\, dy$$

uniformemente en x. Se deduce que

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{x_0'}^{x_1'} dx \int_{\bar{\psi}_1(x)}^{\bar{\psi}_2(x)} f(x, y)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\, dx.$$

Por otra parte, conforme $\delta \to 0$, la región $\bar{R}$ tiende a R. De aquí que

$$\lim_{\delta \to 0} \iint_{\bar{R}} f(x, y)\, dR = \iint_R f(x, y)\, dR.$$

Combinando las tres ecuaciones, se tiene

$$\iint_R f(x, y)\, dR = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

La otra proposición se puede establecer de modo semejante.

Puede obtenerse un argumento semejante si se abandona la hipótesis de convexidad y se consideran regiones de la forma indicada en la Fig. 4.6. Simplemente se supone que la curva frontera de la

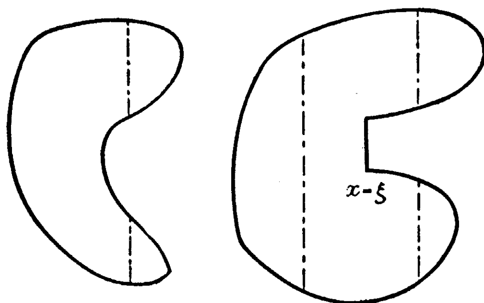


Figura 4.6 Regiónes no convexas de integración.

región se intersecta con cualquier paralela al eje x y con cualquier paralela al eje y en un número acotado de puntos o intervalos. Entonces, por $\int f(x, y)\, dy$, debe entenderse la suma de las integrales de la función $f(x, y)$ para una x fija, tomadas sobre todos los intervalos que la recta $x =$ constante tiene en común con la región cerrada. Para regiones no convexas el número de estos intervalos puede ser mayor que la unidad. Este puede cambiar súbitamente en un punto $x = \xi$ (como en la Fig. 4.6, derecha) de tal manera que la expresión $\int f(x, y)\, dy$ tenga una discontinuidad por salto en este punto. Sin embargo, sin cambios esenciales en la demostración, la resolución de la integral doble

$$\iint_R f(x, y)\, dR = \int dx \int f(x, y)\, dy$$

sigue siendo válida, tomándose la integración con respecto a x a lo largo de todo el intervalo $x_0 \leqq x \leqq x_1$ sobre el cual se encuentra la región R. Naturalmente, también se cumple la resolución correspondiente

$$\iint_R f(x, y)\, dR = \int dy \int f(x, y)\, dx$$

En el ejemplo del círculo definido por $x^2 + y^2 \leqq 1$, se tiene

$$\iint_R f(x, y)\, dR = \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy.$$

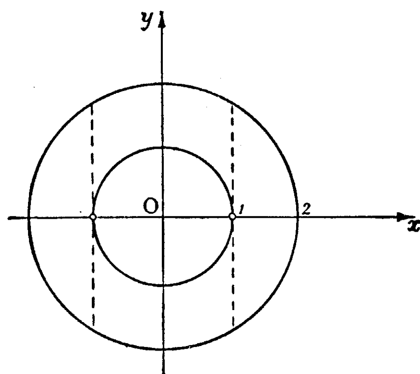


Figura 4.7 Anillo circular como región de integración.

Si la región es un anillo circular entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$ (Fig. 4.7), entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dy + \int_{1}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dy$$

$$+ \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy + \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dy.$$

Como un ejemplo final, tómese como región R un triángulo (Fig. 4.8) limitado por las rectas $x = y$, $y = 0$, y $x = \alpha$ $(\alpha > 0)$. Intergrando primero, ya sea con respecto a x, o ya sea con respecto a y, se obtiene

(13a)
$$\iint_R f(x, y)\, dR = \int_0^{\alpha} dx \int_0^{x} f(x, y)\, dy$$
$$= \int_0^{\alpha} dy \int_y^{\alpha} f(x, y)\, dx.$$

En particular, si $f(x, y)$ sólo depende de y, la fórmula da

(13b)
$$\int_0^{\alpha} dx \int_0^{x} f(y)\, dy = \int_0^{\alpha} f(y)(\alpha - y)\, dy.$$

A partir de ésto se ve que si se integra nuevamente la integral indefinida, $\int_0^x f(y)\, dy$, de una función $f(y)$, el resultado se puede expresar por medio de una integral simple (ver el Volumen I, p. 320).

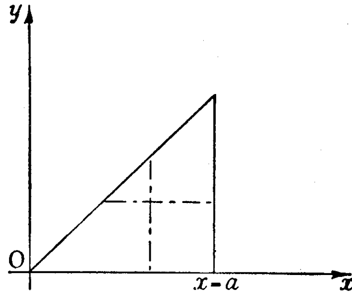


Figura 4.8 Triángulo como región de integración.

d. Extensión de los resultados a regiones en varias dimensiones

Los teoremas correspondientes en más de dos dimensiones son tan análogos a los ya dados que basta con enunciarlos sin demostración. Si primero se consideran la región rectangular $x_0 \leqq \leqq x \leqq x_1, y_0 \leqq y \leqq y_1, z_0 \leqq z \leqq z_1$, y una función $f(x,y,z)$ continua en esta región, la integral triple

$$V = \iiint_R f(x, y, z)\, dR$$

se puede reducir de varias maneras a integrales simples o a integrales dobles. Así,

$$\text{(14a)} \qquad \iiint_R f(x, y, z)\, dR = \int_{z_0}^{z_1} dz \iint_B f(x, y, z)\, dx\, dy.$$

Aquí

$$\iint_B f(x, y, z)\, dx\, dy$$

es la integral doble de la función, tomada sobre el rectángulo B descrito por $x_0 \leqq x \leqq x_1, y_0 \leqq y \leqq y_1, z$ manteniéndose z constante como un parámetro durante esta integración, de modo que la integral doble es una función del parámetro z. Cualquiera de las coordenadas restantes, x y y, se puede singularizar en la misma forma.

Es más, la integral triple V también se puede representar como una integral repetida en la forma de una sucesión de tres integraciones simples. En esta representación, considérese primero la expresión

$$\int_{z_0}^{z_1} f(x, y, z)\, dz,$$

manteniéndose fijas x y y y, a continuación, considérese

$$\int_{y_1}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} f(x, y, z)\, dz,$$

manteniéndose x fija. Por último, obténgase

$$V = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} f(x, y, z)\, dz. \tag{14b}$$

En esta integral repetida pudo haberse integrado, con igual propiedad, primero con respecto a x, después con respecto a y y, finalmente, con respecto a z y pudo haberse hecho cualquier otro cambio en el orden de la integración, ya que la integral repetida simple es igual a la integral triple. Por lo tanto, se tiene el teorema siguiente:

Una integral repetida de una función continua en toda una región rectangular cerrada es independiente del orden de integración.

La manera en la que se debe realizar la resolución para regiones no rectangulares en tres dimensiones casi no requiere mención especial.[1] Nos contentaremos con escribir la resolución para una región esférica $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$:

$$\iiint_R f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{+\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz. \tag{15}$$

4.6 Transformación de integrales múltiples

a. Transformación de integrales en el plano

La introducción de una nueva variable de integración es uno de los métodos principales para transformar y simplificar las integrales simples. La introducción de nuevas variables también es extremadamente importante para las integrales múltiples. A pesar de su reducción a integrales simples, la evaluación explícita de las integrales múltiples generalmente es más difícil que para una variable independiente y es menos probable la integración en términos de funciones elementales. Sin embargo, a menudo se pueden evaluar esas integrales introduciendo nuevas variables, en lugar de las originales, bajo el signo integral. Muy aparte de la cuestión de la evaluación explícita de las integrales dobles, la teoría de la transformación es importante debido al dominio completo del concepto de integral que proporciona.

[1] Para una demostración general, ver el Apéndice, p. 592.

En la p. 378 ya ha sido indicada la importante transformación especial a coordenadas polares. Aquí se procederá de inmediato con las transformaciones generales. Primero, considérese el caso de una integral doble

$$\iint_R f(x, y)\, dR = \iint f(x, y)\, dx\, dy,$$

tomada sobre una región R del plano x, y. Supóngase que las ecuaciones

$$x = \phi(u, v), \qquad y = \psi(u, v)$$

dan una aplicación biunívoca de la región R sobre la región cerrada R' del plano u, v. Supóngase que en la región R las funciones ϕ y ψ tienen derivadas parciales continuas de primer orden y que su jacobiano

$$D = \begin{vmatrix} \phi_u & \phi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} = \phi_u\psi_v - \psi_u\phi_v$$

nunca se anula en R. Más concretamente, establézcase la hipótesis de que el sistema de funciones $x = \phi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ posee un inverso único $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$ (p. 198). Además, las dos familias de curvas $u =$ constante y $v =$ constante forman una red sobre la región R.

Consideraciones heurísticas sugieren fácilmente la manera en que la integral $\iint_R f(x, y)dR$ puede expresarse como una integral con respecto a u y v. Naturalmente se piensa en calcular la integral doble $\iint f(x, y)dR$ abandonando la subdivisión rectangular de la región R y, en su lugar, usando una subdivisión en subregiones R_i por medio de curvas de la red $u =$ constante o $v =$ constante. Por lo tanto, considérense los valores $u = \nu h$ y $v = \mu k$, donde $h = \Delta u$ y $k = \Delta v$ son números dados y ν, μ toman todos los valores enteros tales que las rectas $u = \nu h$ y $v = \mu k$ se intersecten con R' (de modo que sus imágenes son curvas en R). Estas curvas definen un cierto número de mallas y para las subregiones R_i se eligen aquellas mallas que se encuentran en el interior de R (Figs. 4.9 y 4.10). Ahora se tiene que encontrar el área de esas mallas.

Si la malla, en lugar de estar limitada por curvas, fuera un paralelogramo con vértices correspondientes a los valores (u_ν, v_μ), $(u_\nu + h, v_\mu)$, $(u_\nu, v_\mu + k)$, y $(u_\nu + h, v_\mu + k)$, entonces, por una fórmula de la geometría analítica (ver el Capítulo 2, p. 219), el área de la malla sería el valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} \phi(u_\nu + h, v_\mu) - \phi(u_\nu, v_\mu) & \phi(u_\nu, v_\mu + k) - \phi(u_\nu, v_\mu) \\ \psi(u_\nu + h, v_\mu) - \psi(u_\nu, v_\mu) & \psi(u_\nu, v_\mu + k) - \psi(u_\nu, v_\mu) \end{vmatrix},$$

el cual es aproximadamente igual a

$$\begin{vmatrix} \phi_u(u_\nu, v_\mu) & \phi_v(u_\nu, v_\mu) \\ \psi_u(u_\nu, v_\mu) & \psi_v(u_\nu, v_\mu) \end{vmatrix} hk = hkD.$$

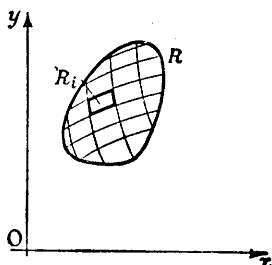


Figura 4.9

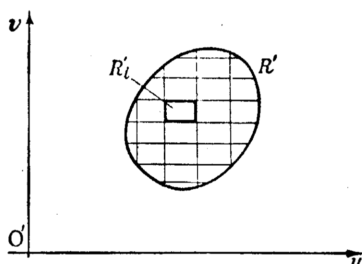


Figura 4.10

Al multiplicar esta expresión por el valor de la función f en la malla correspondiente, sumando sobre todas las regiones R_i que se encuentran completamente dentro de R y, después, pasando al límite conforme $h \to 0$ y $k \to 0$, se obtiene la expresión

$$\iint_R f(\phi(u, v), \psi(u, v)) |D| \, du \, dv$$

para la integral, transformada a las nuevas variables.

Sin embargo, esta discusión está incompleta ya que no se ha demostrado que es lícito remplazar las mallas curvilíneas por paralelogramos, o remplazar el área de tal paralelogramo por la expresión $|\phi_u\psi_v - \psi_u \phi_v| hk$; es decir, no se ha demostrado que el error introducido de esta manera se anula en el límite a medida que $h \to 0$ y $k \to 0$. En lugar de completar la demostración haciendo las estimaciones apropiadas (las cuales se harán en el Apéndice), por el momento es preferible probar la fórmula de transformación en una forma un tanto diferente, la cual puede extenderse subsecuentemente de modo directo a regiones de dimensiones superiores.

Con este fin se aplicarán los resultados del Capítulo 3 (p. 311) y se llevará a cabo la transformación de las variables x, y a las nuevas

variables u, v en dos pasos en lugar de uno. Se remplazan las variables x, y por las nuevas variables x, v a través de las ecuaciones

$$x = x, \qquad y = \Phi(v, x).$$

Aquí se supone que la expresión Φ_v no se anula en punto alguno de la región R (digamos, que Φ_v es mayor que cero en todo punto), y que la región R completa se puede aplicar en una forma biunívoca sobre la región B del plano x, v. Entonces se aplica esta región B en una forma biunívoca sobre la región R' del plano u, v por medio de una segunda transformación

$$x = \Psi(u, v), \qquad v = v,$$

donde se supone además que la expresión Ψ_u es positiva en toda la región B. Efectúese ahora la transformación de la integral $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ en dos pasos. Se empieza con una subdivisión de la región B en subregiones rectangulares de lados $\Delta x = h$ y $\Delta v = k$ limitadas por las rectas x = constante = x_ν y v = constante = v_μ en el plano x, v Esta subdivisión de B corresponde a una subdivisión de la región R en subregiones R_i, estando cada subregión limitada por dos rectas paralelas $x = x_\nu$ $x = x_\nu + h$ y por arcos de las dos curvas $y = \Phi(v_\mu, x)$ y $y = \Phi(v_\mu + k, x)$ (Figs. 4.11 y 4.12). Por la interpretación elemental de la integral simple, el área de la subregión (Fig. 4.13) es

$$\Delta R_i = \int_{x_\nu}^{x_\nu+h} [\Phi(v_\mu + k, x) - \Phi(v_\mu, x)]\, dx.$$

Por el teorema del valor medio del cálculo integral, ésto se puede escribir en la forma

$$\Delta R_i = h[\Phi(v_\mu + k, \bar{x}_\nu) - \Phi(v_\mu, \bar{x}_\nu)],$$

donde $\bar{x}_\nu$ es un número entre x_ν y $x_\nu + h$. Por el teorema del valor medio del cálculo diferencial, finalmente se convierte en

$$\Delta R_i = hk\Phi_v(\bar{v}_\mu, \bar{x}_\nu),$$

donde $\bar{v}_\mu$ denota un valor entre v_μ y $v_\mu + k$, de modo que $(\bar{v}_\mu, \bar{x}_\mu)$ son las coordenadas de un punto de la subregión en B bajo consideración. Por lo tanto, la integral sobre R es el límite de la suma

$$\sum f_i\, \Delta R_i = \sum hkf(\bar{x}_\nu, \Phi(\bar{v}_\mu, \bar{x}_\nu))\Phi_v(\bar{v}_\mu, \bar{x}_\nu)$$

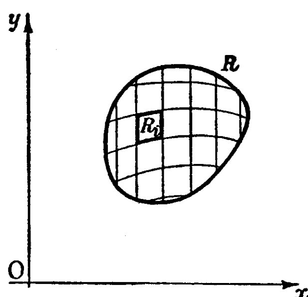


Figura 4.11

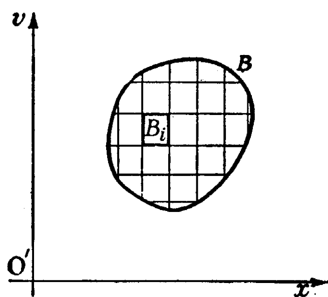


Figura 4.12

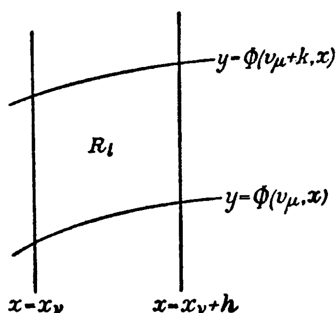


Figura 4.13

conforme $h \to 0$, $k \to 0$. Se ve inmediatamente que la expresión de la derecha tiende a la integral

$$\iint_B f(x, y)\Phi_v \, dx \, dv \qquad (y = \Phi(v, x))$$

tomada sobre la región B. Por consiguiente

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \iint_B f(x, y)\Phi_v \, dx \, dv.$$

Aplíquese ahora a la integral de la derecha exactamente el mismo argumento que se empleó para $\iint_R f(x, y) \, dx \, dy$ y transfórmese la región B en la región R' por medio de las ecuaciones $x = \Psi(u, v)$, $v = v$.

Entonces la integral sobre B se convierte en una integral sobre R' con un integrando de la forma $f(x, y)\ \Phi_v\Psi_u$, a saber,

$$\iint_{R'} f(x, y)\Phi_v\Psi_u \, du \, dv.$$

Aquí las cantidades x y y se deben expresar en términos de las variables independientes u y v, por medio de las dos transformaciones anteriores. Por lo tanto, se ha probado la fórmula de transformación.

(16a) $$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{R'} f(x, y)\Phi_v\Psi_u\, du\, dv.$$

Introduciendo la transformación directa $x = \phi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ las fórmulas se pueden poner inmediatamente en la forma dada anteriormente. Porque

$$\frac{d(x, y)}{d(x, v)} = \Phi_v \qquad \text{y} \qquad \frac{d(x, v)}{d(u, v)} = \Psi_u,$$

y, por tanto, por el Capítulo 3 (p. 305), se tiene

$$D = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \Phi_v\Psi_u.$$

Así, se ha establecido la fórmula de transformación, con la condición de que la transformación $x = \phi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ se pueda resolver en una sucesión de dos transformaciones primitivas de las formas[1] $x = x$, $y = \Phi(v, x)$ y $v = v$, $x = \Psi(u, v)$.

No obstante, en el Capítulo 3 (p. 312) se vio que, para $D \neq 0$, una región cerrada R puede subdividirse en un número finito de regiones en cada una de las cuales es posible esa resolución, excepto quizá que pueda ser necesario intercambiar u y v, pero ésto no afecta el valor de la integral. Así se llega al resultado general siguiente:

Si la transformación $x = \phi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ representa una aplicación biunívoca continua de la región cerrada R, mensurable según Jordan, del plano[1], *y sobre una región R' del plano u, v y si las funciones ϕ y ψ tienen primeras derivadas continuas y su jacobiano*

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \phi_u\psi_v - \psi_u\phi_v$$

es diferente de cero en todo punto, entonces

(16b) $$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R f(\phi(u, v), \psi(u, v)) \left|\frac{d(x, y)}{d(u, v)}\right| du\, dv.$$

[1] Arriba se ha supuesto que las dos derivadas Φ_v y Φ_u son positivas, pero se ve con facilidad que ésta no es una restricción seria. Si no se satisface, simplemente se tiene que remplazar $\Phi_v\Psi_u$ por su valor absoluto, en la fórmula (16a).

Para completar la exposición, agreguemos que la fórmula de transformación sigue siendo válida si el determinante $d(x, y)/d(u, v)$ se anula, sin invertir su signo, en un número finito de puntos aislados de la región, porque entonces sólo se tienen que eliminar estos puntos de R encerrándolos en pequeños círculos de radio ρ. La demostración es válida para la región restante. Si entonces se hace tender ρ a cero, continúa cumpliéndose la fórmula de transformación para la región R en virtud de la continuidad de todas las funciones que intervienen. Este hecho nos permite introducir coordenadas polares con el origen en el interior de la región; porque el jacobiano, siendo igual a r, se anula en el origen.

En el Capítulo 5 regresaremos a las transformaciones de las integrales, y se asignará un papel al signo del jacobiano en relación con integrales sobre variedades *orientadas*. En el Apéndice se dará un método diferente para probar la fórmula de transformación.

b. Regiones de más de dos dimensiones

Por supuesto, se puede proceder en la misma forma con regiones en el espacio de tres o más dimensiones y obtener el siguiente resultado general:

Si se aplica una región cerrada R, mensurable según Jordan, del espacio x, y, z, . . . sobre una región R' del espacio u, v, w, . . . por medio de una transformación biunívoca cuyo jacobiano

$$\frac{d(x, y, z, \ldots)}{d(u, v, w, \ldots)}$$

es diferente de cero en todo punto, entonces se cumple la fórmula de transformación

$$\iint \cdots \int_R f(x, y, z, \ldots)\, dx\, dy\, dx \ldots \tag{17}$$

$$= \iint \cdots \int_{R'} f(x, y, z, \ldots) \left| \frac{d(x, y, z, \ldots)}{d(u, v, w, \ldots)} \right| du\, dv\, dw \ldots$$

Como una aplicación especial se pueden obtener las fórmulas de transformación para las coordenadas polares y esféricas. Para las cordenadas polares en el plano, escríbase r y θ en lugar de u y v e

inmediatamente se obtiene $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$ (ver la p. 300). Para las coordenadas esféricas en el espacio, definidas por las ecuaciones

$$x = r\cos\phi \operatorname{sen}\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \qquad z = r\cos\theta,$$

en las cuales ϕ varía desde 0 hasta 2π, θ desde 0 hasta π, y r desde 0 hasta $+\infty$, se identifican u, v, w con r, θ, ϕ; entonces para el jacobiano se obtiene

$$\frac{d(x, y, z)}{d(r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \cos\phi \operatorname{sen}\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & r\operatorname{sen}\phi\cos\theta & r\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\operatorname{sen}\theta.$$

(El valor r^2 sen θ se obtiene fácilmente, desarrollando en términos de los menores de la tercera columna.) Por lo tanto, la transformación a coordenadas esféricas en el espacio está dada por la fórmula

$$\iiint_R f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{R'} f(x, y, z) r^2 \operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\phi.$$

Como en el caso correspondiente en el plano, también se puede llegar a la fórmula de transformación sin usar la teoría general. Sólo se tiene que partir de una subdivisión en el espacio dada por las esferas $r =$ constante, los conos $\theta =$ constante y los planos $\phi =$ constante Los detalles de este método elemental pueden dejarse al lector.

Para las coordenadas esféricas, no se satisfacen las hipótesis establecidas cuando $r = 0$ ó $\theta = 0, \pi$ puesto que entonces se anula el jacobiano. Como en el caso del plano, nos podemos convencer fácilmente de que, sin embargo, la fórmula de transformación sigue siendo válida.

Ejercicios 4.6

1. Realizar las integraciones siguientes:

(a) $\int_0^a \int_0^b xy(x^2 - y^2)\,dy\,dx$

(b) $\int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x + y)\,dy\,dx$

(c) $\int_0^e \int_0^2 \frac{1}{xy}\,dy\,dx$

(d) $\int_0^a \int_0^b xe^{xy}\, dy\, dx$

(e) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2\, dy\, dx.$

(f) $\int_0^2 \int_0^{2-x} y\, dy\, dx$

2. $\iint x^2y^2\, dx\, dy$ sobre el círculo $x^2 + y^2 \leqq 1.$
3. $\iint \frac{x^3 + y^3 - 3xy(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\, dx\, dy$ sobre el círculo $x^2 + y^2 \leqq 1.$
4. Encontrar el volumen entre el plano x, y y el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$.
5. Evaluar la integral

$$\iint \frac{dx\, dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

tomada
(a) sobre un lazo de la lemniscata $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0,$
(b) sobre el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, \sqrt{3})$.

6. Evaluar la integral

$$\iiint |xyz|\, dx\, dy\, dz$$

tomada sobre todo el elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leqq 1.$

7. Encontrar el volumen común a los dos cilindros $x^2 + z^2 < 1$ y $y^2 + z^2 < 1.$
8. Por integración, encontrar el volumen de la menor de las dos porciones en las cuales una esfera de radio r es dividida por un plano cuya distancia perpendicualr al centro es $h(<r)$.
9. $\iiint (x^2 + y^2 + z^2)\, xyz\, dx\, dy\, dz$ en toda la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqq r^2.$
10. $\iiint z\, dx\, dy\, dz$ en toda la región definida por las desigualdades $x^2 + y^2 \leqq z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1.$
11. $\iiint (x + y + z)\, x^2y^2z^2\, dx\, dy\, dz$ en toda la región $x + y + z \leqq 1$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0.$
12. $\iiint \frac{dx\, dy\, dz}{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}$ en toda la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1.$
13. $\iiint \frac{dx\, dy\, dz}{x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2}$ en toda la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1.$
14. $\iint \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ sobre el cuadrado $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1.$

15. Probar que si $f(x, y)$ es una función continua sobre un dominio D en el plano x, y y si para cada región R contenida en ese dominio $\int_R f(x, y)\,dx\,dy = 0$, entonces $f(x, y)$ es idénticamente 0.
16. Probar que

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = ae^{-a^2}\int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{a^2+u^2}\,du,$$

donde R denota el semiplano $x \geqq a > 0$, aplicando la transformación

$$x^2 + y^2 = u^2 + a^2, \qquad y = vx.$$

17. Probar que

$$\left|\iint (u_x{}^2 + u_y{}^2)\,dx\,dy\right|$$

es invariante ante la inversión.
18. Evaluar la integral

$$I = \iiint \cos(x\xi + y\eta + z\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

tomada sobre toda la esfera $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqq 1$.
19. En

$$I = \int_2^4 dx \int_{4/x}^{(20-4x)/(8-x)} (y-4)\,dy$$

cambiar el orden de la integración y evaluar la integral.

4.7 Integrales múltiples impropias

En el caso de las funciones de una variable se encontró necesario extender el concepto de integral a otras funciones que no son continuas en el intervalo de integración. En particular, se consideraron las integrales de funciones con discontinuidades por salto y de funciones con valores infinitos; también se consideraron integrales sobre intervalos infinitos de integración. Ahora se discutirán las extensiones correspondientes del concepto de integral para funciones de varias variables.

La noción de "integral", como se definió en la p. 432 (la cual llamaremos *integral de Riemann*), no está ligada a la continuidad del integrando $f(x, y)$. Mientras f sea acotada en la región de integración R, siempre se pueden formar las sumas superior e inferior correspondientes a una división de R en conjuntos R_i mensurables según Jordan. Se dirá que *f es integrable* (más concretamente, *integrable según Riemann*) si estas sumas superior e inferior tienden al mismo límite a medida que la división de R se hace más fina indefinidamen-

te. Este es esencialmente el procedimiento que se seguirá en la exposición dada en el Apéndice a este capítulo.[1] Hablando estrictamente, la integral de cualquier función integrable es *propia,* aún cuando la función sea discontinua.

Sin embargo, en esta sección sólo se presupone la existencia de integrales de funciones continuas y se trata, por medio del proceso de llevar al límite, de extender la noción de integral y probar su existencia para clases más amplias de funciones. Se deja abierta la cuestión de si las integrales *impropias* definidas de esta manera son en realidad idénticas a las integrales propias de Riemann que se obtienen directamente a partir de las sumas superior e inferior de subdivisiones de R.[2]

a. Integrales impropias de funciones sobre conjuntos acotados

Las funciones que se desea integrar son, en la mayoría de los casos, continuas en una cierta región R excepto en puntos aislados o a lo largo de ciertas curvas, donde las funciones no están definidas o no están acotadas, o donde su continuidad es dudosa. En todos los casos que nos interesan, el conjunto de puntos de comportamiento especial para la función tiene área 0 (la palabra "área" se usa aquí exclusivamente en el sentido de "contenido" o "medida de Jordan").[3] Entonces se puede eliminar de R un conjunto s de área pequeña que contenga a los puntos excepcionales, integrar f sobre lo que resta y tomar el límite de las integrales de f sobre $R - s$ conforme el área de s tiende a 0. Si este límite existe, define a la integral "impropia" de f sobre R. Como no se desea que el límite dependa de la manera particular en la que se aproxima el conjunto R, nos restringiremos a la situación más sencilla (correspondiente a la "convergencia absoluta", en contraste con la "convergencia condicional", en las series infinitas) donde no sólo f sino también f tiene una integral impropia.

Supóngase que la región de integración R es acotada y tiene un área. Supóngase también que se puede hallar una sucesión "mo-

---

[1]Allí sólo se usan subdivisiónes en cuadrados al definir la integral. Pero se puede demostrar que esta restricción no es esencial.

[2]En realidad, siempre es éste el caso cuando f está acotada y es continua excepto posiblemente sobre un conjunto de puntos de contenido 0, siempre que R sea acotado y mensurable según Jordan.

[3]Se necesitan nociones más refinadas, como la integral de Lebesgue, para integrar algunas funciones cuyos puntos de discontinuidad forman un conjunto de medida positiva de Jordan.

nótona" de subregiones cerradas R_n,)es decir, $R_n \subset R_{n+1} \subset R$) en cada una de las cuales $f(x, y)$ está definida y es continua. Supóngase además que las áreas $A(R_n)$ de los conjuntos R_n tienden al área $A(R)$ y que las integrales

(19a) $$\iint_{R_n} |f(x, y)| \, dx \, dy$$

son acotadas independientemente de n. Entonces

(19b) $$I = \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x, y) \, dx \, dy$$

existe. Se demostrará que este límite es independiente de la sucesión de aproximación R_n, particular y se usará para definir la integral impropia

(19c) $$I = \iint_R f(x, y) \, dx \, dy.$$

Antes de probar este teorema se ilustrarán las ideas por medio de algunos ejemplos típicos.

La función

$$f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

se vuelve infinita en el origen del plano x, y. Por lo tanto, para calcular la integral de f sobre una región R que contiene al origen, por ejemplo, sobre el círculo $x^2 + y^2 \leqq 1$, se debe eliminar el origen rodeándolo con una región s cuya área tienda a 0. Entonces debe investigarse la convergencia de la integral tomada sobre la región residual $R - s$. Tómese como s el disco circular s_n de radio $1/n$. Sea R_n la región obtenida a partir de R eliminando s_n. Considérese que, a su vez, R está contenida en un círculo de radio ρ alrededor del origen. Transformando a coordenadas polares se tiene

$$\iint_{R_n} |f| \, dx \, dy = \iint_{R_n} |f| r \, dr \, d\theta \leqq \int_{1/n}^{\rho} dr \int_0^{2\pi} d\theta \, r |\log r|$$

$$= 2\pi \int_{1/n}^{\rho} r |\log r| \, dr.$$

Así, la transformación proporciona un nuevo integrando $r|\log r|$ que está acotado e incluso es continuo si se define como 0 para $r = 0$. De aquí que, uniformemente para toda n.

$$\iint_{R_n} |f|\, dx\, dy \leqq 2\pi \int_0^\rho r|\log r|\, dr.$$

Se concluye inmediatamente la existencia de la integral impropia

$$\iint_R \log \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} \log \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

Por ejemplo, si R es el disco unitario se encuentra que

(20a) $$\iint_{x^2+y^2<1} \log \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta\, r \log r$$

$$= 2\pi \int_0^1 r \log r\, dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2} r^2 \log r - \frac{1}{4} r^2\right)_0^1$$

$$= -\frac{\pi}{2}.$$

Como un ejemplo más, considérese la integral

(20b) $$\iint_R \frac{dx\, dy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^\alpha}}$$

tomada sobre la misma región. Aquí se obtiene inmediatamente

$$\iint_{R_n} |f|\, dx\, dy \leqq \int_{1/n}^\rho dr \int_0^{2\pi} d\theta\, |f|\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_{1/n}^\rho r^{1-\alpha}\, dr.$$

En el Volumen I (p. 305) se vio que la integral $\int_0^\rho r^{1-\alpha}\, dr$ es convergente si y sólo si $\alpha < 2$. Por lo tanto, se concluye que, del mismo modo, la integral doble (20b) es convergente si y sólo si $\alpha < 2$. Esta observación puede fácilmente convertirse por extensión en un criterio *suficiente* (pero de ningún modo necesario) para la convergencia de las integrales dobles impropias, aplicable en muchos casos especiales.

Si la función $f(x, y)$ es continua en todo punto de la región R excepto en uno, el cual se tomará como el origen, y si existen una cota fija M y un número positivo $\alpha < 2$ tales que

(21a) $$|f(x, y)| < \frac{M}{\sqrt{(x^2 + y^2)^\alpha}}$$

en todo punto en R para $(x, y) \neq (0, 0)$, *entonces la integral*

(21b) $$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

converge.

La integral triple

$$\iiint_R \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}}$$

puede tratarse en una forma semejante. Si R contiene al origen, se introducen coordenadas esféricas y se obtiene

$$\iiint_R r^{2-\alpha} \operatorname{sen} \theta\, dr\, d\phi\, d\theta.$$

Una discusión semejante a la anterior demuestra que se tiene la convergencia cuando $\alpha < 3$. Nuevamente, con más generalidad, se ve que

(22a) $$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

converge si $f(x, y, z)$ es continua en R excepto en el origen, siempre que existan una cota M y una constante $\alpha < 3$ para las cuales

(22b) $$| f(x, y, z) | \leqq \frac{M}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}}.$$

En consecuencia, para una función $g(x, y, z)$, continua en todo punto la integral impropia

(22c) $$\iiint_R \frac{g(x, y, z)}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}}\, dx\, dy\, dz$$

existe si $\alpha < 3$. También pueden existir las integrales impropias para integrandos que son infinitos a lo largo de curvas completas, no sólo en puntos aislados. En el caso más sencillo el integrando es infinito sobre una porción de una recta, digamos un segmento del eje y. En este caso, si la relación

(23) $$|f(x, y)| < \frac{M}{|x|^\alpha}$$

es válida en todo punto de R para $x \neq 0$, donde M es una cota fija y $\alpha < 1$, entonces, una vez más, la integral impropia de f sobre R exis-

te. Para probarlo sólo se tiene que eliminar de R una faja a uno y otro lado del eje y y hacer que el ancho de esta faja tienda a 0.

A veces, integrales como

$$\iint_R \frac{dx\,dy}{x^3},$$

que violan la restricción dada sobre el exponente α, todavía se pueden definir en un sentido "condicional", según el cual el valor depende de la manera precisa en que se lleve a cabo la aproximación a R. Aquí, por ejemplo, la integral se puede definir como el límite de las integrales sobre las regiones que se obtienen eliminando de R una franja *simétrica* con respecto al eje y. Otras aproximaciones pueden conducir a valores diferentes para la integral o incluso a la divergencia.

b. Demostración del teorema general de la convergencia para las integrales impropias

Considérese el conjunto R de área $A(R)$ y una sucesión de subconjuntos cerrados R_n cuyas áreas $A(R_n)$ tienden hacia $A(R)$ cuando $n \to \infty$. Aquí los R_n se amplían monótonamente en el interior de R:

(24a) $$R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \cdots \subset R.$$

Se supone que la función $f(x, y)$ es continua en cada R_n. Es más, debe existir una constante μ tal que

(24b) $$\iint_{R_n} |f(x, y)|\, dx\, dy \leqq \mu$$

para toda n.

Obviamente, debido a (24a), las integrales

$$\iint_{R_n} |f|\, dx\, dy$$

forman una sucesión monótona creciente y acotada y, por tanto, tienen un límite cuando $n \to \infty$. Por el criterio de convergencia de Cauchy, para cada $\varepsilon > 0$ puede hallarse un $N = N(\varepsilon)$ tal que, para $m > n > N(\varepsilon)$,

(24c) $$\iint_{R_m} |f|\, dx\, dy - \iint_{R_n} |f|\, dx\, dy = \iint_{R_m - R_n} |f|\, dx\, dy < \varepsilon.$$

Sea

$$I_n = \iint_{R_n} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Evidentemente, la I también satisface el criterio de Cauchy, puesto que, por (5g),

$$\left| \iint_{R_m} f\, dx\, dy - \iint_{R_n} f\, dx\, dy \right| = \left| \iint_{R_m - R_n} f\, dx\, dy \right|$$
$$\leqq \iint_{R_m - R_n} |f|\, dx\, dy < \varepsilon$$

para $m > n > N(\varepsilon)$. Se concluye que

$$I = \lim_{n \to \infty} \iint_{R_n} f(x, y)\, dx\, dy$$

existe.

Falta por demostrar que el valor I no depende de la sucesión particular de aproximación R_n que se use. Sea S cualquier subconjunto cerrado, mensurable según Jordan, de R en el cual f es continua. Sea M una cota superior para $|f|$ en S. Entonces, por el teorema del valor medio del cálculo integral (ver la p. 440), [1]

$$\left| \iint_S f\, dx\, dy - \iint_{S \cap R_n} f\, dx\, dy \right| = \left| \iint_{S - R_n} f\, dx\, dy \right|$$
$$\leqq \iint_{S - R_n} |f|\, dx\, dy \leqq MA(S - R_n) \leqq MA(R - R_n)$$
$$= M[A(R) - A(R_n)].$$

Se deduce, con base en la hipótesis de que $\lim_{n \to \infty} A(R_n) = A(R)$, que

(24d) $$\iint_S f\, dx\, dy = \lim_{n \to \infty} \iint_{S \cap R_n} f\, dx\, dy$$

Aplicando esta relación a $|f|$ en lugar de a f, y aplicando (24b), se encuentra

(24e) $$\iint_S |f|\, dx\, dy = \lim_{n \to \infty} \iint_{S \cap R_n} |f|\, dx\, dy$$
$$\leqq \lim_{n \to \infty} \iint_{R_n} |f|\, dx\, dy \leqq \mu.$$

[1] Se recuerda al lector que $S \cap R_n$ representa el conjunto de los puntos comunes a S y R_n y $S - R_n$ es el conjunto de los puntos que pertenecen a S pero no a R_n (ver la p. 116):

$$S - R_n = S - S \cap R_n$$

Nuevamente se escribe $A(S - R_n)$ para el área del conjunto $S - R_n$.

De donde se ha extendido la estimación (24b) a subconjuntos más generales S de R.

También se puede extender (24c). Se tiene, usando (24d),

$$(42f)\qquad \left|\iint_S f\,dx\,dy - \iint_{S\cap R_n} f\,dx\,dy\right|$$
$$= \lim_{m\to\infty}\left|\iint_{S\cap R_m} f\,dx\,dy - \iint_{S\cap R_n} f\,dx\,dy\right|$$
$$= \lim_{m\to\infty}\left|\iint_{S\cap(R_m-R_n)} f\,dx\,dy\right| \leqq \lim_{m\to\infty}\iint_{R_m-R_n}\left|f\right|dx\,dy$$
$$= \lim_{m\to\infty}\left(\iint_{R_m}|f|\,dx\,dy - \iint_{R_n}|f|\,dx\,dy\right) < \varepsilon$$

para $n > N(\varepsilon)$. Aquí N no depende del conjunto particular S.

Sea ahora $S_1, S_2, \ldots$ una sucesión de subconjuntos cerrados de R en los que f es continua y para los cuales

$$(24g)\qquad S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \cdots \subset R$$

y

$$(24h)\qquad \lim_{m\to\infty} A(S_m) = A(R).$$

Dado que, por (24e),

$$\iint_{S_m} |f|\,dx\,dy \leqq \mu,$$

se sabe que

$$J = \lim_{m\to\infty}\iint_{S_m} f\,dx\,dy$$

existe. Entonces

$$\left|J - \iint_{S_m} f\,dx\,dy\right| < \varepsilon$$

para todo m lo suficientemente grande. De (24f) se deduce que

$$\left|J - \iint_{S_m\cap R_n} f\,dx\,dy\right| < 2\varepsilon$$

para todos los m, n que sean lo suficientemente grandes. Intercambiando los papeles de los S_m y los R_n, también se tiene

$$\left|I - \iint_{S_m\cap R_n} f\,dx\,dy\right| < 2\varepsilon$$

para todos los m, n suficientemente grandes. De aquí que $|J - I| < 4\varepsilon$ para cualquier número positivo ε, y, en consecuencia, $I = J$, lo cual se tenía que demostrar.

c. Integrales sobre regiones no acotadas

Surge un tipo diferente de integrales impropias cuando el integrando f es continuo pero la región de integración se extiende hasta el infinito. Nuevamente, no se tratará de analizar la situación más general sino que se formulará un criterio de convergencia aplicable a la mayoría de los casos que se presentan en la práctica. Basta con tratar el caso de dos variables independientes.

Considérese un conjunto no acotado R en el que la función f es continua. Se *consume* R por medio de una sucesión monótona de subconjuntos

$$R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \cdots \subset R$$

cada uno de los cuales es cerrado, acotado y mensurable según Jordan. En lugar de la condición previa $\lim_{n\to\infty} A(R_n) = A(R)$, la cual podría no tener sentido para R no acotado, se requiere que todo subconjunto cerrado y acotado de R esté contenido en por lo menos uno de los conjuntos R_m. (Si, por ejemplo, R es el plano completo, pueden elegirse como los R_n los discos circulares de radio n con centro en el origen.) Si el límite

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x, y)\, dx\, dy$$

existe y es independiente de la elección particular de la sucesión de subconjuntos R_n, recibirá el nombre de integral de f sobre R y se le denotará por

$$\iint_R f\, dx\, dy.$$

Entonces se tiene la condición *suficiente* que sigue para la existencia de la integral:

La integral impropia de f sobre el conjunto no acotado R existe si, para una sucesión particular R_n (del tipo descrito), las integrales de $|f|$ sobre los R_n son acotadas uniformemente en n, digamos si

$$\iint_{R_n} |f|\, dx\, dy \leqq \mu$$

para todo n.

La demostración de este criterio de convergencia aplica los mismos argumentos que los usados para las integrales impropias sobre conjuntos acotados, y debe ser realizada como un ejercicio por el lector.

Se ilustrará el teorema con la integral

$$\iint_R e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy,$$

donde la región de integración es el plano x, y completo. Elíjase como la sucesión R_n de subregiones los discos circulares de radio n con centro en el origen, que obviamente satisface todos los requerimientos. Aquí, transformando a coordenadas polares:

$$\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \iint_{x^2+y^2 \leqq n^2} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^n dr \int_0^{2\pi} d\theta\, re^{-r^2}\, dr = 2\pi \int_0^n re^{-r^2}\, dr$$

$$= -\pi e^{-r^2}\Big|_0^n = \pi(1 - e^{-n^2}).$$

Esto prueba lo acotado de las integrales sobre los R_n y, de aquí, la existencia de la integral sobre R. Cuando $n \to \infty$ se encuentra como el valor de la integral impropia dada

$$\iint_R e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \pi(1 - e^{-n^2}) = \pi.$$

Por otra parte, debe obtenerse el mismo límite usando en lugar de los R_n la sucesión S_m de cuadrados

$$-m \leqq x \leqq +m, \qquad -m \leqq y \leqq +m.$$

Aquí se puede hacer uso de hecho de que el integrando es un producto de una función de x y de una función de y (ver la p. 435) y encontrar que

$$\iint_{S_m} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \iint_{S_m} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}\, dx\, dy$$

$$= \left(\int_{-m}^{m} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-m}^{m} e^{-y^2}\,dy\right) = \left(\int_{-m}^{m} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Se concluye que

$$\lim_{m\to\infty} \iint_{R_m} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \left(\int_{\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Como las R_n y las S_m deben proporcionar el mismo valor para la integral sobre R, se encuentra que

(25a) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Aplicando la teoría de las integrales dobles impropias se ha evaluado así una integral simple impropia que tiene una gran importancia en el análisis. Es difícil encontrar directamente este valor, dado que la integral *indefinida* de e^{-x^2} no se puede expresar en términos de funciones elementales.

Este resultado se puede aplicar para evaluar la *función gamma* (ver el Volumen I, p. 308),

(25b) $$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{n-1}\,dt,$$

para el argumento $n = \frac{1}{2}$. La sustitución $t = x^2$ da

(25c) $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Algunos criterios de convergencia, útiles para las integrales impropias sobre regiones no acotadas, se pueden establecer por comparación con las potencias de $\sqrt{x^2+y^2}$. Estos son análogos a los criterios encontrados en la p. 466 para las funciones que son no acotadas cerca del origen. Se encuentra que la integral impropia de una función continua $f(x, y)$sobre una región no acotada R existe si, en todo punto de R, f satisface la desigualdad

(26) $$|f(x,y)| \leqq \frac{M}{\sqrt{(x^2+y^2)^{\alpha}}},$$

donde M y α son constantes fijas y $\alpha > 2$.[1]

Ejercicios 4.7

1. (a) Transformando a coordenadas polares, demostrar que el valor de la integral

$$K = \int_0^{a \operatorname{sen} \beta} \left\{ \int_{y \cot \beta}^{\sqrt{a^2-y^2}} \log(x^2 + y^2)\, dx \right\} dy \qquad \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$$

es $a^2\beta(\log a - \frac{1}{2})$.

(b) Cambiar el orden de integración en la integración original.

2. Integrar

(a) $\displaystyle\iint \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2}\, dx\, dy$ sobre el plano x, y

(b) $\displaystyle\iiint \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}\, dx\, dy\, dz$ sobre el espacio x, y, z.

3. Demostrar que no se puede invertir el orden de la integración en

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{y - x}{(x + y)^3}\, dx \right\} dy$$

4.8 Aplicaciones geométricas

a. Cálculo elemental de volúmenes

El concepto de volumen es el punto de partida de la definición dada de "integral". Aquí se usarán las integrales múltiples con el fin de calcular los volúmenes de varios sólidos.

Por ejemplo, para calcular el volumen del *elipsoide de revolución*

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

[1] «El comportamiento en el infinito y en el origen son "complementarios", en el sentido de que f es integrable cerca del origen si (26a) se cumple para un valor $\alpha < 2$. Por lo tanto, *la integral impropia*

$$\iint \frac{dx\, dy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^{\alpha}}}$$

extendida sobre el plano completo no existe para valor alguno de α.

se escribe la ecuación en la forma

$$z = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Por lo tanto, el volumen de la mitad del [elipsoide] por encima del plano x, y está dado por la integral doble ver (3b)

$$\frac{V}{2} = \frac{b}{a} \iint \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

tomada sobre el círculo $x^2 + y^2 \leqq a^2$. Si se transforma a coordenadas polares, la integral doble se convierte en

$$\iint r \sqrt{a^2 - r^2}\, dr\, d\theta\,,$$

de donde, resolviendo en integrales simples

$$\frac{V}{2} = \frac{b}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r \sqrt{a^2 + r^2}\, dr = 2\pi \frac{b}{a} \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2}\, dr,$$

lo cual da el valor requerido

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

Para calcular el volumen del elipsoide general

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{27a}$$

se hace la transformación

$$x = a\rho \cos\theta, \qquad y = b\rho \operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{d(x, y)}{d(\rho, \theta)} = ab\rho,$$

y para la mitad del volumen se obtiene

$$\frac{V}{2} = c \iint_R \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy = abc \iint_{R'} \rho \sqrt{1 - \rho^2}\, d\rho\, d\theta.$$

Aquí la región R' es el rectángulo $0 \leqq \rho \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$. De donde.

$$\frac{V}{2} = abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\sqrt{1 - \rho^2}\, d\rho = \frac{2}{3} \pi abc$$

o bien.

(27b)
$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Por último, se calculará el volumen de la pirámide encerrada por los tres planos coordenados y el plano $ax + by + cz - 1 = 0$, donde se supone que a, b, y c son positivos. Para el volumen se obtiene

$$V = \frac{1}{c}\iint_R (1 - ax - by)\, dx\, dy,$$

donde la región de integración es el triángulo $0 \leqq x \leqq 1/a$, $0 \leqq y \leqq (1 - ax)/b$ en el plano x, y. Por lo tanto,

$$V = \frac{1}{c}\int_0^{1/a} dx \int_0^{(1-ax)/b} (1 - ax - by)dy.$$

La integración con respecto a y, da

$$(1 - ax)y - \frac{b}{2}y^2 \Big|_0^{(1-ax)/b} = \frac{(1 - ax)^2}{2b},$$

y si se integra nuevamente por medio de la sustitución $1 - ax = t$, se obtiene

$$V = \frac{1}{2bc}\int_0^{1/a} (1 - ax)^2 dx = -\frac{1}{6abc}(1 - ax)^3 \Big|_0^{1/a} = \frac{1}{6abc}.$$

Por supuesto, este resultado concuerda con la regla de la geometría elemental de que el volumen de una pirámide es la tercera parte del producto de la base por la altura.

Para calcular el volumen de un sólido más complicado el sólido se puede subdividir en porciones cuyos volúmenes se puedan expresar directamente por medio de integrales dobles. Sin embargo, posteriormente (en particular, en el capítulo que sigue), se obtendrán expresiones para el volumen limitado por una superficie cerrada, que no requieren de esta subdivisión.

b. Observaciones generales sobre el cálculo de volúmenes. Sólidos de revolución. Volúmenes en coordenadas esféricas

Precisamente como se puede expresar el área de una región plana, R, por la integral doble

$$\iint_R dR = \iint_R dx\,dy,$$

también se puede expresar el volumen de una región tridimensional, R, por la integral

$$V = \iiint_R dx\,dy\,dz$$

sobre la región R. De hecho, este punto de vista corresponde exactamente a la definición de integral dada (ver el Apéndice, p. 517), y expresa el hecho geométrico de que el volumen de una región se puede encontrar al cortar el espacio en cubos idénticos, encontrando el volumen total de los cubos contenidos completamente en R y, a continuación, haciendo que el diámetro de los cubos tienda a cero. La resolución de esta integral para V en una integral $\int dz \iint dx\,dy$ ver (14a), p. 397 expresa el *principio de Cavalieri*, conocido por todos desde la geometría elemental, de acuerdo con el cual el volumen de un sólido queda determinado si se conoce el área de toda sección transversal plana que sea perpendicular a una recta definida, digamos el eje z. La expresión general dada anteriormente para el volumen de una región tridimensional nos permite encontrar inmediatamente varias fórmulas para calcular volúmenes. Con este fin, a menudo resulta útil introducir nuevas variables independientes en la integral, en lugar de x, y, z.

Los ejemplos más importantes están dados por las coordenadas *esféricas* y las coordenadas *cilíndricas*. Calculemos, por ejemplo, *el volumen de un sólido de revolución* que se obtiene haciendo girar una curva $x = \phi(z)$ alrededor del eje z. Supóngase que la curva no cruza el eje z y que el sólido de revolución está limitado arriba y abajo por medio de planos $z =$ constante. Por lo tanto, el sólido está definido por desigualdades de la forma $a \leqq z \leqq b$ y $0 \leqq \sqrt{x^2 + y^2} \leqq \phi(z)$. Su volumen está dado por la integral anterior. En términos de las coordenadas cilíndricas

$$z, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{\rho} = \operatorname{arc\,sen} \frac{y}{\rho}$$

la expresión para el volumen se convierte en

$$V = \iiint_R dx\,dy\,dz = \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\phi(z)} \rho\,d\rho.$$

Si se realizan las integraciones simples, inmediatamente se obtiene

(28a) $$V = \pi \int_a^b \phi(z)^2\, dz.$$

Puede darse también una deducción más intuitiva de esta fórmula (ver el Volumen I, p. 374). Se corta el sólido de revolución en pequeñas capas,

$$z_\nu \leqq z \leqq z_{\nu+1},$$

por medio de planos perpendiculares al eje z y se denotan por m_ν el mínimo y por M_ν el máximo de la distancia $\phi(z)$ al eje, en esta capa. Entonces el volumen de la capa se encuentra entre los volúmenes de dos cilindros con altura

$$\Delta z = z_{\nu+1} - z_\nu$$

y radios m_ν y M_ν, respectivamente. De aquí que

$$\sum m_\nu{}^2\pi\, \Delta z \leqq V \leqq \sum M_\nu{}^2\pi\, \Delta z.$$

Por lo tanto, por la definición de integral ordinaria,

$$V = \pi \int_a^b \phi(z)^2\, dz.$$

Si la región R contiene al origen O de un sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) y si la superficie está dada por una ecuación

$$r = f(\theta, \phi),$$

donde la función $f(\theta, \phi)$ es uniforme, frecuentemente resulta ventajoso usar estas coordenadas esféricas, en lugar de (x, y, z), al calcular el volumen. Si se sustituye el valor del jacobiano

$$\frac{d(x, y, z)}{d(r, \theta, \phi)} = r^2 \operatorname{sen} \theta$$

(como se calculó en la p. 461) en la fórmula de transformación, inmediatamente se obtiene la expresión

$$V = \iiint_R r^2 \operatorname{sen} \theta\, dr\, d\theta\, d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \theta\, d\theta \int_0^{f(\theta, \phi)} r^2\, dr$$

para el volumen. Integrando respecto a r da

(28b) $$V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} f^3(\theta, \phi) \operatorname{sen} \theta\, d\theta.$$

En el caso especial de la esfera, para la cual $f(\theta, \phi) = R$ es constante, ésto inmediatamente proporciona el volumen $(4/3)\pi R^3$.

c. *Area de una superficie curva*

Se ha expresado antes la longitud de una curva por una integral ordinaria (Volumen I, p. 349). Ahora se desea encontrar una expresión análoga para el área de una superficie curva por medio de una integral doble. Se definió la longitud de una curva como el valor límite de la longitud de un polígono inscrito, cuando las longitudes de los lados individuales tienden a cero. Esto sugiere que se defina análogamente el área de una superficie, como sigue: en la superficie curva se inscribe un poliedro formado por triángulos planos, se determina el área del poliedro, se hace más fina la red de triángulos inscrita, haciendo que la longitud del lado más largo tienda a cero y se intenta encontrar el valor límite del área del poliedro. Entonces este valor límite recibiría el nombre de área de la superficie curva. Sin embargo, resulta que esa definición del área no tendría un significado preciso porque, en general, este proceso no proporciona un valor límite definido. Este fenómeno se puede explicar en la siguiente forma: un polígono inscrito en una curva suave siempre tiene la propiedad (expresada por el teorema del valor medio del cálculo diferencial) de que la dirección del lado individual del polígono tiende a la dirección de la curva tan aproximadamente como se desee, si la subdivisión es lo suficientemente fina. Con las superficies curvas la situación es bastante diferente. Los lados de un poliedro inscrito en una superficie curva pueden estar inclinados respecto al plano tangente a la superficie en un punto vecino tan pronunciadamente como se desee, incluso si las caras del poliedro tienen diámetros arbitrariamente pequeños. Por lo tanto, por ningún motivo puede considerarse el área de uno de tales poliedros como una aproximación para el área de la superficie curva. En el Apéndice se considerará detalladamente un ejemplo de este estado de cosas (p. 602).

Sin embargo, en la definición de la longitud de una curva suave es posible, en lugar de usar un polígono *inscrito,* usar con igual propiedad uno *circunscrito,* es decir, un polígono en el que cada uno de sus lados toque a la curva. La definición de la longitud de una curva como el límite de la longitud de un polígono circunscrito se puede extender con facilidad a las superficies curvas, si se modifica primero como sigue: se obtiene la longitud de una curva $y = f(x)$ que tiene una derivada continua $f'(x)$ y que se encuentra entre las abscisas a y

b, subdividiendo el intervalo entre a y b en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en n partes iguales o diferentes, eligiendo un punto arbitrario ξ_ν en el ν-ésimo subintervalo, construyendo la tangente a la curva en este punto y midiendo la longitud l_ν de la porción de esta tangente que esté en la franja $x_\nu \leqq x \leqq x_{\nu+1}$ (Fig. 4.14). Si se hace que n crezca

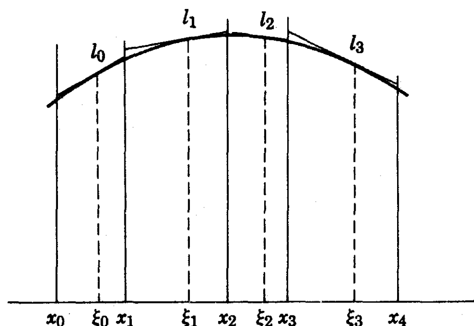


Figura 4.14

más allá de toda cota y, al mismo tiempo, que la longitud del subintervalo más largo tienda a 0, entonces la suma

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} l_\nu$$

tiende a la longitud de la curva, es decir, a la integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Esta afirmación se deduce del hecho de que

$$l_\nu = (x_{\nu+1} - x_\nu)\sqrt{1 + f'(\xi_\nu)^2}.$$

Ahora se definirá el área de una superficie curva en forma semejante. Empecemos por considerar una superficie representada por una función $z = f(x,y)$ con derivadas continuas sobre una región R del plano x, y Subdivídase R en n subregiones $R_1, R_2, \ldots, R_n$ con áreas $\Delta R_1, \ldots, \Delta R_n$, respectivamente, y en estas subregiones elíjanse los puntos $(\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$. En el punto de la superficie con las coordenadas ξ_ν, η_ν y $\zeta_\nu = f(\xi_\nu, \eta_\nu)$ constrúyase el plano tangente,

y encuéntrese el área de la porción de este plano que se encuentre por encima de la región R_ν (Fig. 4.15). Si α_ν es el ángulo que el plano tangente

$$z - \zeta_\nu = f_x(\xi_\nu, \eta_\nu)(x - \xi_\nu) + f_y(\xi_\nu, \eta_\nu)(y - \eta_\nu)$$

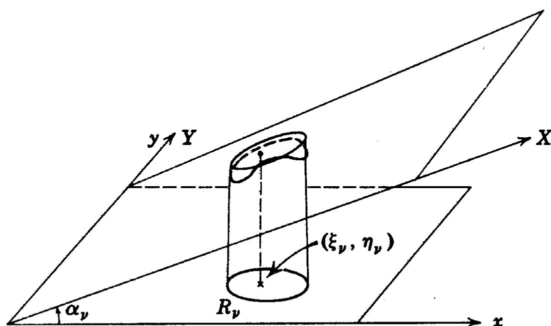


Figura 4.15

forma con el plano x, y y si $\Delta\tau_\nu$ es el área de la porción τ_ν del plano tangente por encima de R_ν, entonces la región R_ν es la proyección de τ_ν sobre el plano x, y,[1] de modo que

$$\Delta R_\nu = \Delta\tau_\nu \cos\alpha_\nu.$$

Nuevamente (ver el Capítulo 3, p. 285),

$$\cos\alpha_\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(\xi_\nu, \eta_\nu) + f_y^2(\xi_\nu, \eta_\nu)}},$$

y, por lo tanto,

$$\Delta\tau_\nu = \sqrt{1 + f_x^2(\xi_\nu, \eta_\nu) + f_y^2(\xi_\nu, \eta_\nu)} \cdot \Delta R_\nu.$$

---

[1] El hecho de que el área de un conjunto plano, al proyectarlo sobre otro plano se multiplique por el coseno del ángulo incluído α es una consecuencia de la fórmula general de sustitución para las integrales. Pueden introducirse los sistemas coordenados cartesianos x, y y X, Y en los dos planos, tales que coincidan los ejes y y Y. Entonces, la proyección de un punto $Y)$ $(X,$ sobre el plano x, y tiene las coordenadas $x = X\cos\alpha$, $y = Y$. De aquí que el área proyectada sea

$$\iint dx\,dy = \iint \frac{d(x, y)}{d(X, Y)}\,dX\,dY = \iint dX\,dY\cos\alpha.$$

Fórmese la suma de todas estas áreas

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Delta\tau_\nu$$

y hágase que n crezca más allá de toda cota, haciendo al mismo tiempo que el diámetro de la subdivisión más grande tienda a cero. De acuerdo con la definición dada de "integral", esta suma tendrá el límite

(29a) $$A = \iint_R \sqrt{1 + f_x{}^2 + f_y{}^2}\, dR.$$

Ahora se usará esta integral, la cual es independiente del modo de subdivisión de la región R, para *definir el área de la superficie dada.* Si sucede que la superficie es una superficie plana, esta definición concuerda con la precedente; por ejemplo, si $z = f(x, y) = 0$, se tiene

$$A = \iint_R dR.$$

En ocasiones resulta conveniente dar al símbolo

$$d\sigma = \sqrt{1 + f_x{}^2 + f_y{}^2}\; dR = \sqrt{1 + f_x{}^2 + f_y{}^2}\, dx\, dy$$

el nombre de *elemento de área* de la superficie $z = f(x, y)$. Entonces la integral de área se puede escribir simbólicamente en la forma

$$\iint_R d\sigma.$$

Se llega a otra forma de expresión para el área pensando en la superficie como si estuviera dada por una ecuación $\phi(x, y, z) = 0$ en lugar de $z = f(x, y)$. Si se supone que $\phi_z \neq 0$, sobre la superficie, las ecuaciones

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\phi_x}{\phi_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\phi_y}{\phi_z}$$

inmediatamente dan la expresión

(29b) $$\iint_R \sqrt{\phi_x{}^2 + \phi_y{}^2 + \phi_z{}^2}\left|\frac{1}{\phi_z}\right| dx\, dy$$

para el área, donde la región R nuevamente es la proyección de la superficie sobre del plano x, y.

Apliquemos la fórmula del área al área de una superficie esférica. La ecuación

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

representa un hemisferio de radio R. Se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Por lo tanto, el área de toda la esfera está dada por la integral

$$A = 2R \iint \frac{dx\, dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

donde la región de integración es el círculo de radio R que está en el plano x, y y que tiene al origen como centro. Introduciendo coordenadas polares y descomponiendo la integral en integrales simples, se obtiene

$$A = 2R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r\, dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 4\pi R \int_0^R \frac{r\, dr}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Fácilmente puede evaluarse la integral de la derecha por medio de la sustitución $R^2 - r^2 = u$; se tiene así

$$A = -4\pi R \left. \sqrt{R^2 - r^2} \right|_0^R = 4\pi R^2,$$

que concuerda con el resultado de Arquímedes.

Hasta aquí, en la definición de "área", se ha singularizado a la coordenada z. Sin embargo, si se ha dado la superficie por una ecuación de la forma $x = x(y, z)$ o $y = y(x, z)$, de modo semejante el área se puede representar por las integrales

$$\iint \sqrt{1 + x_y{}^2 + x_z{}^2}\, dy\, dz \quad \text{o} \quad \iint \sqrt{1 + y_x{}^2 + y_z{}^2}\, dz\, dx;$$

y si la superficie estuviera dada implícitamente, por

(29c) $$\iint \sqrt{\phi_x{}^2 + \phi_y{}^2 + \phi_z{}^2} \left| \frac{1}{\phi_y} \right| dz\, dx$$

o bien,

(29d) $$\iint \sqrt{\phi_x{}^2 + \phi_y{}^2 + \phi_z{}^2} \left| \frac{1}{\phi_x} \right| dy\, dz.$$

Puede verificarse directamente que todas estas expresiones en realidad definen la misma área. Con este fin, aplíquese la transformación

$$x = x(y, z),$$
$$y = y$$

a la integral

$$\iint \frac{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}}{|\phi_z|}\, dx\, dy.$$

Aquí se encuentra $x = x(y, z)$ resolviendo la ecuación $\phi(x, y, z) = 0$ para x. El jacobiano es

$$\frac{d(x, y)}{d(y, z)} = \frac{\phi_z}{\phi_x},$$

y, por lo tanto,

$$\iint_R \frac{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}}{|\phi_z|}\, dx\, dy = \iint_{R'} \frac{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}}{|\phi_x|}\, dy\, dz.$$

La integral de la derecha debe tomarse sobre la proyección R' de la superficie sobre el plano y, z.

Si se desea eliminar toda hipótesis especial acerca de la posición de la superficie relativa al sistema coordenado, debe representarse la superficie en la forma paramétrica

$$x = \phi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \chi(u, v)$$

y expresar su área como una integral sobre el dominio R de los parámetros. Entonces, una región definida R del plano u, v corresponde a la superficie. Con el fin de introducir los parámetros u y v en (29a), considérese primero una porción de la superficie cerca de un punto en que el jacobiano

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = D$$

sea diferente de cero. Para esta porción pueden encontrarse u y v como funciones de x y y y obtener (ver la p. 308).

$$u_x = \frac{\psi_v}{D}, \qquad v_x = -\frac{\psi_u}{D},$$

$$u_y = -\frac{\phi_v}{D}, \qquad v_y = \frac{\phi_u}{D}.$$

para sus derivadas parciales. A través de las ecuaciones

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} u_x + \frac{\partial z}{\partial v} v_x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} u_y + \frac{\partial z}{\partial v} v_y$$

se obtiene la expresión

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{D} \sqrt{(\phi_u\psi_v - \psi_u\phi_v)^2 + (\psi_u\chi_v - \chi_u\psi_v)^2 + (\chi_u\phi_v - \phi_u\chi_v)^2}.$$

Si ahora se introducen u y v como nuevas variables independientes y se aplican las reglas para la transformación de las integrales dobles (16b), p. 459, se encuentra que el área A' de la porción de la superficie que corresponde a una región R' de los parámetros es

$$A' = \iint_{R'} \sqrt{(\phi_u\psi_v - \psi_u\phi_v)^2 + (\psi_u\chi_v - \chi_u\psi_v)^2 + (\chi_u\phi_v - \phi_u\chi_v)^2}\, du\, dv.$$

En esta expresión no aparece distinción alguna entre las coordenadas x, y, y z. Como se llega a la misma expresión integral para el área, sin importar con cuál de las representaciones no paramétricas se empiece, se concluye que todas estas expresiones son iguales y que representan el área.

Hasta aquí sólo se ha considerado una porción de la superficie sobre la cual no se anula un jacobiano particular. No obstante, se llega al mismo resultado sin importar cuál de los tres jacobianos no se anula. Entonces, si se supone que en cada punto de la superficie al menos *uno* de los jacobianos no es cero, puede subdividirse la superficie completa en porciones como la anterior y encontrar así que la misma integral todavía da el área A de la superficie completa:

(30a)

$$A = \iint_{R} \sqrt{(\phi_u\psi_v - \psi_u\phi_v)^2 + (\psi_u\chi_v - \chi_u\psi_v)^2 + (\chi_u\phi_v - \phi_u\chi_v)^2}\, du\, dv.$$

La expresión para el área de una superficie en representación paramétrica puede ponerse en otra forma digna de hacerse notar, si

se hace uso de los coeficientes del elemento lineal (ver el Capítulo 3, p. 332)

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

es decir, de las expresiones

$$E = \phi_u^2 + \psi_u^2 + \chi_u^2,$$

$$F = \phi_u\phi_v + \psi_u\psi_v + \chi_u\chi_v,$$

$$G = \phi_v^2 + \psi_v^2 + \chi_v^2.$$

Un cálculo simple muestra que (ver la p. 332)

(30b) $$EG - F^2 = (\phi_u\psi_v - \psi_u\phi_v)^2 + (\psi_u\chi_v - \chi_u\psi_v)^2 + (\chi_u\phi_v - \phi_u\chi_v)^2.$$

Así se obtiene la expresión para el área

(30c) $$A = \iint \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv,$$

y para el elemento de área

(30d) $$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Como un ejemplo, considérese nuevamente el área de una esfera con radio R, la cual se representa ahora paramétricamente por las ecuaciones

$$x = R\cos u \operatorname{sen} v,$$

$$y = R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,$$

$$z = R\cos v,$$

donde u y v varían sobre la región $0 \leqq u \leqq 2\pi$ y $0 \leqq v \leqq \pi$. Un cálculo simple muestra que aquí

(30e) $$d\sigma = R^2 \operatorname{sen} v\,du\,dv,$$

lo cual una vez más nos da la expresión

$$R^2 \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \operatorname{sen} v\,dv = 4\pi R^2$$

para el área.

Más generalmente, puede aplicarse la fórmula (30d) a la *superficie de revolución* formada al hacer girar la curva $z = \phi(x)$ alrededor del eje z. Si se refiere la superficie a las coordenadas polares (u, v) en el plano x, y como parámetros, se obtiene

$$x = u \cos v, \qquad y = u \operatorname{sen} v, \qquad z = \phi(\sqrt{x^2 + y^2}) = \phi(u).$$

Entonces,

$$E = 1 + \phi'^2(u), \qquad F = 0, \qquad G = u^2,$$

y el área está dada en la forma

$$\text{(31a)} \qquad \int_0^{2\pi} dv \int_{u_0}^{u_1} u\sqrt{1 + \phi'^2(u)}\, du = 2\pi \int_{u_0}^{u_1} u\sqrt{1 + \phi'^2(u)}\, du.$$

Si en lugar de u se introduce como parámetro la longitud de arco s de la curva meridiano $z = \phi(u)$, se obtiene el *área de la superficie de revolución* en la forma

$$\text{(31b)} \qquad 2\pi \int_{s_0}^{s_1} u\, ds,$$

donde u es la distancia del eje al punto sobre la curva que gira, correspondiente a s (regla de Guldin; ver el Volumen I, p. 374).

Apliquemos esta regla para calcular el área de la superficie del toro (ver el Capítulo 3, p. 286) que se obtiene al hacer girar el círculo $(x - a)^2 + z^2 = r^2$ alrededor del eje z. Si se introduce como parámetro la longitud de arco s del círculo, se tiene $u = a + r \cos(s/r)$, y, por lo tanto, el área es

$$2\pi \int_0^{2\pi r} u\, ds = 2\pi \int_0^{2\pi r} \left(a + r \cos \frac{s}{r}\right) ds = 2\pi a \cdot 2\pi r.$$

Por tanto, el área de un toro es igual al producto de la circunferencia del círculo generador por la longitud de la trayectoria descrita por el centro del círculo.

Ejercicios 4.8

1. Calcular el volumen del sólido definido por

$$\frac{\{\sqrt{x^2 + y^2} - 1\}^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leqq 1 \qquad (a < 1).$$

2. Encontrar el volumen separado del paraboloide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = z$ por el plano $z = h$.
3. Encontrar el volumen separado del elipsoide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$ por el plano $lx + my + nz = p$.
4. (a) Demostrar que si se traza cualquier curva cerrada $\theta = f(\phi)$ sobre la superficie $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ (siendo $(r, \theta, \phi$ coordenadas esféricas en el espacio), el área de la superficie así encerrada es igual al área encerrada por la proyección de la curva sobre la esfera $r = a$, siendo el vértice de proyección el origen de las coordenadas.
   (b) Expresar el área por medio de una integral simple.
   (c) Encontrar el área de la superficie completa.
5. Encontrar el volumen y el área de la superficie del sólido generado al hacer girar el triángulo ABC alrededor del lado AB.
6. Encontrar el área de la superficie del paraboloide $z = x^2 + y^2$ interceptada entre los cilindros $x^2 + y^2 = a$ y $x^2 + y^2 = b$, donde $a = \frac{1}{4}[(2m-1)^2 - 1]$ y $b = \frac{1}{4}[(2n-1)^2 + 1]$, siendo m y n números naturales con $n > m$.
7. Encontrar el área de la superficie de la sección separada del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ por el cilindro $x^2 + y^2 = b^2$, donde $0 < b \leqq a$ y $z \geqq 0$
8. Demostrar que el área Σ del conoide recto

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = f(\theta),$$

inclída entre dos planos que pasan por el eje z y el cilindro con rectas generatrices paralelas a este eje y sección $r = f'(\theta)$, y el área de su proyección ortogonal sobre $z = 0$ están en la razón $[\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})]:1$.

4.9 Aplicaciones físicas

En la Sección 4.4 (p. 442) ya se ha visto la forma en que el concepto de *masa* está relacionado con el de integral múltiple. Aquí se estudiarán algunos de los demás conceptos de la mecánica. Se empezará con un estudio detallado del momento y del momento de inercia.

a. Momentos y centro de masa

El momento con respecto al plano x,y de una partícula con masa m se define como el producto mz de la masa y la coordenada z. De modo semejante, el momento con respecto al plano y,z es mx y con respecto al plano z,x es my. Los momentos de varias partículas se combinan de manera aditiva; es decir, los tres *momentos de un sistema de partículas* con masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ y coordenadas $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$ están dados por las expresiones

(32a) $$T_x = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu, \qquad T_y = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu, \qquad T_z = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu.$$

Si se trata de una masa distribuída con densidad continua $\mu = \mu(x, y, z)$ en toda una región en el espacio o sobre una superficie o curva, se define el momento de la distribución de masa por medio de un proceso de límite, como en el Volumen I (p. 373), y, así, se expresan los momentos por integrales. Por ejemplo, dada una distribución en el espacio se subdivide la región R en n subregiones, se imagina la masa total de cada subregión concentrada en cualquiera de sus puntos y, a continuación, se forma el momento del sistema de estas n partículas. Se ve inmediatamente que conforme $n \to \infty$ y el diámetro máximo de las subregiones tiende al mismo tiempo a cero, las sumas tienden a los límites

(32b) $$T_x = \iiint_R \mu x \, dx \, dy \, dz, \qquad T_y = \iiint_R \mu y \, dx \, dy \, dz,$$

$$T_z = \iiint_R \mu z \, dx \, dy \, dz,$$

los cuales se conocen como *momentos de la distribución volumétrica.*

De modo semejante, si la masa está distribuída sobre una superficie S dada por las ecuaciones $x = \phi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$ con densidad $\mu(u, v)$, se definen los *momentos de la distribución superficial* por las expresiones

(32c) $$\begin{aligned} T_x &= \iint_S \mu x \, d\sigma = \iint_R \mu x \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv, \\ T_y &= \iint_S \mu y \, d\sigma = \iint_R \mu y \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv, \\ T_z &= \iint_S \mu z \, d\sigma = \iint_R \mu z \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv. \end{aligned}$$

Por último, los *momentos de una curva* $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ en el espacio, con densidad de masa $\mu(s)$, se definen por las expresiones

(32d) $$T_x = \int_{s_0}^{s_1} \mu x \, ds, \qquad T_y = \int_{s_0}^{s_1} \mu y \, ds, \qquad T_z = \int_{s_0}^{s_1} \mu z \, ds,$$

donde s denota la longitud de arco.

El *centro de masa* de una masa cuya cantidad total es M y está distribuída en toda una región R, se define como el punto con coordenadas

(32e) $$\xi = \frac{T_x}{M}, \qquad \eta = \frac{T_y}{M}, \qquad \zeta = \frac{T_z}{M}.$$

Por lo tanto, para una distribución en el espacio, las coordenadas del centro de masa están dadas por las expresiones

$$\xi = \frac{1}{M}\iiint_R \mu x \, dx\, dy\, dz, \ldots, \qquad \text{donde} \qquad M = \iiint_R \mu \, dx\, dy\, dz.$$

Si la distribución de masa es *homogénea,* $\mu(x, y, z) =$ constante, el centro de masa de la región es su *centroide.* [1]

Como primer ejemplo, considérese la región hemisférica homogénea H con densidad de masa 1:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1, \qquad z \geqq 0.$$

Los dos momentos

$$T_x = \iiint_H x\, dx\, dy\, dz,$$

$$T_y = \iiint_H y\, dx\, dy\, dz$$

son 0, puesto que las integraciones respectivas con respecto a x o y dan el valor 0. Para el tercero,

$$T_z = \iiint_H z\, dx\, dy\, dz,$$

se introducen las coordenadas cilíndricas (r, z, θ) por medio de las ecuaciones

$$z = z, \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta$$

y se obtiene

$$T_z = \int_0^1 z\, dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_0^1 \frac{1-z^2}{2} z\, dz$$
$$= \pi\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

[1]Evidentemente, el centroide es independiente de la elección del valor de la constante positiva de la densidad de masa. Así, puede imaginarse como un concepto geométrico asociado con la forma de la región R, sin depender de la distribución de masa.

Como la masa total es $2\pi/3$, las coordenadas del centro de masa son $x = 0$, $y = 0$, $z = 3/8$.

En seguida, calculemos el centro de masa de una superficie hemisférica de radio unitario sobre la cual se distribuye uniformemente una masa de densidad unitaria. Para la representación paramétrica

$$x = \cos u \operatorname{sen} v, \qquad y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \qquad z = \cos v$$

se calcula el elemento de superficie a partir de la fórmula (30e) de la p. 486 y se encuentra que

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \operatorname{sen} v\, du\, dv. \tag{32g}$$

En consecuencia, se obtiene

$$T_x = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 v\, dv \int_0^{2\pi} \cos u\, du = 0,$$

$$T_y = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 v\, dv \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} u\, du = 0,$$

$$T_z = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} v \cos v\, dv \int_0^{2\pi} du = 2\pi \left.\frac{\operatorname{sen}^2 v}{2}\right|_0^{\pi/2} = \pi$$

para los tres momentos. Como, obviamente, la masa total es 2π, se ve que el centro de masa está en el punto con coordenadas $x = 0$, $y = 0$, $z = \frac{1}{2}$.

b. Momento de inercia

La generalización del concepto de momento de inercia para una distribución continua de masa es igualmente obvia. *El momento de inercia de una partícula con respecto al eje x es el producto de su masa por* $\rho^2 = y^2 + z^2$, es decir, por el cuadrado de la distancia del punto al eje x. De la misma manera, se define el momento de inercia, respecto al eje x, de una masa distribuída con densidad $\mu(x, y, z)$ en toda una región R, por la expresión

$$\iiint_R \mu(y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz. \tag{33a}$$

Los momentos de inercia alrededor de los otros ejes se representan por expresiones semejantes. En ocasiones se define *el momento de inercia con respecto a un punto,* digamos el origen, por la expresión

$$\iiint_R \mu(x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz, \tag{33b}$$

y *el momento de inercia con respecto a un plano,* digamos el plano y, z por

$$\iiint_R \mu x^2 \, dx\, dy\, dz. \tag{33c}$$

De manera semejante, con respecto al eje x, el momento de inercia de una distribución superficial está dado por

$$\iint_S \mu(y^2 + z^2)\, d\sigma, \tag{33d}$$

donde $\mu(u, v)$ es una función continua de los dos parámetros u y v.

El momento de inercia de una masa distribuída con densidad $\mu(x, y, z)$ en toda una región R, con respecto a un eje paralelo al eje x y que pasa por el punto (ξ, η, ζ), está dado por la expresión

$$\iiint_R \mu[(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]\, dx\, dy\, dz. \tag{33e}$$

Si, en particular, se hace que (ξ, η, ζ) sea el centro de masa y se usan las relaciones (32e) para las coordenadas del centro de masa, inmediatamente se obtiene la ecuación

$$\iiint_R \mu(y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \iiint_R \mu[(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]\, dx\, dy\, dz + (\eta^2 + \zeta^2) \iiint_R \mu\, dx\, dy\, dz. \tag{33f}$$

Puesto que cualquier eje arbitrario de rotación de un cuerpo, puede elegirse como eje x, el significado de esta ecuación se puede expresar como sigue:

El momento de inercia de un cuerpo rígido con respecto a un eje arbitrario de rotación es igual al momento de inercia del cuerpo alrededor de un eje paralelo que pase por su centro de masa más el producto de la masa total por el cuadrado de la distancia entre el centro de masa y el eje de rotación (teorema de Huygens).

El significado físico del momento de inercia para las regiones en varias dimensiones es exactamente el mismo que ya se dió en el Volumen I, p. 375:

La energía cinética de un cuerpo que gira uniformemente alrededor de un eje es igual a la mitad del producto del cuadrado de la velocidad angular por el momento de inercia.

Calcularemos el momento de inercia para algunos casos sencillos.

Para la esfera V con centro en el origen, radio unitario y densidad unitaria, por simetría se ve que el momento de inercia con respecto a cualquier eje que pasa por el origen es

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_V (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_V (x^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_V (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz.
\end{aligned}
$$

Si se suman las tres integrales se obtiene

$$3I = \iiint_V 2(x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

En coordenadas esféricas,

$$I = \frac{2}{3}\int_0^1 r^4\, dr \int_0^\pi \operatorname{sen} v\, dv \int_0^{2\pi} du = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{8\pi}{15}.$$

Para una viga con aristas a, b, c paralelas a los ejes x, y y z, respectivamente, con densidad unitaria y centro de masa en el origen, se encuentra que el momento de inercia con respecto al plano x, y es

$$\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} z^2\, dz = ab\frac{c^3}{12}.$$

c. El péndulo compuesto

La noción de momento de inercia encuentra una aplicación en el tratamiento matemático del péndulo compuesto, es decir, un cuerpo rígido que oscila alrededor de una eje horizontal fijo, bajo la influencia de la gravedad.

Considérese un plano que pasa por G, el centro de masa del cuerpo rígido, perpendicular al eje de rotación; supóngase que este plano corta al eje en el punto O (Fig. 4.16). El movimiento del cuerpo está dado como una función del tiempo por el ángulo $\phi = \phi(t)$ que OG forma en el instante t con la vertical hacia abajo que pasa por O. Con el fin de determinar la función ϕ y también el período de oscilación del péndulo, supondremos que se conocen ciertos hechos físicos (ver

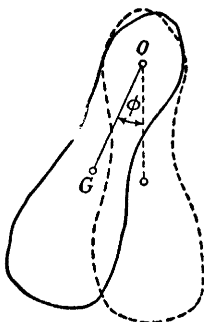


Figura 4.16

la p. 729). Apliquemos la ley de conservación de la energía, la cual afirma que durante el movimiento del cuerpo la suma de sus energías cinética y potencial permanece constante. Aquí V, la energía potencial del cuerpo, es el producto Mgh, donde M es la masa total, g la aceleración de la gravedad y h la altura del centro de masa por encima de una recta horizontal arbitraria (por ejemplo, por encima de la recta horizontal que pasa por la posición más baja que alcanza el centro de masa durante el movimiento). Si se denota OG, la distancia del centro de masa al eje, por s, entonces $V = Mgs(1 - \cos\phi)$. Por lo expresado en la p. 492, la energía cinética está dada por $T = \frac{1}{2} I\dot{\phi}^2$, donde I es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje de rotación y se ha escrito $\dot{\phi}$ por $d\phi/dt$. Por lo tanto, la ley de conservación de la energía da la ecuación

$$\frac{1}{2} I\dot{\phi}^2 - Mgs\cos\phi = \text{constante} \tag{34a}$$

Si se introduce la constante $l = I/Ms$, ésta es exactamente la misma ecuación encontrada con anterioridad[1] (Volumen I, pp. 408, 410) para el péndulo simple; en consecuencia, l se conoce como *longitud del péndulo simple equivalente*.

Ahora se aplicarán directamente las fórmulas que se obtuvieron para el péndulo simple (Volumen I, p. 410). El *período de oscilación* está dado por la fórmula

[1]En la notación usada aquí, el movimiento de la masa puntual en el péndulo simple se describe por $x = l \operatorname{sen}\phi$, $y = -l\cos\phi$ y su velocidad por $l.\dot{\phi}$. Aquí, ϕ, por el volumen I, p. 408, satisface la ecuación diferencial

$$\frac{1}{2}(l\dot{\phi})^2 - gl\cos\phi = \text{constante}$$

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{-\phi_0}^{\phi_0}\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}},$$

donde ϕ_0 corresponde al desplazamiento máximo del centro de masa; para ángulos pequeños ésto da aproximadamente

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgs}}.$$

Por supuesto, en esta expresión está incluída la fórmula para el péndulo simple como un caso especial, porque si la masa completa M se concentra en el centro de masa, entonces $I = Ms^2$, de modo que $l = s$.

Investigando aún más, recuérdese que I, el momento de inercia alrededor del eje de rotación, está relacionado con I_0, el momento de inercia alrededor de un eje paralelo que pasa por el centro de masa, por la expresión (ver 33f)

$$I = I_0 + Ms^2.$$

De aquí que

$$l = s + \frac{I_0}{Ms},$$

o bien, si se introduce la constante $a = I_0/M$,

$$l = s + \frac{a}{s}.$$

Inmediatamente se ve que, en un péndulo compuesto, l siempre es mayor que s, de modo que el período de un péndulo compuesto siempre es mayor que el del péndulo simple que se obtiene al concentrar la masa M en el centro de masa. Es más, el período es el mismo para todos los ejes paralelos que se encuentran a la misma distancia s del centro de masa, porque la longitud del péndulo simple equivalente sólo depende de las dos cantidades s y $a = I_0/M$ y, por lo tanto, sigue siendo el mismo, siempre que no se altere la dirección del eje de rotación ni su distancia al centro de masa.

La fórmula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{s + a/s}{g}}$$

muestra que el período T crece más allá de toda cota a medida que s tiende a 0 o al infinito. Por lo tanto, debe tener un mínimo para algún valor s_0. Derivando se obtiene

$$s_0 = \sqrt{a} = \sqrt{\frac{I_0}{M}}.$$

Un péndulo cuyo eje está a una distancia $s_0 = \sqrt{I_0/M}$ del centro de masa será relativamente insensible a pequeños desplazamientos del eje, porque, en este caso, dT/ds se anula, de modo que cambios de primer orden en s sólo producen cambios de segundo orden en T. Este hecho ha sido aplicado por el Profesor *M*. Schuler de Göttingen en la construcción de relojes muy exactos.

d. Potencial de masas atractivas

En el Capítulo 2 (p. 251) se ha visto que la ley de la gravitación de Newton da la fuerza que una partícula fija Q, con coordenadas (ξ, η, ζ) y masa m, ejerce sobre una segunda partícula P, con coordenadas (x, y, z) y masa unitaria, aparte de la constante gravitacional γ, como

$$m \text{ grad } \frac{1}{r},$$

donde

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

es la distancia entre los puntos P y Q. La dirección de la fuerza es a lo largo de la recta que une a las dos partículas y su magnitud es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Aquí el *gradiente* de una función $f(x, y, z)$ es el vector con componentes

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}.$$

De aquí que, en el presente caso, la fuerza tiene las componentes

$$\frac{m(\xi - x)}{r^3}, \quad \frac{m(\eta - y)}{r^3}, \quad \frac{m(\zeta - z)}{r^3}.$$

Si ahora se considera la fuerza ejercida sobre P por un cierto número

de puntos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ con masas respectivas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, puede expresarse la fuerza total como el gradiente de la cantidad

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \cdots + \frac{m_n}{r_n},$$

donde r_ν denota la distancia del punto Q_ν al punto P. Si una fuerza puede expresarse como el gradiente de una función, se acostumbra decir que esta función es el *potencial de la fuerza*,[1] en consecuencia, se define el *potencial gravitacional* del sistema de partículas $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ en el punto P como la expresión

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_\nu}{\sqrt{(x-\xi_\nu)^2 + (y-\eta_\nu)^2 + (z-\zeta_\nu)^2}}.$$

Supóngase ahora que, en lugar de estar concentradas en un número finito de puntos, las masas que gravitan están distribuídas con densidad continua μ sobre una porción R del espacio, o una superficie S, o una curva C. Entonces el potencial de esta distribución de masa en un punto con coordenadas (x, y, z) fuera del sistema de masas, se define como

(35a) $$\iiint_R \frac{\mu(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

o bien,

(35b) $$\iint_S \frac{\mu}{r}\, d\sigma,$$

o

(35c) $$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\mu}{r}\, ds.$$

En el primer caso la integración se toma en toda la región R con coordenadas rectangulares (ξ, η, ζ); en el segundo caso, sobre la superficie S con el elemento de superficie $d\sigma$; y en el tercer caso, a lo largo de la curva con longitud de arco s. En las tres fórmulas r denota la distancia del punto P al punto (ξ, η, ζ) de la región de integración y μ la densidad de masa en el punto (ξ, η, ζ). En cada caso, la fuerza de atracción se encuentra calculando las primeras derivadas

[1] A menudo, la *negativa* de esta función, la cual tiene el significado de energía potencial, se llama *potencial de las fuerzas*.

del potencial con respecto a x, y, z. Trabajar con el potencial, en lugar de con la fuerza, tiene la ventaja de que sólo se tiene que evaluar una integral en lugar de tres. Entonces se obtienen las tres componentes de la fuerza como derivadas del potencial.

Por ejemplo, el potencial en el punto P con coordenadas (x, y, z), debido a una esfera K con densidad uniforme 1, radio unitario y centro en el origen es la integral

$$\iiint_K \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$
$$= \int_{-1}^{+1} d\xi \int_{-\sqrt{1-\xi^2}}^{+\sqrt{1-\xi^2}} d\eta \int_{-\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}^{+\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} \frac{1}{r}\, d\zeta.$$

En todas las expresiones (35a, b, c) las coordenadas (x, y, z) del punto P no aparecen como variables de integración sino como parámetros y los potenciales son funciones de estos parámetros.

Para obtener las componentes de la fuerza a partir del potencial tiene que derivarse la integral con respecto a los parámetros. Las reglas para la derivación con respecto a un parámetro se extienden directamente a las integrales múltiples y, por la p. 74, puede llevarse a cabo la derivación bajo el signo integral siempre que el punto P no pertenezca a la región de integración, es decir, siempre que se tenga la certeza de que no existe punto de la región cerrada de integración para el cual la distancia r tiene el valor 0. Así, por ejemplo, se encuentra que las *componentes de la fuerza gravitacional* sobre una masa unitaria, debida a una masa distribuída con densidad unitaria en toda una región R en el espacio, están dadas por las expresiones

(36)
$$F_1 = -\iiint_R \frac{x-\xi}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$
$$F_2 = -\iiint_R \frac{y-\eta}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$
$$F_3 = -\iiint_R \frac{z-\zeta}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Por último, conviene señalar que las expresiones para el potencial y sus primeras derivadas siguen teniendo significado si el punto P se encuentra en el interior de la región de integración. Entonces las integrales son impropias y, como se demuestra fácilmente, se deduce su convergencia a partir de los criterios de la Sección 4.7.

Como una ilustración, calculemos el potencial en un punto interno y en un punto externo, debido a una superficie esférica S con radio α y densidad unitaria. Si se toma el centro de la esfera como el origen y suponiendo que el eje x pasa por el punto P (interior o exterior a la esfera), el punto P tendrá las coordenadas $(x, 0, 0)$, y el potencial será

$$U = \iint \frac{d\sigma}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$$

Si se introducen coordenadas esféricas sobre la esfera a través de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha \cos\theta, \\ \eta &= \alpha \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \\ \zeta &= \alpha \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \end{aligned}$$

entonces ver (30e), p. 429

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{\pi} \frac{\alpha^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{(x-\alpha\cos\theta)^2 + \alpha^2 \operatorname{sen}^2\theta}}\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \frac{\alpha^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{x^2+\alpha^2-2\alpha x\cos\theta}}\, d\theta. \end{aligned}$$

Póngase $x^2 + \alpha^2 - 2\alpha x \cos\theta = r^2$, de modo que $\alpha x \operatorname{sen}\theta\, d\theta = r\, dr$, y (bajo el supuesto de que $x \neq 0$) la integral se convierte entonces en

$$U = \frac{2\pi\alpha}{x} \int_{|x-\alpha|}^{|x+\alpha|} \frac{r\, dr}{r} = \frac{2\pi\alpha}{x}(|x+\alpha| - |x-\alpha|).$$

Por lo tanto, para $|x| > \alpha$ se tiene

$$U = \frac{4\pi\alpha^2}{|x|},$$

y, para $|x| < \alpha$,

$$U = 4\pi\alpha.$$

De aquí que el potencial en un punto externo es el mismo que se obtendría si la masa completa $4\pi\alpha^2$ estuviera concentrada en el centro de la esfera. Por otra parte, en todo el interior el potencial es constante. En la superficie de la esfera el potencial es continuo; la ex-

presión para U aún está definida (como una integral impropia) y tiene el valor $4\pi\alpha$. Sin embargo, la componente F_x de la fuerza en la dirección x tiene un salto igual a -4π en la superficie de la esfera porque, si $|x| > \alpha$, se tiene

$$F_x = -\frac{4\pi\alpha^2}{x^2}\operatorname{sgn} x,$$

mientras que $F_x = 0$ si $|x| < \alpha$.

El potencial de una esfera sólida de densidad unitaria se encuentra a partir del de una superficie esférica, integrando con respecto a α. Esto da el valor

$$\frac{4\pi\alpha^3}{3|x|}$$

para el potencial en un punto externo. Nuevamente, éste es igual al que se tendría si la masa total $(4/3)\pi\alpha^3$ estuviera concentrada en el centro. Derivando con respecto a x se encuentra, para un punto sobre el eje x positivo, que

$$F_x = -\frac{4\pi\alpha^3}{x^2}.$$

Este es el resultado debido a Newton de que la atracción ejercida por una esfera sólida de densidad constante sobre un punto externo es la misma que ejercería si su masa estuviera concentrada en su centro(Volumen I, p. 413).

Ejercicios 4.9

1. (a) Encontrar la posición del centroide de un cono circular recto sólido.
   (b) ¿Cuál es la posición del centroide de la superficie curva del cono?
2. Hallar la posición del centroide de la porción del paraboloide $z^2 + y^2 = px$ separada por el plano $x = x_0$, donde $x_0 < 0$.
3. Hallar el centroide del tetraedro limitado por los tres planos coordenados y el plano $x/a + y/b + z/c = 1$.
4. (a) Encontrar el centroide del cascarón hemisférico $a^2 \leqq x^2 + y^2 + z^2 \leqq b^2, z \geqq 0$.
   (b) Demostrar que el centroide de la lámina hemisférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ es la posición límite del centroide del inciso (a), a medida que b tiende hacia a.
5. Hallar el momento de inercia alrededor del eje z del paralelepípedo rectangular homogéneo de masa m con $0 \leqq x \leqq a, 0 \leqq y \leqq b, 0 \leqq z \leqq c$.

6. Calcular el momento de inercia del sólido homogéneo encerrado entre los dos cilindros

$$x^2 + y^2 = R \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 = R' \qquad\qquad (R > R')$$

y los dos planos $z = h$ y $z = -h$, con respecto a
(a) el eje z,
(b) el eje x.

7. Hallar la masa y el momento de inercia respecto a un diámetro, de una esfera cuya densidad decrece linealmente con la distancia al centro, desde un valor μ_0 en el centro hasta el valor μ_1, en la superficie.

8. Encontrar el momento de inercia del elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leqq 1$, con respecto a
(a) el eje z,
(b) un eje arbitrario que pasa por el origen, dado por

$$x:y:z = \alpha:\beta:\gamma \qquad\qquad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1).$$

9. Si A, B, C denotan los momentos de inercia de un sólido arbitrario de densidad positiva con respecto a os ejes x-, y, y z, demostrar que entonces se satisfacen las "desigualdades del triángulo"

$$A + B > C, \quad A + C > B, \quad B + C > A$$

10. Sean O un punto arbitrario y S un cuerpo arbitrario. Sobre cada uno de los rayos que emanan de O tómese el punto que se encuentra a la distancia $1/\sqrt{I}$ de O, donde I denota el momento de inercia de S con respecto a la recta que coincide con el rayo. Probar que los puntos así construídos forman un elipsoide (el llamado *elipsoide de momentos*).

11. Encontrar el elipsoide de momentos del elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leqq 1$ en el punto (ξ, η, ζ).

12. Hallar las coordenadas del centro de masa de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, si la densidad está dada por

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}} \,.$$

13. Hallar la coordenada x del centro de masa del octante del elipsoide

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leqq 1 \qquad\qquad (x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0).$$

14. Un sistema de masas S consiste de dos partes S_1 y S_2; I_1, I_2, I son los respectivos momentos de inercia de S_1, S_2, S alrededor de tres ejes paralelos que pasan por los respectivos centros de masa. Probar que

$$I = I_1 + I_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} d^2,$$

donde m_1 y m_2 son las masas de S_1 y S_2 y d es la distancia entre los ejes que pasan por sus centros de masa.

15. Encontrar las envolventes de los planos con respecto a los cuales el elipsoide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leqq 1$ tiene el mismo momento de inercia h.

16. Calcular el potencial del elipsoide de revolución homogéneo

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\leqq 1 \qquad (b>a)$$

en su centro.

17. Calcular el potencial de un sólido de revolución

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\leqq f(z) \qquad (a\leqq z\leqq b)$$

en el origen.

18. Demostrar que a distancias lo suficientemente grandes el potencial de una sólido S es aproximado por el potencial de una partícula de la misma masa total localizada en su centro de gravedad, con un error menor que alguna constante dividida entre el cuadrado de la distancia.

19. Suponiendo que la Tierra es una esfera de radio R para la cual la densidad a una distancia r del centro es de la forma

$$\rho = A - Br^2$$

y la densidad en la superficie es $2\frac{1}{2}$ veces la densidad del agua, mientras que la densidad media es $5\frac{1}{2}$ veces la del agua, demostrar que la atracción en un punto interno es igual a

$$\frac{1}{11}g\frac{r}{R}\left(20-9\frac{r^2}{R^2}\right),$$

donde g es el valor de la gravedad en la superficie.

20. Se coloca con el centro en el origen un hemisferio de radio a y de densidad uniforme ρ, de modo que se encuentre por completo en el lado positivo del plano x, y. Demostrar que su potencial en el punto $(0, 0, z)$ es

$$\frac{2\pi\rho}{3z}\left[(a^2+z^2)^{3/2}-a^3+\frac{3}{2}a^2z\right]-\frac{4}{3}\pi\rho z^2 \qquad \text{si} \qquad 0<z<a$$

y

$$\frac{2\pi\rho}{z}\left[(a^2+z^2)^{3/2}+a^3-\frac{3}{2}a^2z\right]-\frac{2}{3}\pi\rho z^2 \qquad \text{si} \qquad z>a.$$

21. Sea (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) los vértices de un triángulo de área A (donde el orden de los subíndices da la orientación positiva). Probar que el momento de inercia del triángulo con respecto al eje x está dado por

$$\frac{A}{6}(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1).$$

22. Probar que la atracción en cualquiera de los polos de un esferoide uniforme con densidad ρ y semiejes a, a, c es igual a

$$2\pi\rho\int_0^{2c} r(1-\cos\theta)\,dr,$$

donde

$$r=2a^2c\cos\theta/(a^2\cos^2\theta+c^2\operatorname{sen}^2\theta).$$

23. Se sabe experimentalmente que una lámina esférica conductora, cargada (sobre una superficie de este tipo la carga se distribuye uniformemente), ejerce una fuerza cero sobre una carga puntual en su interior. Suponiendo que las cargas puntuales se repelen o atraen entre sí con una fuerza que sólo depende de la distancia entre ellas, probar que este experimento implica la ley de Coulomb —a saber, que las cargas puntuales se atraen o repelen entre sí con una fuerza proporcional al inverso del cuadrado de su separación. Este resultado es el recíproco del teorema de que la fuerza de gravedad de una lámina esférica homogénea se anula en su interior.

4.10 Integrales múltiples en coordenadas curvilíneas

a. Resolución de integrales múltiples

Si la región R del plano x, y se cubre con una familia de curvas $\phi(x, y) =$ constante, de modo que cada punto de R se encuentre en una, y sólo en una curva de la familia, puede tomarse la cantidad $\phi(x, y) = \xi$ como una nuesva variable independiente; ésto es, pueden tomarse las curvas C_ξ, representadas por $\phi(x, y) =$ constante $= \xi$, como una de las dos familias de curvas en una rejilla coordenada.

Como segunda variable independiente se puede elegir la cantidad $\eta = y$, siempre que nos confinemos a una región R en la que cada pareja de curvas $\phi(x, y) =$ constante y $y =$ constante se intersecten en un punto.

Si se introducen estas nue as variables, una integral doble $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$ se transforma como sigue [ver (16b), p. 459]:

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \iint \frac{f(x, y)}{|\phi_x|}\, d\xi\, d\eta.$$

Manteniendo ξ constante e integrando el segundo miembro con respecto a η, la integral con respecto a η se puede escribir en la forma

$$\int \frac{f(x, y)}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \frac{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}}{|\phi_x|}\, d\eta.$$

Como sobre C_ξ

$$\frac{ds}{d\eta} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}}{|\phi_x|},$$

esta integral se puede considerar como una integral a lo largo de la curva $\phi(x, y) = \xi$, siendo la longitud de arco s la variable de integración. Así se obtiene la resolución

(37a) $$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \int d\xi \int_{C_\xi} \frac{f(x, y)}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}}\, ds$$

para la integral doble considerada.

Se reconoce muy fácilmente el significado intuitivo de esta resolución si se supone que, correspondiendo a las curvas C_ξ, existe una familia de curvas ortogonales (las llamadas *trayectorias ortogonales*) que se intersectan con cada curva separada ϕ = constante $= \xi$ a ángulos rectos, en la dirección del vector grad ϕ. Si σ es la longitud de arco sobre una curva ortogonal representada por las funciones $x(\sigma)$ y $y(\sigma)$, entonces

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{\phi_x}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}}, \quad \frac{dy}{d\sigma} = \frac{\phi_y}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}}.$$

Dado que

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \phi_x \frac{dx}{d\sigma} + \phi_y \frac{dy}{d\sigma},$$

se obtiene

(37b) $$\frac{d\xi}{d\sigma} = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2} = \sqrt{(\operatorname{grad} \phi)^2}.$$

Considérese ahora la malla limitada por las dos curvas $\phi(x, y) = \xi$, $\phi(x, y) = \xi + \Delta\xi$, y dos curvas ortogonales que limiten una porción, de longitud Δs, de $\phi(x, y) = \xi$ (Fig. 4.17). El área de esta malla está

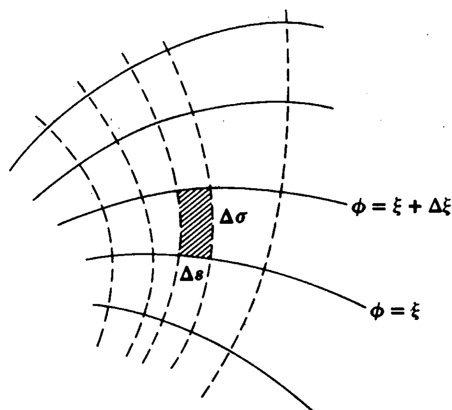


Figura 4.17

dada aproximadamente por el producto $\Delta s\, \Delta\sigma$, y, a su vez, éste es aproximadamente igual a

$$\frac{\Delta s\, \Delta\xi}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}}.$$

Esto conduce a una nueva interpretación de identidad (37a):

En lugar de calcular una integral doble subdividiendo la región en "rectángulos infinitesimales" con lados paralelos a los ejes coordenados, puede usarse la subdivisión en rectángulos curvilíneos infinitesimales determinados por las curvas $\phi(x, y) =$ constante y sus trayectorias ortogonales..

Puede efectuarse una resolución semejante en el espacio tridimensional. Si se cubre la región R por medio de una familia de superficies S_ξ dadas por una ecuación $\phi(x, y, z) =$ constante $= \xi$, de tal manera que por cada punto pase una, y sólo una superficie, entonces puede tomarse la cantidad $\xi = \phi(x, y, z)$ como una variable de integración. De este modo se resuelve una integral triple

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$
$$= \int d\xi \iint \frac{f(x, y, z)}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}} \frac{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}}{|\phi_x|}\, dy\, dz$$

en una integral

$$\iint_{S_\xi} \frac{f(x, y, z)}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}}\, dS$$

sobre la superficie $\phi = \xi$ con elemento de área

$$dS = \frac{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}}{|\phi_x|}\, dy\, dz$$

[ver (29d), p. 483] y una integración subsecuente con respecto a ξ:

(37c) $$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int d\xi \iint_{S_\xi} \frac{f(x, y, z)}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}}\, dS.$$

Nuevamente, esta fórmula permite una interpretación geométrica si se introduce la familia biparamétrica de curvas ortogonales en

cada punto a una superficie ξ = constante y se usan, además de las S_ξ, las superficies coordenadas que consisten de esas curvas.

b. Aplicación a las áreas barridas por curvas en movimiento y volúmenes barridos por superficies en movimiento. Fórmula de Guldin. El planímetro polar

La cantidad

$$\frac{d\sigma}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}}$$

que aparece en las fórmulas (37a,b) se puede interpretar cinemáticamente si se identifica el parámetro ξ con el tiempo t. Entonces la ecuación $\phi(x, y)$ = constante = t representa la posición C_t de una curva en movimiento, en el instante t. La cantidad $\Delta\sigma$, la cual mide las distancias a lo largo de las curvas ortogonales a las curvas C_t, se puede imaginar como la *distancia normal* entre las curvas C_t y $C_{t+\Delta t}$. En consecuencia,

$$c = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \tag{38a}$$

es la *velocidad normal* de la curva en movimiento C_t, en el instante t. Esta velocidad es diferente en puntos diferentes de C_t. De modo semejante, la velocidad normal de la superficie S_t en movimiento en el espacio, con ecuación $\phi(x, y, z)$ = constante = t es

$$c = \frac{1}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}}. \tag{38b}$$

En la física, en los *frentes de onda* se presentan superficies en movimiento de este tipo (por ejemplo, para las ondas electromagnéticas que se propagan en un medio).

La velocidad normal c de una superficie en movimiento, S_t, (y, de modo semejante, de una curva en movimiento, C_t, en el plano) tiene un significado particularmente simple si S_t consiste de partículas individuales en movimiento. Si la posición de una de estas partículas se describe por medio de las tres funciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ y si la partícula permanece en todo instante sobre la superficie en movimiento, entonces debe cumplirse la ecuación

$$\phi(x(t), y(t), z(t)) = t$$

para todo t. Derivando con respecto a t se encuentra la ecuación

$$1 = \phi_x \frac{dx}{dt} + \phi_y \frac{dy}{dt} + \phi_z \frac{dz}{dt}.$$

Si se divide esta ecuación entre el gradiente absoluto de ϕ, se obtiene la relación

(38c) $$c = \pm \left(\xi \frac{dx}{dt} + \eta \frac{dy}{dt} + \zeta \frac{dz}{dt}\right),$$

donde c es la velocidad normal definida por (38b), ξ, η, ζ son los cosenos directores de una de las normales de S_t, y el signo positivo o negativo se aplica según que las normales apunten en la dirección de t creciente o decreciente, respectivamente. Si se introduce el vector unitario normal

$$\mathbf{n} = (\xi, \eta, \zeta)$$

y el vector velocidad de la partícula,

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),$$

c puede representarse por el producto escalar

(38d) $$c = \pm \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}.$$

En palabras, *la componente normal a la superficie S_t de la velocidad de una partícula que se mueve con la superficie es igual a $\pm$ c, donde c es la velocidad normal de S_t.* El signo positivo se cumple cuando $\mathbf{n}$ es el vector normal "hacia adelante" de S_t, es decir, el vector normal sobre la cara de la superficie que se encuentra hacia donde están los puntos que van a ser barridos en el futuro inmediato.

La fórmula (37c), cuando $f = 1$, proporciona una expresión para el volumen V de la región barrida por una superficie en movimiento, S_t, con la velocidad normal c:

(39a) $$V = \iiint dx\, dy\, dz = \int dt \iint_{S_t} c\, dS.$$

De manera semejante, para el área A de una región en el plano barrida por una curva en movimiento, C_t, se encuentra la expresión

(39b) $$A = \int dt \int_{C_t} c\, ds.$$

Apliquemos estos resultados al caso de un área barrida por un segmento rectilíneo C_t que se mueve en el plano (Fig. 4.18). El segmento puede ser representado por una ecuación de la forma

(40a) $$\xi(t)x + \eta(t)y = p(t),$$

donde (ξ, η) es el vector normal unitario y p la distancia (con signo) de C_t al origen. El centro de C_t (que es también su *centroide*) está en el punto [ver (32e), p. 490]

(40b) $$X(t) = \frac{\int_{C_t} x\, ds}{\int_{C_t} ds}, \quad Y(t) = \frac{\int_{C_t} y\, ds}{\int_{C} ds}.$$

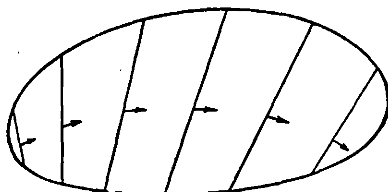


Figura 4.18

Integrando (40a) con respecto a s sobre el segmento C_t se llega a la relación

(40c) $$\xi(t)X(t) + \eta(t)Y(t) = p(t),$$

con la cual simplemente se afirma que el centro de C_t está sobre C_t. Si se piensa en C_t como si consistiera de partículas individuales en movimiento, se encuentra, a partir de (40a), (38c), que la componente normal de la velocidad de estas partículas es

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \xi \frac{dx}{dt} + \eta \frac{dy}{dt} = \frac{dp}{dt} - \frac{d\xi}{dt} x - \frac{d\eta}{dt} y.$$

De aquí que, por (40b), (40c),

$$\pm \int_{C_t} c\, ds = \int_{C_t} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}\, ds = \left(\frac{dp}{dt} - \frac{d\xi}{dt} X - \frac{d\eta}{dt} Y\right)\int_{C_t} ds$$
$$= \left(\xi \frac{dX}{dt} + \eta \frac{dY}{dt}\right)\int_{C_t} ds = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}L \text{ [1]}$$

[1] También puede deducirse la misma fórmula, usando la expresión (38a) para x, si se calculan las primeras derivadas de la función $t = \phi(x, y)$ con respecto a x y y a partir de la ecuación implícita (40a) para la función t.

donde

$$\mathbf{w} = \left(\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}\right)$$

es el vector velocidad del centro (X, Y)del segmento C_t, y

$$L = L(t) = \int_{C_t} ds,$$

la longitud de C_t. De (39b) se deduce que el área barrida por el segmento en movimiento, C_t, es

(41a) $$A = \int \pm L\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}\, dt.$$

De la misma manera se encuentra que el volumen barrido por una región plana en movimiento, S_t, de área $A(t)$ y normal unitario $\mathbf{n}$ es

(41b) $$V = \int \pm A\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}\, dt,$$

donde $\mathbf{w}$ es la velocidad del centroide (X, Y, Z) de S_t. En estas fórmulas se toma el signo positivo cuando $\mathbf{n}$ es el vector normal "hacia adelante" de S_t, es decir, el que apunta en la dirección del movimiento.

Especialmente interesante es el caso de la fórmula (41b) cuando el centroide (X, Y, Z) de S_t se mueve a lo largo de una curva que en todo momento es perpendicular al plano de S_t. En ese caso, la componente normal de la velocidad del centroide coincide con la velocidad del movimiento del centroide a lo largo de su trayectoria:

$$\pm \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \frac{d\sigma}{dt},$$

donde σ es la longitud de arco a lo largo de la trayectoria del centroide. Entonces se deduce que

(42a) $$V = \int A \frac{d\sigma}{dt}\, dt = \int A\, d\sigma.$$

Es más, si todas las regiones planas S_t tienen la misma área A, se encuentra que

(42b) $$V = A \int d\sigma,$$

o que el volumen barrido por las S_t es igual a su área A multiplicada por la longitud de la trayectoria descrita por sus centroides. Obviamente, un caso particular es la regla de Guldin para el volumen de un sólido de revolución barrido por la rotación de una región plana R alrededor de un eje en ese plano. El volumen es igual al área A de R multiplicada por la longitud de la trayectoria descrita por el centroide de R durante la revolución (ver el Volumen I, p. 374).

Regresando a la fórmula (41a), se ve que la integral

$$\int L\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}\, dt \tag{43a}$$

representa el área con signo barrida por los segmentos C_t, dependiendo el signo de si el vector normal $\mathbf{n}$ apunta en la dirección del movimiento o en la opuesta. Lo mismo se cumple para una integral

$$\int A\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}\, dt \tag{43b}$$

asociada con los volúmenes barridos por un área plana en movimiento.

Estas observaciones nos permiten extender los resultados obtenidos a casos en los que el segmento o el área plana no siempre se mueva en el mismo sentido, o cubra parte del plano (o del espacio) más de una vez. Entonces las integrales dadas anteriormente expresarán la suma algebraica de las áreas (o volúmenes) de las partes de la región barrida, tomando cada una con el signo apropiado.

Como un ejemplo, supóngase que un segmento de longitud constante se mueve de modo que siempre tenga sus puntos extremos sobre dos curvas fijas Γ y Γ' en un plano, como en la Fi. 4.19. Por las

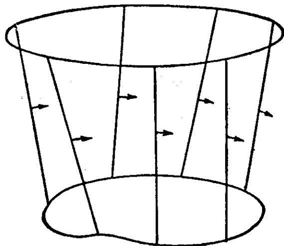


Figura 4.19

flechas que muestran la dirección positiva de la normal, se puede determinar el signo con el cual aparece cada área en la integral y encontrar que la integral da la diferencia entre las áreas encerradas por Γ y Γ'. Si Γ' contiene un área cero, como cuando degenera en un solo segmento de una curva que se describe varias veces, la integral da el área encerrada por Γ.

Este principio se aplica en la construcción del conocido planímetro polar (*planímetro de Amsler*). Este es un aparato mecánico para medir áreas planas. Consiste de una barra rígida en el centro de la cual está una rueda medidora que puede rodar sobre el papel de dibujo. El plano de la rueda es perpendicular a la barra. Cuando se va a usar el instrumento para medir el área encerrada por una curva dibujada sobre el papel, se mueve uno de los extremos de la barra a lo largo de la curva, mientras que el otro se articula a un brazo rígido del cual el extremo opuesto gira sobre un punto fijo *0*, el polo, exterior a Γ. Por lo tanto, el extremo articulado de la barra describe (varias veces) un arco de círculo, es decir, una curva cerrada que contiene un área cero. Se concluye que aquí la expresión (43a) proporciona el área encerrada por Γ. Pero el integrando $L\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}$ es proporcional a la velocidad angular con la cual gira la rueda de medición, siempre que la circunferencia de la rueda se mueva sobre el papel a medida que la barra se mueve, en cuyo caso la posición de la rueda sólo es afectada por el movimiento normal a la barra. Entonces el ángulo total que ha girado la rueda es proporcional al área encerrada por Γ.

En el instrumento, como se construye normalmente, la rueda no está exactamente en el centro de la barra, pero ello sólo altera el factor de proporcionalidad en el resultado y éste se puede determinar directamente por medio de una calibración del instrumento.

4.11 Volúmenes y áreas de superficies en cualquier número de dimensiones

a. Areas de superficies e integrales de superficie en más de tres dimensiones

En el espacio n dimensional descrito por las n coordenadas $x_1, \ldots, x_n$, se define una superficie $(n-1)$ dimensional (*hipersuperficie o variedad*) por medio de una ecuación implícita

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{constante}, \tag{44a}$$

donde en cada punto de la superficie por lo menos una de las primeras derivadas de ϕ no se anula. Supóngase que una porción S de esta superficie de corresponde a una cierta región B en el espacio $x_1, x_2 \cdots x_{n-1}$, donde $\partial\phi/\partial x_n \neq 0$ y x_n se pueden calcular a partir de la ecuación (44a) como una función de las otras coordenadas.

Ahora se define la medida $(n - 1)$ de esta porción de superficie como la integral

$$\text{(44b)} \quad A = \iint_B \cdots \int \frac{\sqrt{\phi_{x_1}{}^2 + \phi_{x_2}{}^2 + \cdots + \phi_{x_n}{}^2}}{|\phi_{x_n}|} \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_{n-1}.$$

Esta definición es una generalización formal de la fórmula (29b), p. 482, para las áreas de las superficies en el espacio tres y puede basarse en argumentos intuitivos semejantes. Cuando no haya peligro de confusión, también nos referiremos a A simplemente como el "área", incluso en el caso de una hipersuperficie en el espacio n dimensional. En el capítulo siguiente se dará una discusión más sistemática de las superficies, áreas de superficies e integrales de superficie. Por el momento basta con observar que la cantidad A definida por (44b) es independiente de la elección de la coordenada x_n para la cual se resuelve la ecuación (44a). Esto se puede probar de la misma manera que se hizo en el caso tridimensional en p. 483.

Con mayor generalidad, se define *la integral de una función* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *sobre esta superficie* $(n - 1)$ *dimensional como*

$$\text{(44c)} \qquad \iint_S \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) \, d\sigma$$

$$= \iint_B \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) \frac{\sqrt{\phi_{x_1}{}^2 + \cdots + \phi_{x_n}{}^2}}{|\phi_{x_n}|} \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_{n-1},$$

donde, como antes, se supone que x_n está expresada en términos de $x_1, \ldots, x_{n-1}$ por medio de la ecuación (44a). Una vez más se encuentra que la expresión (44c) es independiente de la elección de la variable x_n.

Como para dos o tres dimensiones, una *integral múltiple de volumen* sobre una región R n dimensional,

$$\text{(45a)} \qquad \iint_R \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1, \ldots, dx_n$$

puede resolverse en integrales de superficie (ver las fórmulas (37a, c)]. Supóngase que se cubre la región R por medio de una familia de hipersuperficies S

(45b) $$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \text{constante} = \xi\,,$$

de tal manera que por cada punto de R pase una, y sólo una superficie. Si se remplazan $x_1, \ldots, x_{n-1}$, x_n por las nuevas variables independientes

$$x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi = \phi(x_1, \ldots, x_n),$$

por la regla para la transformación de las integrales (p. 135) la integral múltiple (45a) se convierte en

$$\int d\xi \int \cdots \int \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{|\phi_{x_n}|} dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

Usando la fórmula (44c) se obtiene

(45c) $$\iint_R \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$
$$= \int d\xi \int_{S_\xi} \cdots \int \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{\sqrt{\phi_{x_1}^2 + \cdots + \phi_{x_n}^2}} d\sigma,$$

donde

(45d) $$d\sigma = \frac{\sqrt{\phi_{x_1}^2 + \cdots + \phi_{x_n}^2}}{|\phi_{x_n}|} dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

es el elemento de área de la superficie S_ξ.

b. Area y volumen de la esfera n dimensional

Como una aplicación de la fórmula (45c) para la reducción del volumen a integrales de superficie, se calculará el área y el volumen de una esfera de radio R en el espacio n dimensional, es decir, el área de la hipersuperficie

(46a) $$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = R^2,$$

y el volumen de la bola

(46b) $$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqq R^2.$$

Primero se deducirá una fórmula general que reduzca la integral en el espacio de una función con simetría esférica a una integral simple. Se diche que la función f de las variables $x_1, \ldots, x_n$ tiene *simetría esférica* si

$$f = f(r),$$

donde

(46c) $$r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

es decir, si f es constante sobre esferas con centros en el origen. La esfera S_r de radio r alrededor del origen está dada por la ecuación

(46d) $$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \text{constante} = r.$$

Aquí

(46e) $$\phi_{x_i} = \frac{1}{r} x_i; \quad \sqrt{\phi_{x_1}^2 + \cdots + \phi_{x_n}^2} = 1.$$

Entonces, de (45c) se obtiene la integral de volumen de la función $f(r)$ sobre la bola (46b), a saber

(46f) $$\iint \cdots \int f(r)\, dx_1 \cdots dx_n = \int_0^R f(r)\, dr \int_{S_r} \cdots \int d\sigma$$
$$= \int_0^R f(r)\ \Omega_n(r) dr,$$

donde $\Omega_n(r)$ es el área de la esfera S_r. Aquí, por (44b), (46e), el área del hemisferio

$$\phi = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = r \qquad (x_n \geqq 0)$$

es

(47a) $$\frac{1}{2} \Omega_n(r) = r \int_{B_r} \cdots \int \frac{dx_1 \cdots dx_{n-1}}{x_n},$$

donde la integración se extiende sobre la bola $(n - 1)$ dimensional, B_r, dada por

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leqq r^2,$$

y donde

$$x_n = \sqrt{r^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2}.$$

Remplazando $x_1, \ldots, x_{n-1}$ en B_r por las nuevas variables

$$\xi_i = \frac{1}{r} x_i \qquad (i = 1, \ldots, n - 1)$$

y poniendo

$$\xi_n = \frac{1}{r} x_n = \sqrt{1 - \xi_1^2 - \cdots - \xi_{n-1}^2},$$

de (47a) se obtiene que

$$\text{(47b)} \qquad \Omega_n(r) = 2r^{n-1} \int \cdots \int \frac{d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1}}{\xi_n},$$

donde la integración es sobre la bola unitaria en $n - 1$ dimensiones

$$\xi_1^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2 \leqq 1.$$

La fórmula (47b) se puede escribir como

$$\text{(47c)} \qquad \Omega_n(r) = \omega_n \, r^{n-1},$$

donde

$$\omega_n = 2 \iint \cdots \int \frac{d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1}}{\xi_n} = \Omega_n(1)$$

es el área de la esfuera unitaria S_1 en n dimensiones. Expresa el hecho intuitivamente plausible de que *las áreas de esferas en n dimensiones son proporcionales a la* $(n - 1)$ *ésima potencia de sus radios*. La fórmula (46f) para la integral en el espacio sobre la bola (46b), de una función con simetría esférica, ahora toma la forma

$$\text{(48a)} \qquad \iint \cdots \int f(r)\, dx_1 \cdots dx_n = \omega_n \int_0^R f(r) r^{n-1}\, dr.$$

A partir de esta fórmula ω_n se puede calcular en forma conveniente . Elíjase como $f(r)$ una función para la cual la integral de la derecha converja absolutamente cuando $R \to \infty$ y puede evaluarse explícitamente. Entonces la integral impropia de $f(r)$ como una función de $x_1, \ldots, x_n$ sobre el espacio completo también converge. Elíjase como f la función[1]

$$f(r) = \exp(-r^2) = \exp(-x_1^2 - \cdots - x_n^2).$$

La integral de f sobre el espacio completo es el límite de las integrales sobre los cubos C_a con centro en el origen y lados de longitud $2a$

[1]Resulta conveniente escribir $\exp(z)$ para la función exponencial e^z en los casos en los que el exponente z tiene una expresión más complicada.

paralelos a los ejes. Aquí

$$\iint_{C_a} \cdots \int f(r)\, dx_1 \cdots dx_n$$
$$= \int_{-a}^{a} dx_1 \int_{-a}^{a} dx_2 \cdots \int_{-a}^{a} dx_n \exp(-x_1^2)\exp(-x_2^2)\cdots\exp(-x_n^2)$$
$$= \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx\right)^n.$$

Así, cuando $a \to \infty$, de (48a) se obtiene la identidad

$$\text{(48b)} \qquad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^n = \omega_n \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1}\, dr.$$

Para el caso especial $n = 2$, esta fórmula ya ha sido deducida por medio de un argumento semejante en la p. 473 y condujo al resultado (ver (25a)) de que

$$\text{(48c)} \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Por otra parte, la sustitución $r^2 = s$ muestra que

$$\text{(48d)} \qquad \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1}\, dr = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-s} s^{(n-2)/2}\, ds = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Aquí $\Gamma(\mu)$ denota la función gama definida por

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty e^{-s} s^{\mu-1}\, ds \qquad (\mu > 0)$$

en el Volumen I (p. 308).[1] De aquí que (48b) conduce al valor

$$\text{(48e)} \qquad \omega_n = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

para el área de la superficie de la esfera unitaria en n dimensiones. Fácilmente se determina el valor de $\Gamma(n/2)$ para los enteros n a partir de la fórmula de recurrencia

$$\text{(48f)} \qquad \Gamma(\mu) = (\mu - 1)\Gamma(\mu - 1),$$

la cual se deduce directamente, integrando por partes, de la defi-

[1] Ver también la p. 556 del presente volumen.

nición de la función gama (ver el Volumen I, p. 308). De aquí que, para n par

(48g) $$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n-2}{2}\,\frac{n-4}{2}\cdots\frac{2}{2}\Gamma(1) = \left(\frac{n}{2}-1\right)!$$

mientras que para n impar, usando (48c),

(48h) $$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n-2}{2}\,\frac{n-4}{2}\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(n-2)(n-4)\cdots 3\cdot 1}{2^{(n-1)/2}}\sqrt{\pi}.$$

De este modo, de (48e), se obtienen sucesivamente los valores

$$\omega_2 = 2\pi, \quad \omega_3 = 4\pi, \quad \omega_4 = 2\pi^2, \quad \omega_5 = \frac{8}{3}\pi^2, \ldots.$$

Con el fin de encontrar *el volumen de la bola n dimensional* $V_n(R)$ de radio R, se pone $f = 1$ en la fórmula (48a) y se encuentra que

(49a) $$V_n(R) = \iint\cdots\int dx_1\cdots dx_n = \omega_n\int_0^R r^{n-1}\,dr = v_nR^n,$$

donde

(49b) $$v_n = \frac{1}{n}\,\omega_n = \frac{\sqrt{\pi}^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

es el volumen de la bola unitaria n dimensional. De donde,

(49c) $$v_1 = 2, \; v_2 = \pi, \; v_3 = \frac{4}{3}\pi, \; v_4 = \frac{1}{2}\pi^2, \; v_5 = \frac{8}{15}\pi^2, \ldots.$$

c. Generalizaciones. Representaciones paramétricas

En el espacio n dimensional se puede considerar un conjunto r dimensional para cualquier $r \leq n$ y tratar de definir su área. Con este fin resulta ventajosa una representación paramétrica. Sea el conjunto r dimensional dado por las ecuaciones

$$x_1 = \phi_1(u_1, \ldots, u_r)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = \phi_n(u_1, \ldots, u_r),$$

donde las funciones ϕ_ν poseen derivadas continuas en una región B de las variables $(u_1, \ldots, u_r)$. A medida que las variables $u_1, \ldots, u_r$

varían sobre esta región, el punto $(x_1, \ldots, x_n)$ describe una superficie r dimensional.

A partir de la matriz rectangular (ver la p. 183)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_r} & \frac{\partial x_2}{\partial u_r} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_r} \end{pmatrix}$$

se forman ahora todos los determinantes posibles D_i, de r filas, donde $i = 1, 2, \ldots, k = \binom{n}{r}$, primero de los cuales, por ejemplo, es el determinante

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_r}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_r}{\partial u_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_r} & \frac{\partial x_2}{\partial u_r} & \cdots & \frac{\partial x_r}{\partial u_r} \end{vmatrix}.$$

Entonces, el área de la superficie r dimensional está dada por la integral

$$\text{(50a)} \qquad \int \cdots \int \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_k^2}\, du_1 \cdots du_r \quad ; \quad k = \binom{n}{r}.$$

Por medio del teorema acerca de la transformación de las integrales múltiples (p. 460) y através de cálculos sencillos con determinantes (los cuales se omitirán aquí), se puede probar que el área definida por esta expresión no se cambia si se remplazan $u_1, \ldots, u_r$ por otros parámetros. También se ve que, para $r = 1$, ésta se reduce a la fórmula usual para la longitud de arco y, para $r = 2$ en un espacio de tres dimensiones, se convierte en la fórmula (30a), p. 485, para el área.

Se probará la fórmula (50a) cuando $r = n - 1$, donde n es arbitrario; es decir, se probará el teorema siguiente:

Si una porción de una hipersuperficie $(n - 1)$ dimensional en el espacio n dimensional se puede representar paramétricamente por las ecuaciones

$$x_i = \psi_i(u_1, \ldots, u_{n-1}) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

entonces su área está dada por

$$\text{(50b)} \qquad A = \int \cdots \int \sqrt{D_1^2 + \cdots + D_n^2}\, du_1 \cdots du_{n-1},$$

donde D_i es el jacobiano de $(n - 1)$ filas dada por

$$D_i = \frac{d(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{d(u_1, \ldots, u_{n-1})}$$
$$= 1 \Big/ \frac{d(u_1, \ldots, u_{n-1})}{d(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)}.$$

Aquí, como siempre, se supone la existencia y continuidad de todas las derivadas aue intervienen.

Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que $\phi_{x_n} \neq 0$. Entonces, por (44b), A está dada por

$$A = \int \cdots \int \frac{|\text{grad}\phi|}{|\phi_{x_n}|}\, dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

Sólo tiene que demostrarse que

$$\frac{1}{|\phi_{x_n}|}\, |\text{grad}\,\phi|\, dx_1 \cdots dx_{n-1} = \sqrt{\sum_i D_i^2}\, du_1 \cdots du_{n-1},$$

o bien, que

$$|\text{grad}\,\phi|^2 = \phi_{x_n}^2 (\sum_i D_i^2) \frac{d(u_1, \ldots, u_{n-1})}{d(x_1, \ldots, x_{n-1})} = \frac{\phi_{x_n}^2}{D_n^2} \sum_i D_i^2.$$

Ahora bien, por las propiedades de los jacobianos,

$$\frac{D_i}{D_n} = \frac{d(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)/d(u_1, \ldots, u_{n-1})}{d(x_1, \ldots, x_{n-1})/d(u_1, \ldots, u_{n-1})}$$
$$= \frac{d(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{d(x_1, \ldots, x_{n-1})}.$$

Este último jacobiano corresponde a la introducción de $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ en lugar de $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ como variables independientes. Pero como las derivadas parciales $\dfrac{\partial x_n}{\partial x_i}$ se obtienen a partir de las ecuaciones

$$\phi_{x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_i} + \phi_{x_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$$

se tiene $D_i/D_n = \pm\, \phi_{x_i}/\phi_{x_n}$. De aquí que

$$\frac{D_i^2}{D_n^2} = \frac{\phi_{x_i}^{\ 2}}{\phi_{x_n}^{\ 2}},$$

lo cual prueba la fórmula (50b) para A.

Aquí, se puede mencionar que la expresión $\sum_i D_i^2$ es representable como un determinante de $(n-1)$ filas,

(50c)
$$W = \sum_{i=1}^{n} D_i^2 = \Gamma(\mathbf{X}_{u_1}, \ldots, \mathbf{X}_{u_{n-1}})$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{X}_{u_1}\cdot\mathbf{X}_{u_1} & \mathbf{X}_{u_1}\cdot\mathbf{X}_{u_2} & \ldots & \mathbf{X}_{u_1}\cdot\mathbf{X}_{u_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{X}_{u_{n-1}}\cdot\mathbf{X}_{u_1} & \cdots & \cdots & \mathbf{X}_{u_{n-1}}\cdot\mathbf{X}_{u_{n-1}} \end{vmatrix}$$

("determinante de Gram; ver la p. 235), de modo que

(50d)
$$A = \int\cdots\int \sqrt{W}\, du_1 \cdots du_{n-1}.$$

Aquí, los elementos del determinante son los productos internos de los vectores

$$\mathbf{X}_{u_i} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_i}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial u_i}\right) \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_{u_k} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_k}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial u_k}\right),$$

a saber, las expresiones

(50e)
$$\mathbf{X}_{u_i}\cdot\mathbf{X}_{u_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial u_i}\frac{\partial x_j}{\partial u_k}.$$

Ejercicios 4.11

1. Calcular el volumen del elipsoide n dimensional

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \leqq 1.$$

2. Expresar la integral de una función de x_1, que sólo depende de x_1, sobre la esfera unitaria $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ en el espacio n dimensional, como una integral sencilla.
3. Un *simplex* n es la intersección en el espacio n dimensional de $n+1$ semiespacios en posición general; es decir, n cualesquiera de los hiperplanos que limitan a los semiespacios se cortan exactamente en un punto, un *vértice* del simplex: por ejemplo, un triángulo en el plano o un tetraedro en el espacio tridimensional. Encontrar el volumen del simplex n limitado por los hiperplanos $x_k \geqq 0$ $k = 1, 2, \ldots, n$ y

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} \leqq 1.$$

4.12 Integrales simples impropias como funciones de un parámetro

a. *Convergencia uniforme. Dependencia continua del parámetro*

Las integrales impropias frecuentemente aparecen como funciones de un parámetro. Por ejemplo, la integral de la potencia general

(51a) $$\int_0^1 y^x\, dy = \frac{1}{x+1}$$

es una integral impropia para x en el intervalo $-1 < x < 0$.

Se ha visto (p. 103) que una integral sobre un intervalo finito es continua cuando se considera como una función de un parámetro, siempre que el integrando sea continuo. En el caso de un intervalo infinito, no obstante, la situación no es tan sencilla. Consideremos, por ejemplo, la integral

(51b) $$F(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xy}{y}\, dy.$$

Según que se tenga $x > 0$ o bien, $x < 0$, esta se transforma por la sustitución $xy = z$ en

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} z}{z}\, dz \qquad \text{or} \qquad \int_0^{-\infty} \frac{\operatorname{sen} z}{z}\, dz = -\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} z}{z}\, dz.$$

La integral

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} z}{z}\, dz$$

converge, como se ha visto en el Volumen I (p. 310) y, de hecho, tiene el valor $\pi/2$ (Volumen I, p. 589). De donde, aunque la función (sen $xy)/y$, considerada como una función de x y y, es continua en todo punto y su integral converge para cada valor de x, la función $F(x)$ es discontinua:

$$\text{(51b)} \qquad \int_0^\infty \frac{\text{sen}\, xy}{y}\, dy = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{para} \quad x > 0 \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{para} \quad x < 0. \end{cases}$$

Por sí mismo, este hecho no es sorprendente en lo absoluto, porque es análogo a la situación de la convergencia no uniforme para las series infinitas (Volumen I, p. 533) y debe recordarse que el proceso de integración es una suma generalizada. Se puede tener la seguridad de que una serie infinita de funciones continuas representa una función continua sólo si la convergencia es *uniforme*. Aquí, en el caso de las integrales impropias que dependen de un parámetro, nuevamente se debe introducir el concepto de convergencia uniforme.

Se dice que *la integral*

$$\text{(52a)} \qquad F(x) = \int_0^\infty f(x, y)dy$$

converge uniformemente (en x) en el intervalo a $a \leqq x \leqq b$, *siempre que el "residuo" de la integral pueda hacerse arbitrariamente pequeño simultáneamente para todos los valores de x en el intervalo bajo consideración o, más precisamente, siempre que para un número positivo dado,* ε, *exista un número positivo* $A = A(\varepsilon)$, *que no dependa de x y sea tal que, para* $B \geqq A$

$$\text{(52b)} \qquad \left| \int_B^\infty f(x, y)dy \right| < \varepsilon.$$

Como un criterio útil, se afirma que la integral

$$\int_0^\infty f(x, y)dy$$

converge uniformemente (y absolutamente) si para y lo suficientemente grande, digamos $y > y_0$, *se cumple la relación*

$$\text{(52c)} \qquad \left| f(x, y) \right| < \frac{M}{y^\alpha}$$

donde M es una constante positiva y $\alpha > 1$. Porque, en este caso,

$$\left|\int_B^\infty f(x, y)dy\right| < M\int_B^\infty \frac{dy}{y^\alpha} = M\frac{1}{(\alpha - 1)B^{\alpha-1}} \leqq M\frac{1}{(\alpha - 1)A^{\alpha-1}};$$

la última cota se puede hacer tan pequeña como se desee eligiendo A lo suficientemente grande, y es independiente de x. Este es un análogo directo del criterio para la convergencia uniforme de las series, dado en el Volumen I (p.535).

Fácilmente se ve que *una integral uniformemente convergente de una función continua es a su vez una función continua,* porque si se elige A de modo que

$$\left|\int_A^\infty f(x, y)dy\right| < \varepsilon$$

para todos los valores de x en el intervalo bajo consideración, entonces, de (52a),

$$\left|F(x + h) - F(x)\right| < \left|\int_0^A \{f(x + h, y) - f(x, y)\}\, dy\right| + 2\varepsilon.$$

En virtud de la continuidad uniforme de la función $f(x, y)$ en un con- unto acotado, puede elegirse h tan pequeño que la integral finita de la derecha sea menor que ε, lo cual prueba la continuidad de la integral.

Se cumple un resultado semejante cuando la región de integración es finita pero el integrando tiene un punto de discontinuidad infinita. Supóngase, por ejemplo, que la función $f(x, y)$ tiende a infinito cuando $y \to \alpha$. Entonces se dice que *la integral convergente*

$$F(x) = \int_\alpha^\beta f(x, y)dy \tag{53a}$$

converge uniformemente en a $a \leqq x \leqq b$ *si para cada número positivo* ε *se puede encontrar un número* k *independiente de* x *tal que*

$$\left|\int_\alpha^{\alpha+h} f(x, y)dy\right| < \varepsilon, \tag{53b}$$

siempre que $h \leqq k$.

La condición, en la vecindad del punto $y = \alpha$

$$\left|f(x, y)\right| < \frac{M}{(y - \alpha)^\nu} \qquad (\nu < 1) \tag{53c}$$

es suficiente para la convergencia uniforme. Como antes, la conver-

gencia uniforme para un integrando continuo implica que la integral es una función continua.

Si la convergencia es uniforme en un intervalo $a \leqq x \leqq b$, la integral impropia $F(x)$ es continua. Entonces $F(x)$ se puede integrar sobre este intervalo finito y, por tanto, formar la integral repetida impropia correspondiente:

$$\int_a^b dx \int_0^\infty f(x, y)dy$$

para un intervalo infinito de integración en y, y

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)dy$$

para una discontinuidad infinita.

Por supuesto, en lugar del intervalo finito $a \leqq x \leqq b$, también puede considerarse un intervalo de integración infinito para x. Pero entonces la integral repetida no necesariamente converge. Por ejemplo, la integral

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{dy}{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{2x}$$

converge uniformemente para $x \geqq 1$, pero

$$\int_1^\infty F(x)dx$$

no existe

b. Integración y derivación de las integrales impropias con respecto a un parámetro

En general, no es cierto que las integrales impropias se puedan derivar o integrar bajo el signo de integración con respecto a un parámetro. En otras palabras, generalmente las operaciones de hallar un límite y la integración no se pueden ejecutar en orden inverso (ver el ejemplo de la p. 532).

Con el fin de determinar si es reversible el orden de integración en las integrales impropias repetidas, a menudo se puede aplicar el criterio siguiente (o bien, llevarse a cabo una investigación especial siguiendo los lineamientos de su demostración).

Si la integral impropia

(54a) $$F(x) = \int_0^\infty f(x, y)dy$$

converge uniformemente en el intervalo $\alpha \leqq x \leqq \beta$, *entonces*

(54b) $$\int_\alpha^\beta dx \int_0^\infty f(x, y)dy = \int_0^\infty dy \int_\alpha^\beta f(x, y)dx.$$

Para probar ésto póngase

$$\int_0^\infty f(x, y)dy = \int_0^A f(x, y)dy + R_A(x).$$

Por hipótesis, $|R_A(x)| < \varepsilon(A)$, donde $\varepsilon(A)$ sólo depende de A, no de x, y tiende a cero conforme $A \to \infty$. El teorema de la p. 109, acerca del intercambio del orden de integración, da

$$\int_\alpha^\beta dx \int_0^\infty f(x, y)dy = \int_\alpha^\beta dx \int_0^A f(x, y)dy + \int_\alpha^\beta R_A(x)dx$$
$$= \int_0^A dy \int_\alpha^\beta f(x, y)dx + \int_\alpha^\beta R_A(x)dx,$$

de donde, por el teorema del valor medio del cálculo integral:

$$\left| \int_\alpha^\beta dx \int_0^\infty f(x, y)dy - \int_0^A dy \int_\alpha^\beta f(x, y)dx \right| \leqq \varepsilon(A)|\beta - \alpha|.$$

Si ahora se hace tender A hacia el infinito, se obtiene la fórmula (54b).

Si el intervalo de integración con respecto a un parámetro también es infinito, no siempre es posible el cambio del orden, aunque la convergencia sea uniforme. No obstante, puede llevarse a cabo si la integral doble impropia correspondiente existe (ver el Capítulo 4, p. 465 y siguientes). Así

(54c) $$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(x, y)dy = \int_0^\infty dy \int_0^\infty f(x, y)dx$$

si la integral doble $\iint |f(x, y)|dx\,dy$ existe sobre todo el primer cuadrante.

La fórmula (54c) se cumple, dado que la integral doble impropia es independiente del modo de aproximación de la región de integración. En un caso, se ha aproximado la integral por medio de franjas infinitas paralelas al eje x; en el otro, por medio de franjas paralelas al eje y.

Se cumple un resultado semejante si el intervalo de integración es finito pero el integrando es discontinuo a lo largo de un número finito de rectas $y =$ constante o sobre un número finito de curvas más generales en la región de integración. El teorema correspondiente es como sigue:

Si la función $f(x, y)$ sólo es discontinua a lo largo de un número finito de rectas $y = a_1, y = a_2, \ldots, y = a_r$ y si la integral

$$\int_a^b f(x, y)dy$$

converge uniformemente en x en el intervalo $\alpha \leqq x \leqq \beta$, entonces, en este intervalo la integral representa una función continua de x y

$$\int_\alpha^\beta dx \int_a^b f(x, y)dy = \int_a^b dy \int_\alpha^\beta f(x, y)dx. \tag{54d}$$

Es decir, bajo estas hipótesis se puede cambiar el orden de integración. La demostración del teorema es análoga a la de la fórmula (54b), dada anteriormente.

Con igual facilidad se extienden las reglas para la derivación con respecto a un parámetro. Se cumple el teorema siguiente:

Si la función $f(x, y)$ tiene una derivada seccionalmente continua con respecto a x en el intervalo $\alpha \leqq x \leqq \beta$ y las dos integrales

$$F(x) = \int_0^\infty f(x, y)dy \qquad \text{y} \qquad \int_0^\infty f_x(x, y)dy \tag{55a}$$

convergen uniformemente, entonces

$$F'(x) = \int_0^\infty f_x(x, y)dy. \tag{55b}$$

Es decir, bajo estas hipótesis se puede invertir el orden de los procesos de integración y de derivación con respecto a un parámetro, porque, si se pone

$$G(x) = \int_0^\infty f_x(x, y)dy,$$

entonces)54b) da

$$\int_\alpha^\xi G(x)dx = \int_\alpha^\xi dx \int_0^\infty f_x(x, y)dy = \int_0^\infty dy \int_\alpha^\xi f_x(x, y)dx.$$

El integrando de la derecha tiene el valor

$$\int_{\alpha}^{\xi} f_x(x, y)dx = f(\xi, y) - f(\alpha, y);$$

por lo tanto,

$$\int_{\alpha}^{\xi} G(x)dx = F(\xi) - F(\alpha);$$

de aquí que, si se deriva y después se remplaza ξ por x, se obtiene

$$\frac{dF(x)}{dx} = G(x) = \int_{0}^{\infty} f_x(x, y)dy,$$

que era lo que se debía probar.

De modo semejante se extiende la regla de la derivación cuando uno de los límites depende del parámetro x (ver Capítulo 1, p. 106), porque puede escribirse

$$\int_{\phi(x)}^{\infty} f(x, y)dy = \int_{\phi(x)}^{\alpha} f(x, y)dy + \int_{\alpha}^{\infty} f(x, y)dy,$$

donde α es cualquier valor fijo en el intervalo de integración. Entonces pueden aplicarse las reglas antes demostradas, a cada uno de los dos términos de la derecha.

Como antes, estas reglas de derivación también se cumplen para las integrales impropias con intervalos de integración finitos.

c. Ejemplos

1. Considérese la integral

$$\int_{0}^{\infty} e^{-xy}\, dy = \frac{1}{x} \qquad (x > 0).$$

Si $x \geqq 1$, esta integral converge uniformemente, dado que para valores positivos de A

$$\int_{A}^{\infty} e^{-xy}\, dy \leqq \int_{A}^{\infty} e^{-y}\, dy = e^{-A},$$

donde la cota final ya no depende de x y puede hacerse tan pequeña como se desee si se elige A lo suficientemente grande. Lo mismo se

cumple para las integrales de las derivadas parciales de la función con respecto a x. Así, derivando varias veces se obtiene

$$\int_0^\infty ye^{-xy}\,dy = \frac{1}{x^2}, \quad \int_0^\infty y^2e^{-xy}\,dy = \frac{2}{x^3}, \ldots, \int_0^\infty y^n e^{-xy}\,dy = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

En particular, para $x = 1$, se tiene

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty y^n e^{-y}\,dy = n!$$

Esta fórmula se estableció de modo diferente en el Volumen I (p. 308).

2. A continuación, consideremos la integral

$$\int_0^\infty \frac{dy}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{x}.$$

Una vez más, es fácil convencerse de que si $x \geqq a$, donde a es cualquier número positivo, se satisfacen todas las hipótesis requeridas para la derivación bajo el signo integral. Por lo tanto, derivando varias veces se obtiene la sucesión de fórmulas

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}, \quad \int_0^\infty \frac{dy}{(x^2+y^2)^3} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{x^5}, \ldots,$$

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(x^2+y^2)^n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\cdot\frac{1}{x^{2n-1}}.$$

A partir de estas fórmulas puede obtenerse otra deducción del producto de Wallis para π (ver el Volumen I, p. 281). Con este fin, se pone $x = \sqrt{n}$ para obtener

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2/n)^n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\sqrt{n}.$$

Conforme n crece, el primer miembro converge a la integral

$$\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Para probarlo, se estima la diferencia:

$$\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy - \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2/n)^n}.$$

Esta diferencia satisface la desigualdad

$$\left|\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy - \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2/n)^n}\right|$$

$$\leqq \int_0^T \left|e^{-y^2} - \frac{1}{(1+y^2/n)^n}\right| dy + \int_T^\infty e^{-y^2}\,dy + \int_T^\infty \frac{dy}{(1+y^2/n)^n}$$

$$\leqq \int_0^T \left|e^{-y^2} - \frac{1}{(1+y^2/n)^n}\right| dy + \int_T^\infty e^{-y^2}\,dy + \frac{1}{T},$$

dado que $(1 + y^2/n)^n > y^2$. Pero si se elige T tan grande que

$$\int_T^\infty e^{-y^2}\,dy + \frac{1}{T} < \frac{\varepsilon}{2}$$

y después se elige n tan grande que

$$\int_0^T \left|e^{-y^2} - \frac{1}{(1+y^2/n)^n}\right| dy < \frac{\varepsilon}{2},$$

lo que es posible en virtud de la convergencia uniforme del límite

$$\lim_{n\to\infty} (1 + y^2/n)^{-n} = e^{-y^2}$$

(Volumen I, p. 152), inmediatamente se deduce que

$$\left|\int_0^\infty \left(e^{-y^2} - \frac{1}{(1+y^2/n)^n}\right) dy\right| < \varepsilon.$$

Con el valor de la integral de e^{-y^2} dada en (25a), p. 473, se establece la relación

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \tag{56}$$

la cual es equivalante a la fórmula (80) dada en el Volumen I (p. 282).

3. Con el propósito de calcular la integral

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy,$$

se discutirá la función

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xy}\,\frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy.$$

Esta integral converge uniformemente si $x \geqq 0$, mientras que la

$$\int_0^\infty e^{-xy} \operatorname{sen} y\, dy$$

converge uniformemente si $x \geqq \delta > 0$, donde δ es un número positivo arbitrariamente pequeño. A continuación se probarán estas dos proposiciones. Por lo anterior $F(x)$ es continua si $x \geqq 0$; y si $x \geqq \delta$, se tiene

$$F'(x) = -\int_0^\infty e^{-xy} \operatorname{sen} y\, dy.$$

Integrando por partes dos veces fácilmente se evalúa esta última integral (ver el Volúmen I, p. 277):

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Se integra esto para obtener

$$F(x) = -\operatorname{arc\,tan} x + C,$$

donde C es una constante. En virtud de la relación[1]

$$\left|\int_0^\infty e^{-xy} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy\right| \leqq \int_0^\infty e^{-xy}\, dy = \left.\frac{e^{-xy}}{x}\right|_\infty^0 = \frac{1}{x},$$

la cual se cumple si $x \geqq \delta$, se ve que $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$. Dado que $\lim\limits_{x\to\infty}$ arc tan $= \pi/2$, C debe ser $\pi/2$, y se obtiene

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tan} x.$$

Como $F(x)$ es continua para $x \geqq 0$,

$$\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy,$$

lo cual da la fórmula requerida

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy = \frac{\pi}{2} \tag{57}$$

[1] Aquí arc tan x denota la rama principal de esa función, como se definió en el Volumen I (p. 214).

(ver el Volumen I, p. 589).

Se probará que

$$\int_0^\infty e^{-xy} \frac{\operatorname{sen} y}{y} dy$$

converge uniformemente si $x \geqq 0$. Si A es un número arbitrario y $k\pi$ es el menor múltiple de π que es mayor que A, se puede escribir el "residuo" de la integral en la forma

$$\int_A^\infty e^{-xy} \frac{\operatorname{sen} y}{y} dy = \int_A^{k\pi} e^{-xy} \frac{\operatorname{sen} y}{y} dy + \sum_{\nu=k}^{\infty} \int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi} e^{-xy} \frac{\operatorname{sen} y}{y} dy.$$

Los términos de la serie de la derecha tienen signos alternantes y sus valores absolutos tienden monótonamente a 0. Por lo tanto, por el criterio de Leibnitz (Volumen I, p. 514), la serie converge y el valor absoluto de su suma es menor que el de su primer término. Así, se tiene la desigualdad

$$\left| \int_A^\infty e^{-xy} \frac{\operatorname{sen} y}{y} dy \right| < \int_A^{(k+1)\pi} e^{-xy} \frac{|\operatorname{sen} y|}{y} dy < \int_A^{(k+1)\pi} \frac{1}{A} dy < \frac{2\pi}{A},$$

en la que el segundo miembro es independiente de x y puede hacerse tan pequeño como se desee. Esto establece la uniformidad de la convergencia.

La convergencia uniforme de

$$\int_0^\infty e^{-xy} \operatorname{sen} y \, dy$$

para $x \geqq \delta > 0$ se deduce inmediatamente de la relación

$$\int_A^\infty \left| e^{-xy} \operatorname{sen} y \right| dy \leqq \int_A^\infty e^{-xy} dy = \frac{e^{-Ax}}{x} \leqq \frac{e^{-A\delta}}{\delta}.$$

4. En la p. 525 se vió que la *convergencia uniforme* de las integrales es una condición suficiente para la reversibilidad del orden de integración. La simple *convergencia* no es suficiente, como lo hace ver el ejemplo que sigue:

Si se pone $f(x, y) = (2 - xy)\, xye^{-xy}$, entonces, como

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2 e^{-xy}),$$

la integral

$$\int_0^\infty f(x, y)dy$$

existe para toda x en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$; de hecho, para cada uno de esos valores de x, tiene el valor 0. Por lo tanto,

$$\int_0^1 dx \int_0^\infty f(x, y)dy = 0.$$

Por otra parte, ya que

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 ye^{-xy})$$

para toda $y \geqq 0$, se tiene

$$\int_0^1 f(x, y)dx = ye^{-y},$$

y, por lo tanto,

$$\int_0^\infty dy \int_0^1 f(x, y)dx = \int_0^\infty ye^{-y}\, dy = \int_0^\infty e^{-y}\, dy = 1.$$

De aquí que

$$\int_0^1 dx \int_0^\infty f(x, y)dy \neq \int_0^\infty dy \int_0^1 f(x, y)dx.$$

d. Evaluación de las integrales de Fresnel

Las integrales de Fresnel

(58a) $$F_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(\tau^2)\, d\tau, \qquad F_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\tau^2) d\tau,$$

tienen importancia en la óptica. Con el fin de evaluarlas, apliquemos la sustitución $\tau^2 = t$, para obtener

$$F_1 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}\, dt, \quad F_2 = \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Aquí, póngase

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2 t}\, dx$$

(esto se deduce de la sustitución $x = \tau/\sqrt{t}$) e inviértase el orden de la integración, lo que es posible de acuerdo con las reglas dadas (primero se restringe la integración con respecto a t a un intervalo finito $0 < a < t < b$, y, a continuación, se hace que $a \to 0$, $b \to \infty$).

$$F_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-x^2 t} \operatorname{sen} t \, dt, \quad F_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-x^2 t} \cos t \, dt.$$

Integrando por partes para evaluar las integrales interiores se reducen F_1 y F_2 a las integrales racionales elementales

$$F_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{1 + x^4} dx, \quad F_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^2}{1 + x^4} dx.$$

Las integrales pueden evaluarse con las fórmulas dadas en el Volumen I (ver el Volumen I, p. 290); la segunda integral puede reducirse a la primera por medio de la sustitución $x' = \frac{1}{x}$; ambas tienen el valor $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Consecuentemente,

(58b) $$F_1 = F_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Ejercicios 4.12

1. Evaluar $\int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx$.
2. Evaluar
$$F(y) = \int_0^1 x^{y-1}(y \log x + 1) dx.$$
3. Sea $f(x, y)$ diferenciable continuamente por dos veces y supóngase que $u(x, y, z)$ se define por
$$u(x, y, z) = \int_0^{2\pi} f(x + z \cos\phi, y + z \operatorname{sen}\phi) d\phi.$$
Probar que
$$z(u_{xx} + u_{yy} - u_{zz}) - u_z = 0.$$
4. Si $f(x)$ es continuamente diferenciable por dos veces y
$$u(x, t) = \frac{1}{t^{p-2}} \int_{-t}^{+t} f(x + y)(t^2 - y^2)^{(p-3)/2} dy \qquad (p > 1),$$
probar que
$$u_{xx} = \frac{p-1}{t} u_t + u_{tt}.$$
5. ¿Cómo deben elegirse a, b, c para que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(ax^2+2bxy+cy^2)]dx\,dy = 1?$$

6. Evaluar

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(ax^2+2bxy+cy^2)](Ax^2+2Bxy+Cy^2)dx\,dy,$

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(ax^2+2bxy+cy^2)](ax^2+2bxy+cy^2)dxdy,$

donde $a > 0$, $ac - b^2 > 0$.

7. La función de Bessel $J_0(x)$ puede definirse por

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Probar que

$$J_0'' + \frac{1}{x}J_0' + J_0 = 0.$$

8. Para cualquier índice entero no negativo, n, la función de Bessel $J_n(x)$ puede definirse por

$$J_n(x) = \frac{x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\pi}\int_{-1}^{+1}(\cos xt)(1-t^2)^{n-(1/2)}\,dt.$$

Probar que

(a) $J_n'' + \frac{1}{x}J_n' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)J_n = 0 \qquad (n \geqq 0),$

(b) $J_{n+1} = J_{n-1} - 2J_n' \qquad (n \geqq 1)$

$$J_1 = -J_0'.$$

9. Evaluar las integrales siguientes:

(a) $K(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos x\,dx$

(b) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\cos x\,dx$

(c) $I(a) = \int_0^{\infty} \exp(-x^2 - a^2/x^2)\,dx$

(d) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(ax)\,J_0(bx)}{x}\,dx$

donde J_0 denota la función de Bessel definida en el Ejercicio 7.

10. Probar que

$$\int_0^{n\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 ax}{x}\,dx$$

es del orden de log n es grande y que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 ax - \operatorname{sen}^2 bx}{x}\, dx = \frac{1}{2} \log \frac{a}{b}.$$

11. Remplazar la proposición "la integral $\int_0^{\infty} f(x, y)\, dy$ no es uniformemente convergente" por una proposición equivalente que no involucre forma alguna de las palabras "uniformemente convergente".

4.13 La integral de Fourier

a. Introducción

La teoría dada en la Sección 4.12 es ilustrada por *el teorema de la integral de Fourier* (ver el Volumen I, p. 615), el cual es fundamental en el análisis y la fisicomatemática. Recordemos que la serie de Fourier representa una función periódica seccionalmente suave, pero por otra parte arbitraria, en términos de funciones trigonométricas. La integral de Fourier da la representación trigonométrica correspondiente de una función no periódica $f(x)$ que está definida en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$ y que tiene su comportamiento en el infinito restringido en una forma apropiada para asegurar la convergencia.

Se harán las suposiciones siguientes acerca de la función $f(x)$:

1. En cualquier intervalo finito, $f(x)$ está definida, es continua y tiene una primera derivada continua, $f'(x)$, excepto posiblemente para un número finito de puntos.

2. Cerca de cada punto excepcional $f'(x)$ está acotada. En un punto excepcional $f(x)$ toma como su valor la media aritmética de los límites a la derecha y la izquierda:

(59a)
$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].^{1}$$

3. La integral.

(59b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = C$$

es convergente.

Entonces el teorema de la integral de Fourier afirma:

[1]Para una x excepcional no se requiere que $f'(x)$ esté definida. No obstante, lo acotado de f' cerca de un x excepcional implica que los límites $f(x-0)$ y $f(x+0)$, desde la izquierda y desde la derecha, existan.

(60) $$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \tau(t - x)dt.$$

Usando la identidad

$$\cos\ \tau(t - x) = \frac{1}{2}(e^{i\tau t - i\tau x} + e^{-i\tau t + i\tau x})$$

y poniendo

(61a) $$g(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\tau t}\, dt,$$

puede escribirse la fórmula (60) en la forma

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} [e^{i\tau x}g(\tau) + e^{-i\tau x}g(-\tau)]\, d\tau \\ &= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{A} [e^{i\tau x}g(\tau) + e^{-i\tau x}g(-\tau)]\, d\tau \\ &= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} g(\tau)e^{ix\tau}\, d\tau. \end{aligned}$$

De aquí que el teorema de Fourier se convierte en

(61b) $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{ix\tau}\, d\tau.$$

En la forma compleja, (61a) asocia con una función $f(x)$ otra función $g(\tau)$, *la transformada de Fourier* de f. El teorema de Fourier, como se da en la fórmula (61b), expresa a f en términos de g en una forma completamente simétrica; de hecho, simplemente afirma que $f(-x)$ es la transformada de Fourier de $g(\tau)$. La relación entre f y g es recíproca, excepto por el signo del exponente y el hecho de que, de acuerdo con la deducción a partir de (60), la integral impropia dada en (61b) debe tomarse en el *sentido restringido*

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}.$$

Sin embargo, en la fórmula (61a) para g la integral es absolutamente convergente, por la hipótesis (59b), y los límites superior e inferior pueden tender independientemente a $+\infty$ y $-\infty$, respectivamente. Las dos

fórmulas (61a, b) son ecuaciones recíprocas, cada una dando una de las funciones en términos de la otra.

Generalmente, la transformada de Fourier, $g(\tau)$, de una función de valores reales, $f(x)$, toma valores complejos. De (61a) se obtiene la ecuación conjugada compleja para una f real,

(62) $$\overline{g(\tau)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\tau t}\, dt = g(-\tau).$$

No obstante, cuando $f(x)$ es una función *par* la transformada de Fourier, g, también es par y es real para f real. En efecto, combinando las contribuciones de t y $-t$ en la integral (61a) se obtiene

(63a) $$g(\tau) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\tau t)\, dt,$$

lo que implica que $g(\tau) = g(-\tau)$. Entonces la fórmula (61b) puede escribirse en la forma

(63b) $$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(\tau) \cos(\tau x)\, d\tau$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\tau x) d\tau \int_0^{\infty} f(t) \cos(\tau t) dt.$$

De modo semejante, para una función *impar* $f(x)$,

(64a) $$g(\tau) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen}(\tau t)\, dt.$$

En (64a), g es una función impar con valores que son imaginarios puros para f real. La fórmula recíproca se convierte en

(64b) $$f(x) = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(\tau) \operatorname{sen}(\tau\pi) d\tau$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{sen}(\tau x) d\tau \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen}(\tau t) dt.$$

Se ilustrará el teorema de la integral de Fourier por medio de ejemplos, y a continuación se procederá a su demostración.

b. Ejemplos

1. Sea $f(x)$ la función escalón definida por $f(x) = 1$ cuando $x^2 < 1$, $f(x) = 0$ cuando $x^2 > 1$. Por la fórmula (63a), la transformada de

Fourier de f es la función

$$g(\tau) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \cos(\tau t) dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen} \tau}{\tau}.$$

De aquí que, por (63b),

$$\text{(65a)} \qquad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\tau x) \operatorname{sen} \tau}{\tau} d\tau = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{para} \quad x = \pm 1 \\ 0 & \text{para} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Esta integral aparece en la literatura matemática bajo el nombre de *factor discontinuo de Dirichlet*. Este factor muestra que una integral puede ser una función discontinua de un parámetro x aunque el integrando sea continuo en x. Por supuesto, este fenómeno sólo puede ocurrir debido a que la integral es impropia.

2. Sea $f(x) = e^{-kx}$ para $x > 0$, donde k es un número real positivo. Definiendo f como una función par para toda x, su transformación de Fourier resulta ser:

$$g(\tau) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \cos(\tau t)\, e^{-kt}\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{k^2 + \tau^2}$$

[ver la fórmula (64), p. 277 del Volumen I, para la evaluación de la integral]. Por (63b), esto conduce a la ecuación

$$\text{(65b)} \qquad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{k \cos(\tau x)}{k^2 + \tau^2} d\tau = e^{-k|x|}.$$

Por otra parte, continuando e^{-kx} como una *función impar* de x para x negativa, se obtiene la transformada de Fourier

$$g(\tau) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \operatorname{sen}(\tau t)\, e^{-kt}\, dt = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tau}{k^2 + \tau^2}$$

y la fórmula

$$\text{(65c)} \qquad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{sen}(\tau x)}{k^2 + \tau^2} d\tau = \begin{cases} e^{-kx} & \text{para} \quad x > 0 \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \\ -e^{kx} & \text{para} \quad x < 0. \end{cases}$$

3. La función $f(x) = e^{-x^2/2}$ da una interesante ilustración de las fórmulas recíprocas presentadas. La transformada de Fourier es

$$g(\tau) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2/2} \cos(x\tau)\, dx.$$

No se tiene la posibilidad de evaluar g por el hecho de que no se cuenta con una expresión explícita para la integral indefinida. Curiosamente, puede hallarse g resolviendo una ecuación diferencial. Derivando la expresión para g e integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned} g'(\tau) &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (xe^{-x^2/2}) \operatorname{sen}(x\tau)\, dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-x^2/2} \operatorname{sen}(x\tau) \Big|_0^\infty - \tau \int_0^\infty e^{-x^2/2} \cos(x\tau)\, dx \right] \\ &= -\tau g(\tau). \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\frac{d}{d\tau} [g(\tau) e^{\tau^2/2}] = (g\tau + g') e^{\tau^2/2} = 0$$

o bien, que

$$g(\tau) e^{\tau^2/2} = \text{constante} = c.$$

De aquí que g es de la forma

$$g(\tau) = ce^{-\tau^2/2}.$$

Por lo tanto, la transformada de Fourier de la función $f = e^{-x^2/2}$ tiene la forma

$$g(\tau) = ce^{-\tau^2/2}$$

con una cierta constante c. Ya que [ver (25a), p. 473]

$$c = g(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2/2}\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = 1,$$

se encuentra que *la transformada de Fourier de $f = e^{-x^2/2}$ es la misma función:*

(66a) $$g(\tau) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2/2} \cos(x\tau)\, dx = e^{-\tau^2/2}.$$

c. Demostración del teorema de la integral de Fourier

La demostración (como la correspondiente a las series de Fourier, dada en el Volumen I) se basa en el sencillo lema ("lema de Riemann-Lebesgue").

Si $\phi(t)$ es acotada y continua en el intervalo abierto $a < t < b$, se tiene

$$\lim_{A\to\infty} \int_a^b \phi(t) \operatorname{sen} At\, dt = 0. \tag{67}$$

Para la demostración del lema se supone que $|\phi(t)| < M$ para $a < t < b$. Sea ε un número positivo prescrito. Supóngase que se eligen α y β de modo que

$$a < \alpha < a + \frac{\varepsilon}{M}, \quad b - \frac{\varepsilon}{M} < \beta < b, \quad \alpha < \beta.$$

Entonces,

$$\left| \int_a^b \phi(t) \operatorname{sen} At\, dt \right| \leq \left| \int_\alpha^\beta \phi(t) \operatorname{sen} At\, dt \right| + 2\varepsilon.$$

En el intervalo cerrado $\alpha \leqq t \leqq \beta$, la función $\phi(t)$ es uniformemente continua y puede hallarse un δ tal que

$$|\phi(t') - \phi(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{para} \quad |t' - t| < \delta.$$

Ahora, remplazando t por $t + \pi/A$ en la integral se tiene

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta \phi(t) \operatorname{sen} At\, dt &= -\int_{\alpha-\pi/A}^{\beta-\pi/A} \phi\left(t + \frac{\pi}{A}\right) \operatorname{sen} At\, dt \\
&= -\int_\alpha^\beta \phi(t) \operatorname{sen} At\, dt \\
&\qquad - \int_\alpha^{\beta-\pi/A} \left[\phi\left(t + \frac{\pi}{A}\right) - \phi(t)\right] \operatorname{sen} At\, dt \\
&\qquad + \int_{\beta-\pi/A}^\beta \phi(t) \operatorname{sen} At\, dt \\
&\qquad - \int_{\alpha-\pi/A}^\alpha \phi\left(t + \frac{\pi}{A}\right) \operatorname{sen} At\, dt.
\end{aligned}$$

De donde, si A es tan grande que $\pi/A < \delta$ y $2M\pi/A < \varepsilon$, se encuentra que

$$\left| 2\int_{\alpha}^{\beta} \phi(t) \operatorname{sen} At\, dt \right| \leqq \frac{\beta - \alpha - \pi/A}{b - a} \varepsilon + \frac{2M\pi}{A} < 2\varepsilon,$$

y, por tanto, también

$$\left| \int_{a}^{b} \phi(t) \operatorname{sen} At\, dt \right| \leqq 3\varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, se llega a la relación (67).

Resulta claro que la fórmula (67) se cumple con más generalidad: a saber, cuando, eliminando un número finito de puntos excepcionales, se puede dividir el intervalo $a < t < b$ en intervalos abiertos en cada uno de los cuales $\phi(t)$ es continua y acotada.

Sea ahora $f(t)$ una función definida para toda t que satisface las hipótesis 1–3 dadas en las pp. 476-7. Para probar el teorema principal en la forma (60), primero se remplazan los intervalos de integración infinitos por otros que sean finitos, de modo que pueda invertirse el orden de la integración. Para A; B positivo (y una x fija), se introduce la expresión

$$\text{(68a)} \qquad I_A = \frac{1}{\pi} \int_0^A d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \tau(t - x)\, dt.$$

Por la hipótesis 3,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$$

converge. Consecuentemente, dado $\varepsilon > 0$, se tiene

$$\left| \int_{|t|>B} f(t) \cos \tau(t - x)\, dt \right| \leqq \int_{|t|>B} |f(t)|\, dt < \varepsilon$$

para todo B lo suficientemente grande. Se concluye que

$$\text{(68b)} \qquad \lim_{B\to\infty} \int_{-B}^{+B} f(t) \cos \tau(t - x)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \tau(t - x)\, dt$$

converge uniformemente en τ.

La fórmula (60), que se desea probar, afirma que

$$\text{(69)} \qquad f(x) = \lim_{A\to\infty} I_A.$$

En la integral (68a), que define a I_A, se pueden intercambiar las integraciones [ver (54b), p. 525] dado que la integral (68b) converge uniformemente.[1] Asi,

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^A f(t) \cos \tau(t-x)\, d\tau \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\operatorname{sen} A(t-x)}{t-x}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+x) \frac{\operatorname{sen} At}{t}\, dt. \end{aligned}$$

Usando la identidad

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} At}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} \qquad \text{para} \qquad A > 0$$

[ver (57), p. 530], este resultado se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\operatorname{sen} At}{t}\, dt \\ &= \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \phi(t) \operatorname{sen} At\, dt \\ &= \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{C} \phi(t) \operatorname{sen} At\, dt + \frac{1}{\pi}\int_C^{\infty} \phi(t) \operatorname{sen} At\, dt, \end{aligned}$$

donde C es cualquier constante positiva y

$$\phi(t) = \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t}.$$

La función $\phi(t)$ satisface todas las hipótesis del lema de Riemann-Lebesgue (67): es obvio que es continua, excepto posiblemente en un número finito de puntos, ya que esto se cumple para f. En un punto de discontinuidad $t \neq 0$, la función $\phi(t)$ permanece acotada ya que f sólo tiene discontinuidades por salto. Lo acotado de $\phi(t)$ cerca de $t = 0$ se deduce de la diferenciabilidad de f y lo acotado de f', dado que, por el teorema del valor medio del cálculo diferencial,

$$\phi(t) = f'(x + \theta t) - f'(x - \eta t),$$

[1]Se aplica por separado el teorema de la p. 524 a

$$\int_0^{\infty} f(t) \cos \tau(t-x)\, dt \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{0} f(t) \cos \tau(t-x)\, dt.$$

La función f puede tener un número finito de discontinuidades por salto en cualquier intervalo finito, sin cambiar la demostración de (54b).

donde θ, y η son ciertos valores intermedios entre 0 y 1.[1] Aplicando (67), se concluye que para cualquier $c > 0$

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^C \phi(t) \operatorname{sen} At\, dt = 0.$$

Además,

$$\frac{1}{\pi}\int_C^\infty \phi(t) \operatorname{sen} At\, dt = \frac{1}{\pi}\int_C^\infty \frac{f(x+t)+f(x-t)}{t} \operatorname{sen} At\, dt$$
$$- \frac{f(x+0)+f(x-0)}{\pi}\int_{AC}^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt.$$

Aquí la segunda integral tiende a 0 cuando $A \to \infty$ y cualquier C, mientras que eligiendo C lo suficientemente grande, la primera integral puede hacerse arbitrariamente pequeña, *uniformemente para toda* $A > 0$. Se concluye que

$$\lim_{A\to\infty} I_A = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Esto es equivalente a (69), ya que se supuso que

$$f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

d. *Rapidez de la convergencia en el teorema de la integral de Fourier*

Las fórmulas recíprocas (61*a*, *b*) se han establecido bajo las hipótesis 1–3 sobre la función $f(x)$ enunciadas en las pp. 535-536. Una consecuencia del requerimiento de que

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)|\, dx = C < \infty$$

es que la transformada de Fourier $g(\tau)$ dada por (61a) es absoluta y uniformemente convergente. En efecto, si se pone

[1]Nótese que para aplicar el teorema del valor medio sólo se requiere la existencia de la derivada en el interior del intervalo y la continuidad en el intervalo cerrado (ver el Volumen I, p. 174). Estas hipótesis son satisfechas por la función definida por $f(x + t)$ para t positivo pequeño y por $f(x + 0)$ para $t = 0$, así como por la función definida por $f(x - t)$ para t positivo pequeño y por $f(x - 0)$ para $t = 0$.

(70a) $$g_B(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} f(t) e^{-i\tau t}\, dt,$$

entonces

$$|g(\tau) - g_B(\tau)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|t|>B} f(t) e^{-i\tau t}\, dt \right|$$
$$\leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|t|>B} |f(t)|\, dt.$$

De aquí que, dado $\varepsilon > 0$, es posible encontrar un B tan grande que

$$|g(\tau) - g_B(\tau)| < \varepsilon \quad \text{para toda } \tau.$$

Se concluye que g, como límite uniforme de las funciones continuas g_B, es también continua.

En general, no se puede tener la seguridad de la convergencia uniforme de la integral en la fórmula recíproca (61b). Evidentemente, las funciones de aproximación

(70b) $$f_A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} g(\tau)\, e^{ix\tau}\, d\tau$$

son continuas y convergen hacia $f(x)$ para cada x. Sin embargo, la convergencia no puede ser *uniforme* si f tiene discontinuidades, como en el Ejemplo 1 de la p. 537. Una vez más, suficiente para la convergencia uniforme de las $f_A(x)$ hacia $f(x)$ es la existencia de la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|\, d\tau.$$

Es claro que se viola esta condición en el ejemplo mencionado, donde $g(\tau) = 2 \operatorname{sen} \tau / \sqrt{2\pi}\, \tau$.

Para muchas aplicaciones resulta conveniente trabajar sólo con integrales que sean uniformes y absolutamente convergentes. Por lo común, es mucho más difícil justificar los intercambios de las operaciones de límite para las integrales que convergen sólo condicionalmente. Resulta fácil imponer restricciones adicionales sobre f que garanticen la integrabilidad de g sobre el eje completo, y en consecuencia, la convergencia uniforme de las $f_A(x)$. Basta con requerir que $f(x)$ tenga primera y segunda derivadas continuas $f'(x)$ y $f''(x)$, y que las tres integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)|\,dx$$

sean convergentes.

Primero, la convergencia de

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\,dx$$

implica que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left[f(0) + \int_0^x f'(t)dt\right] = f(0) + \int_0^{\infty} f'(t)dt$$

existe. Obviamente,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

sólo puede tener el valor 0, ya que de lo contrario

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$$

no podría converger. De donde, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ y, por el mismo argumento, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. De modo semejante, la convergencia de

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)|\,dx$$

implica que también

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0,$$

Integrando por partes la fórmula (70a), dos veces, se obtiene

$$\text{(71a)} \qquad g_B(\tau) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}\,\tau}\left[-f(B)e^{-iB\tau} + f(-B)e^{iB\tau} + \int_{-B}^{B} f'(t)e^{-i\tau t}\,dt\right]$$

$$= \frac{e^{-iB\tau}[f'(B) + i\tau f(B)] - e^{iB\tau}[f'(-B) + i\tau f(-B)]}{\sqrt{2\pi}\,\tau^2}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\tau^2}\int_{-B}^{B} f''(t)e^{-i\tau t}\,dt.$$

De aquí que, cuando $B \to \infty$

(71b) $$g(\tau) = \frac{1}{i\tau\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\tau t}\, dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} f''(t)e^{-i\tau t}\, dt,$$

y así,

(71c) $$|g(\tau)| \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\tau^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f''(t)|\, dt = 0\left(\frac{1}{\tau^2}\right).$$

Evidentemente, esta estimación para $g(\tau)$ implica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|\, d\tau$$

converge (ver el Volumen I, p. 307) y, por tanto, que

$$f(x) = \lim_{A\to\infty} f_A(x) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} g(\tau)e^{ix\tau}\, d\tau$$

uniformemente para toda x. De hecho, bajo las hipótesis establecidas para f no importa la forma en la que el límite superior y el inferior en la integral tienden hacia $\pm\infty$; en general,

$$f(x) = \lim_{\substack{A\to\infty \\ B\to-\infty}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{B}^{A} g(\tau)e^{ix\tau}\, d\tau.$$

La ecuación (71b) puede interpretarse como la afirmación de que la función $f'(t)$ tiene la transformada de Fourier $i\tau g(\tau)$ y $f''(t)$, la transformada de Fourier $-\tau^2 g(\tau)$, donde g es la transformada de Fourier de f. De donde, bajo hipótesis apropiadas acerca de la regularidad, *la derivación de f corresponde a la multiplicación de la transformada de Fourier de f por el factor $i\tau$.* Este hecho tiene una importancia máxima en muchas aplicaciones de la transformación de Fourier.

e. Identidad de Parseval para las transformadas de Fourier

Para las series de Fourier se probó (Volumen I, p. 614) la identidad de Parseval, que relaciona la integral del cuadrado de una función periódica con la suma de los cuadrados de los coeficientes de Fourier. Existe una identidad análoga importante para las integrales de Fourier; incluso es más simétrica en forma, debido a la reci-

procidad entre una función f y su transformada de Fourier g. Como, incluso para f real, la transformada de Fourier g generalmente será de valor complejo, tiene que usarse el cuadrado del valor absoluto en lugar del cuadrado de la función. Entonces, la identidad de Parseval afirma que la integral del cuadrado del valor absoluto, extendida sobre todo el eje, es la misma para la función f que para su transformada de Fourier g:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2\,d\tau. \tag{72}$$

No se probará esta identidad bajo las hipótesis más generales para las cuales se cumple, sino únicamente para f restringida en la misma forma que al final de la última sección, a saber, cuando las tres funciones f, f', f'' son continuas y absolutamente integrables sobre todo el eje x.[1]

Como antes, se definen las aproximaciones $g_B(\tau)$ para g y $f_A(x)$ para f, por medio de las ecuaciones (70a) y (70b). Entonces se forma la expresión

$$\begin{aligned} J_{A,B} &= \int_{-B}^{B} |f(x) - f_A(x)|^2\,dx \\ &= \int_{-B}^{B} [f(x) - f_A(x)][\overline{f(x)} - \overline{f_A(x)}]\,dx \\ &= \int_{-B}^{B} [f(x)\overline{f(x)} - f(x)\overline{f_A(x)} - f_A(x)\overline{f(x)} + f_A(x)\overline{f_A(x)}]\,dx, \end{aligned}$$

donde el guión encima de una expresión indica el valor complejo conjugado. Ahora bien, intercambiando las integraciones se encuentra que

$$\begin{aligned} \int_{-B}^{B} f(x)\overline{f_A(x)}dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-B}^{B} f(x)dx \int_{-A}^{A} \overline{g(\tau)}e^{-ix\tau}\,d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} \overline{g(\tau)}\,d\tau \int_{-B}^{B} f(x)e^{-ix\tau}\,dx \\ &= \int_{-A}^{A} \overline{g(\tau)}g_B(\tau)\,d\tau, \end{aligned}$$

de donde, tomando el complejo conjugado,

$$\int_{-B}^{B} f_A(x)\,\overline{f(x)}dx = \int_{-A}^{A} g(\tau)\,\overline{g_B(\tau)}\,d\tau.$$

[1] Puede extenderse la identidad a una f más general, aproximando f apropiadamente por medio de funciones de la clase restringida que se usa aquí.

De aquí que

$$(73)\qquad J_{A,B} = \int_{-B}^{B} (|f(x)|^2 + |f_A(x)|^2)dx$$

$$- \int_{-A}^{A} [\overline{g(\tau)}\, g_B(\tau) + g(\tau)\, \overline{g_B(\tau)}]d\tau.$$

Dado que las hipótesis establecidas acerca de $f(x)$ garantizan que

$$\lim_{A\to\infty} f_A(x) = f(x)$$

uniformemente en x (ver la p. 545), también se tiene

$$\lim_{A\to\infty} |f(x) - f_A(x)|^2 = 0$$

uniformemente en x. En consecuencia,

$$\lim_{A\to\infty} J_{A,B} = \lim_{A\to\infty} \int_{-B}^{B} |f(x) - f_A(x)|^2\, dx = 0.$$

Así, cuando $A \to \infty$ la identidad (73) da

$$(74)\qquad 0 = 2\int_{-B}^{B} |f(x)|^2\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} [\overline{g(\tau)}\, g_B(\tau) + g(\tau)\, \overline{g_B(\tau)}]d\tau.$$

Ya que

$$\lim_{B\to\infty} g_B(\tau) = g(\tau)$$

uniformemente en τ, y como $g_B(\tau)$ está acotada uniformemente y

$$g(\tau) = 0\left(\frac{1}{\tau^2}\right),$$

puede hacerse que B tienda a ∞ en la identidad (74) para obtener, en el límite, la relación de Parseval (72).

f. La transformación de Fourier para funciones de varias variables.

En una dimensión, la identidad de la integral de Fourier proporciona una representación de una función $f(x)$ como una combinación

lineal de funciones exponenciales $e^{ix\xi}$ que dependen de un parámetro ξ. Para cada valor ξ del parámetro se multiplica la función $e^{ix\xi}$ por un "factor de peso" apropiado $g(\xi)/\sqrt{2\pi}$ y se integra con respecto a ξ. El factor apropiado $g(\xi)$ es la transformada de Fourier de f.

Existen fórmulas semejantes para la descomposición de funciones de varias variables en funciones exponenciales. Las funciones $f(x, y)$ de dos variables independientes x, y se representan como combinaciones de funciones exponenciales de la forma $e^{i(x\xi+y\eta)}$, que dependen de los parámetros ξ, η. De modo semejante, se construyen funciones de tres variables independientes $f(x, y, z)$ a partir de exponenciales $e^{i(x\xi+y\eta+z\zeta)}$, que dependen de los parámetros ξ, η, ζ. Tales descomposiciones de funciones generales en exponenciales constituyen una de las herramientas más poderosas del análisis matemático. Para un conjunto dado de parámetros ξ, η, ζ la función $e^{i(x\xi+y\eta+z\zeta)}$ depende de la combinación simple $s = x\xi + y\eta + z\zeta$, la cual es constante a lo largo de cada plano con números directores ξ, η, ζ en el espacio x, y, z. Si se introduce un nuevo sistema coordenado rectangular en el que uno de estos planos sea un plano coordenado, entonces $e^{i(x\xi+y\eta+z\zeta)}$ se convierte en una función de una sola coordenada. De esta manera, las fórmulas de Fourier proporcionan una descomposición de $f(x, y, z)$ en funciones que únicamente dependen de una sola coordenada (donde, sin embargo, la dirección del eje coordenado correspondiente depende de los parámetros ξ, η, ζ).

Esas expresiones exponenciales están íntimamente relacionadas con las *ondas planas* que se encuentran en la física. Multiplicando la función exponencial $e^{i(x\xi+y\eta+z\zeta)}$ por un factor exponencial $e^{-i\omega t}$, que dependa del tiempo, se obtiene la expresión

$$u(x, y, z, t) = e^{i(x\xi+y\eta+z\zeta)}\, e^{-i\omega t} = e^{i(\xi x+\eta y+\zeta z-\omega t)}. \tag{75a}$$

Aquí u tiene un valor fijo e^{is}, para todos los instantes t, en todas las posiciones (x, y, z) con el mismo valor de "fase"

$$s = x\xi + y\eta + z\zeta - \omega t.$$

Para s fijo, en cada instante t esto representa un plano ("frente de onda") en el espacio x, y, z, con números directores ξ, η, ζ para su normal. Conforme t varía este plano se mueve paralelo a sí mismo. Como (ver la p. 169) la cantidad

$$p = \frac{s + \omega t}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$$

es la distancia del plano al origen en el instante t, el plano se mueve con velocidad

$$c = \frac{dp}{dt} = \frac{\omega}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}. \tag{75b}$$

Esta es la *velocidad de propagación* de los frentes de onda, correspondiente a una "frecuencia" ω de la onda.

Se enunciará y probará el teorema de la integral de Fourier para una función $f(x, y)$ de dos variables independientes, bajo condiciones sobre f que sean suficientes para la validez del teorema (aunque lejos de ser necesarias) y convenientes para las aplicaciones.

Supóngase que $f(x, y)$ está definida y tiene derivadas continuas de primero, segundo y tercer órdenes para todos los valores x, y. Los valores absolutos de f y sus derivadas de orden $\leqq 3$ deben ser absolutamente integrables sobre el plano completo; es decir, para cualesquiera enteros no negativos i, k con $i + k \leqq 3$, las integrales impropias

$$\iint \left| \frac{\partial^{i+k} f(x, y)}{\partial x^i \, \partial y^k} \right| dx\, dy, \tag{76}$$

extendidas sobre el plano x, y completo, deberán converger. La transformada de Fourier $g(\xi, \eta)$ de f se define por la fórmula

$$g(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint e^{-i(x\xi + y\eta)} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{77a}$$

Entonces la función f se expresa en términos de su transformada de Fourier por la fórmula recíproca

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint e^{i(x\xi + y\eta)} g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{77b}$$

Aquí todas las integrales se extienden sobre el plano completo y convergen absolutamente.

Se cumple una proposición análoga para las funciones $f(x_1, \ldots, x_n)$ de n variables independientes. Sólo se tiene que suponer que f y sus derivadas de orden $\leqq n + 1$ existen y son absolutamente integrables sobre el espacio completo. Entonces, la *transformada de Fourier* $g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ se define por

$$g = (2\pi)^{-n/2} \int \cdots \int e^{-i(x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n)} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n. \tag{77a}$$

Aquí la fórmula recíproca para $f(x_1, \ldots, x_n)$ se convierte en

$$(77b) \quad f = (2\pi)^{-n/2} \int \cdots \int e^{i(x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n)} g(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \cdots d\xi_n.$$

La demostración para n dimensiones es exactamente igual a la demostración para el caso bidimensional, que se dará ahora.

Primero se probará el teorema de la integral de Fourier para una función $f(x, y)$ de clase C^3 y de *soporte compacto,* lo que significa que f tiene derivadas continuas de orden ≤ 3 y se anula fuera de algún conjunto acotado. Para esta situación, la fórmula de Fourier para f se deduce inmediatamente a partir de la fórmula para funciones de una sola variable, como se demostrará ahora.

La transformada de Fourier

$$g(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint e^{-i(x\xi + y\eta)} f(x, y)\, dx\, dy$$

está dada por una integral propia, supuesto que f se anula fuera de una región acotada. Introduciendo la transformada de Fourier "intermedia", con respecto a y únicamente, a saber,

$$(77c) \qquad \gamma(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iy\eta} f(x, y)\, dy,$$

g se puede escribir en la forma

$$g(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ix\xi} \gamma(x, \eta)\, dx.$$

Obviamente, para cada valor de η, se tiene en $\gamma(x, \eta)$ una función de la sola variable x, de clase C^3 y de soporte compacto. Su transformada de Fourier es $g(\xi, \eta)$. Se aplica el teorema de la p. 536 y da

$$(78) \qquad \gamma(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ix\xi} g(\xi, \eta)\, d\xi.$$

Por otra parte, $\gamma(x, \eta)$ para x fija es la transformada de Fourier de $f(x, y)$ considerada como una función de y únicamente. De aquí que se cumple la fórmula recíproca

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{iy\eta} \gamma(x, \eta)\, d\eta$$

Sustituyendo aquí γ por su expresión dada en (78), se obtiene

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\eta \int e^{i(x\xi + y\eta)} g(\xi, \eta)\, d\xi.$$

En esta fórmula, la integral repetida (primero con respecto a ξ y después con respecto a η) se puede remplazar por una integral doble sobre el plano ξ, η completo, lo cual conduce a la fórmula (77b). Este paso es válido (ver la p. 524), dado que la integral simple

$$\text{(79a)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\xi, \eta)| \, d\xi$$

converge uniformemente en ξ para toda η y, además, la integral doble

$$\text{(79b)} \qquad \iint |g(\xi, \eta)| \, d\xi \, d\eta$$

converge. Se concluyen ambos resultados de convergencia si se puede demostrar que una estimación de la forma

$$\text{(79c)} \qquad |g(\xi, \eta)| \leq \frac{M}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{3/2}}$$

es válida para g, con una constante M apropiada. La convergencia de la integral doble (79b) es una consecuencia de (79c). La convergencia uniforme de la integral simple (79a) se deduce de (79c) ya que, para $A > 1$

$$\int_{|\xi|>A} |g(\xi, \eta)| d\xi \leq M \int_{|\xi|>A} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{3/2}}$$
$$\leq M \int_{|\xi|>A} \frac{2|\xi|}{(1 + \xi^2)^2} d\xi = \frac{M}{1 + A^2};$$

el segundo miembro tiende a 0 cuando $A \to \infty$, independientemente de η.

La desigualdad (79c) se establece a partir de (77a) integrando varias veces por partes. Supuesto que f tiene soporte compacto, se encuentra que

$$\iint e^{-i(x\xi+y\eta)} \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3} dx \, dy = 2\pi (i\xi)^3 g(\xi, \eta)$$
$$\iint e^{-i(x\xi+y\eta)} \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3} dx \, dy = 2\pi (i\eta)^3 g(\xi, \eta)$$

y, de aquí, que

$$2\pi(1 + |\xi|^3 + \eta|^3) \, |g(\xi, \eta)|$$
$$= 2\pi |g(\xi, \eta)| + |2\pi(i\xi)^3 g(\xi, \eta)| + |2\pi(i\eta)^3 g(\xi, \eta)|$$
$$\leq \iint \left(|f(x, y)| + \left| \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3} \right| + \left| \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3} \right| \right) dx \, dy.$$

Para cualesquiera ξ, η, denotemos la mayor de las tres cantidades 1, $|\xi|$, $|\eta|$ por ζ. Entonces

$$(1 + \xi^2 + \eta^2)^{3/2} \leqq (\zeta^2 + \zeta^2 + \zeta^2)^{3/2} = 3\sqrt{3}\ \zeta^3 \leqq 3\sqrt{3}(1 + |\xi|^3 + |\eta|^3).$$

Esto lleva a la desigualdad (79c), con el valor

$$\text{(79b)} \qquad M = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \iint \left(|f(x, y)| + \left| \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3} \right| + \left| \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3} \right| \right) dx\, dy$$

para la constante, y completa la demostración del teorema de Fourier para las funciones $f(x, y)$ de clase C^3 y de soporte compacto.

La demostración del teorema para la f más general de clase C^3 para la cual las integrales (76) convergen, se deduce aproximando esa f por medio de funciones $f_n(x, y)$ de soporte compacto. Con este fin, se multiplica $f(x, y)$ por una función de "corte" apropiada, $\phi_n(x, y)$, de modo que el producto $f_n = \phi_n f$ tenga soporte compacto pero concuerde con f en el disco $x^2 + y^2 \leqq n^2$. Aquí sólo se requiere una función auxiliar $\phi_n(x, y)$ con estas propiedades:

1. $\phi_n(x,y)$ tiene soporte compacto y pertenece a C^3;
2. $\phi_n(x,y) = 1$ para $x^2 + y^2 \leqq n^2$;
3. Los valores absolutos de $\phi_n(x,y)$ y de todas sus derivadas de órdenes $\leqq 3$ no son mayores que una cantidad fija N, independientemente de x, y y n.

Fácilmente pueden construirse funciones ϕ_n apropiadas, en varias formas.[1]

Denotemos por $g_n(\xi, \eta)$ la transformada de Fourier de $f_n = \phi_n f$:

$$\text{(80a)} \qquad g_n(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \iint e^{-i(x\xi+y\eta)}\, \phi_n(x,y) f(x,y)\, dx\, dy.$$

Entonces

$$|g(\xi,\eta) - g_n(\xi,\eta)| = \left| \frac{1}{2\pi} \iint e^{-i(x\xi+y\eta)}(1 - \phi_n) f\, dx\, dy \right|$$

[1] Por ejemplo, defínase la función $h(s)$ por

$$h(s) = \begin{cases} 1 \text{ para } s \leqq 0 \\ (1 - s^4)^4 \text{ para } 0 \leqq s \leqq 1 \\ 0 \text{ para } 1 \leqq s. \end{cases}$$

Entonces

$$\phi_n(x, y) = h(x - n)h(-n - x)h(y - n)h(-n - y)$$

tiene todas las propiedades deseadas.

$$\geqq \frac{\ }{2\pi} \iint_{x^2+y^2>n^2} |(1 - \phi_n)f| \, dx \, dy$$

$$\leqq (N + 1) \iint_{x^2+y^2>n^2} |f| \, dx \, dy.$$

Por la supuesta convergencia de la intégral de $|f|$ sobre el plano completo se deduce que

(80b) $$\lim_{n\to\infty} g_n(\xi, \eta) = g(\xi, \eta)$$

uniformemente para todo (ξ, η). Para ver que $g(\xi, \eta)$ nuevamente satisface una desigualdad de la forma (79c), se observa que, por la regla Leibnitz,

$$\left|\frac{\partial^3 f_n}{\partial x^3}\right| = \left|\frac{\partial^3}{\partial x^3} \phi_n f\right|$$
$$\leqq N \left(\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right| + 3\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| + 3\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|f\right| \right).$$

Se cumple una estimación semejante para la tercera derivada respecto de y de f_n. Sea I la mayor de las integrales, tomadas sobre el plano completo, de los valores absolutos de f y sus derivadas de órdenes $\leqq 3$. Entonces

$$\iint \left(|f_n| + \left|\frac{\partial^3}{\partial x^3} f_n\right| + \left|\frac{\partial^3}{\partial y^3} f_n\right| \right) dx \, dy \leqq (1 + 8 + 8) \, NI = 17NI.$$

Aplicando la desigualdad (79c, d) a la función f_n, se encuentra que, para cualquier n y todas las ξ, η, se cumple la desigualdad

(80c) $$|g_n(\xi, \eta)| \leqq \frac{M}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{3/2}},$$

con

$$M = \frac{51\sqrt{3}}{2\pi} NI.$$

De (80b) se deduce que

$$|g(\xi, \eta)| \leqq \frac{M}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{3/2}}$$

para todo (ξ, η), con la misma constante M.

Supuesto que f_n tiene soporte compacto, ya se sabe que la fórmula recíproca

$$f_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint e^{i(x\xi+y\eta)} g_n(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{80d}$$

es válida. Para un (x, y) dado se tiene $f_n(x, y) = f(x, y)$, una vez que n es tan grande que $n^2 > x^2 + y^2$. Entonces, de (80d), usando (80b) y (80c), cuando $n \to \infty$ se obtiene la ley de reciprocidad (77b) para la propia f.

La identidad de Parseval para las integrales múltiples de Fourier toma la forma

$$\iint |f(x, y)|^2\, dx\, dy = \iint |g(\xi, \eta)|^2\, d\xi\, d\eta, \tag{81}$$

donde las integraciones se extienden sobre el plano completo. La demostración se puede llevar a cabo exactamente a través de los mismos argumentos usados en la Sección e, p. 546, para la identidad de Parseval relativa a funciones de una sola variable, siempre que se establezcan las mismas hipótesis acerca de $f(x, y)$ que para la deducción de la fórmula de la integral de Fourier. Modificando apropiadamente las expresiones usadas en la p. 546, considérese la integral

$$J_{A,B} = \iint_{x^2+y^2<B^2} |f(x, y) - f_A(x, y)|^2\, dx\, dy,$$

donde

$$f_A(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\xi^2+\eta^2<A^2} e^{i(x\xi+y\eta)} g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$g_B(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint_{x^2+y^2<B^2} e^{-i(x\xi+y\eta)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Aquí, en lugar de (73) se obtiene la identidad

$$J_{A,B} = \iint_{x^2+y^2<B^2} (|f(x, y)|^2 + |f_A(x, y)|^2)\, dx\, dy$$

$$- \iint_{\xi^2+\eta^2<A^2} [\overline{g(\xi, \eta)}\, g_B(\xi, \eta) + g(\xi, \eta)\, \overline{g_B(\xi, \eta)}]\, d\xi\, d\eta.$$

Cuando $A \to \infty$ y $B \to \infty$ se llega a la identidad (81) en la misma forma que antes.

Ejercicios 4.13

1. Encontrar las transformadas de Fourier de las funciones siguientes:

(a) $f(x) = \begin{cases} c, \text{ para } 0 < x < a \\ 0, \text{ para } x < 0 \text{ or } x > a. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, \text{ para } x > 0, \ (a > 0) \\ 0, \text{ para } x < 0 \end{cases}$

(c) $J_n(x)/x^n$ (con J_n definida como en 4.12, Ejercicio 8).

4.14 Las integrales eulerianas (Función gama)[1]

Uno de los ejemplos más importantes de una función definida por una integral impropia que depende de un parámetro es la función gama, $\Gamma(x)$, que se discutirá con cierto detalle.

a. Definición y ecuación funcional

En el Volumen I (p. 308) se definió $\Gamma(x)$ para toda $x > 0$ por la integral impropia

(82a) $$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt.$$

La integral se puede dividir en una que se extienda sobre la porción no acotada del eje t desde $t = 1$ hasta $t = \infty$ con un integrando continuo, y una que se extienda sobre el intervalo finito desde $t = 0$ hasta $t = 1$, donde al menos para los valores de x entre 0 y 1- el integrando es singular. Los criterios desarrollados en la p. 523 indican inmediatamente que la integral (82a) converge para cualquier $x > 0$, siendo la convergencia uniforme en todo intervalo cerrado del eje x positivo que no incluya al punto $x = 0$. *Por lo tanto, la función $\Gamma(x)$ es continua para $x > 0$.*

Las integrales que se obtienen por medio de la derivación formal de la fórmula (82a) también convergen uniformemente en cualquier

[1]Una discusión relacionada con la presente se encuentra en *The Gamma Function,* por E. Artin (traducción al inglés por Michael Butler), Holt, Rinehart y Winston: Nueva York, 1964.

intervalo $0 < a \leqq x \leqq b$. Como consecuencia (ver la p. 523) $\Gamma(x)$ tiene primera y segunda derivadas continuas dadas por

(82b) $$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1} \log t \, dt$$

(82c) $$\Gamma''(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1} \log^2 t \, dt.$$

Por medio de una simple sustitución, la integral (82a) para $\Gamma(x)$ se puede transformar en otras formas que se usan con frecuencia. Aquí sólo se menciona la sustitución $t = u^2$, que lleva la función gama a la forma

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2x-1} \, du.$$

De donde, para $\alpha = 2x - 1$,

(82d) $$\int_0^\infty e^{-u^2}u^\alpha \, du = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \qquad (\alpha > -1)$$

[ver la fórmula (48d), p. 515].

Como en el Volumen I (p. 308), integrando por partes la fórmula (82a) se llega a la relación

(83a) $$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$$

para cualquier $x > 0$. Esta ecuación se llama *ecuación funcional de la función gama.*

Evidentemente, $\Gamma(x)$ no está definida de modo único por la propiedad de ser una solución de esta ecuación funcional, ya que otras soluciones se obtienen simplemente al multiplicar $\Gamma(x)$ por una función arbitaria $p(x)$ con período unitario. La expresión

(83b) $$u(x) = \Gamma(x)\, p(x)$$

donde

(83c) $$p(x + 1) = p(x)$$

representa la solución más general de la ecuación (83a), porque si $u(x)$ es cualquier solución, el cociente

$$p(x) = \frac{u(x)}{\Gamma(x)}$$

[el cual siempre puede formarse dado que $\Gamma(x) \neq 0$] satisface la ecuación (83c).

Con frecuencia resulta más conveniente considerar la función $u(x) = \log \Gamma(x)$; en lugar de $\Gamma(x) >$ ésta está definida para toda x positiva, puesto que $\Gamma(x) = 0$ para $x > 0$. La función satisface la ecuación funcional (una "ecuación diferencia")

$$u(x+1) - u(x) = \log x. \tag{83d}$$

Se obtienen otras soluciones de (83d) agregando a $\log \Gamma(x)$ una función arbitraria con período unitario. Para caracterizar de modo único a la función $\Gamma(x)$ la ecuación funcional (83d) se debe suplementar con otras condiciones. En el teorema siguiente, de H. Bohr y H. Mollerup, se da una condición muy sencilla de este tipo:

Toda solución convexa de la ecuación diferencia

$$u(x+1) - u(x) = \log x \tag{84a}$$

para $x > 0$ es idéntica a la función log $\Gamma(x)$, excepto tal vez por una constante aditiva.

b. Funciones convexas. Demostración del teorema de Bohr y Mollerup

Se dice que una función, $f(x)$, con segunda derivada continua es convexa (ver el Volumen I, p. 357) si $f'' \geqq 0$. Una definición más general, aplicable incluso a funciones que no son diferenciables por dos veces, es la siguiente:

Se dice que la función $f(x)$ definida en un intervalo (que posiblemente se extiende hasta el infinito) es convexa si, para cualesquiera valores x_1, x_2 de su dominio y cualesquiera números positivos α, β con $\alpha + \beta = 1$, se cumple la desigualdad

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leqq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \tag{84b}$$

Geométricamente, (84b) significa que para cualesquiera dos puntos de la curva $y = f(x)$, con abscisas x_1, x_2, la cuerda que los une nunca está por debajo de la curva (ver la Fig. 4.20).

Para una función f continuamente diferenciable por dos veces, se encuentra, usando el teorema del valor medio del cálculo diferencial y el hecho de que α y β son números positivos con suma 1,

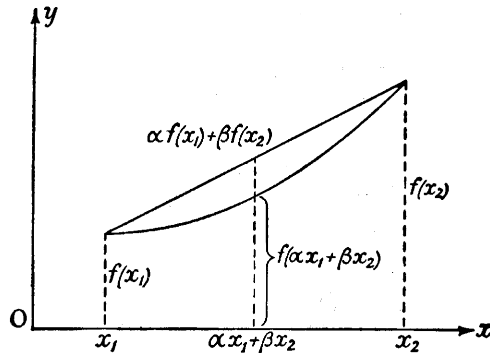


Figura 4.20 Una función convexa.

(84c)
$$\begin{aligned}\alpha f(x_1) + \beta f(x_2) &- f(\alpha x_1 + \beta x_2)\\ &= \beta[f(x_2) - f(\alpha x_1 + \beta x_2)] - \alpha[f(\alpha x_1 + \beta x_2) - f(x_1)]\\ &= \alpha\beta(x_2 - x_1)f'(\xi_2) - \alpha\beta(x_2 - x_1)f'(\xi_1)\\ &= \alpha\beta(x_2 - x_1)(\xi_2 - \xi_1)f''(\eta),\end{aligned}$$

donde ξ_1, ξ_2, η son valores intermedios apropiados tales que

(84d)
$$x_1 < \xi_1 < \alpha x_1 + \beta x_2 < \xi_2 < x_2, \qquad \xi_1 < \eta < \xi_2.$$

De (84c) de inmediato se deduce que se satisface (84b) si (84c), $f''(\eta) \geqq 0$ para toda η en el dominio de f. Inversamente, de (84b), (84c), usando (84d), se encuentra que $f''(\eta) \geqq 0$; para α, β fijos y $x_2 \to x_1$, por la continuidad de f'' se deduce que $f''(x_1) \geqq 0$ para cualquier x_1 en el dominio. De aquí que *una función continuamente diferenciable por dos veces es convexa en el sentido establecido en* (84b) *si y sólo si* $f'' \geqq 0$.

Para ser convexa, una función no necesita ser diferenciable por dos veces, o incluso por una vez. Un ejemplo se tiene en $f(x) = |x|$. Sin embargo, *una función convexa necesariamente es continua en los puntos interiores de su dominio*. Esto se deduce de la desigualdad

(84e)
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqq \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3},$$

que es satisfecha por una función convexa para cualesquier x_i en su dominio tales que

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4.$$

Para probar (84e) se escribe x_2 en la forma

$$x_2 = \alpha x_1 + \beta x_3,$$

donde

$$\alpha = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}, \quad \beta = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Entonces

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\alpha f(x_1) + \beta f(x_3) - f(\alpha x_1 + \beta x_3)}{\alpha\beta(x_3 - x_1)} \geqq 0,$$

y, de modo semejante,

$$\frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} - \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geqq 0,$$

lo cual implica (84e). En palabras, (84e) afirma *que los cocientes de diferencias de la función convexa f formados para intervalos ajenos son crecientes.* Se deduce inmediatamente que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqq \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \leqq \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}$$

para cualesquiera valores ξ_1, ξ_2 entre x_2 y x_3. Así, f satisface una *condición de Lipschitz* en el intervalo $x_2 < x < x_3$ y, por tanto, es continua en ese intervalo. Para cualquier x en el interior del dominio de f siempre pueden encontrarse x_1, x_2, x_3, x_4, apropiados que muestren que f es continua en x.

Para probar que la función $\log \Gamma(x)$ es convexa, basta con demostrar que

$$\text{(84f)} \qquad \frac{d^2 \log \Gamma}{dx^2} = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2} \geqq 0.$$

La relación (84f) se deduce de la desigualdad de Cauchy-Schwarz[1] para las integrales, dado que, por (82a, b, c),

[1] A partir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz para las sumas (Volumen I, p. 15) se encuentra que, para cualesquiera funciones continuas $f(x)$, $g(x)$ y cualquier subdivisión de su dominio por medio de los puntos x_i en intervalos de longitud Δx_i

$$\Gamma'^2 = \left(\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log t\,dt\right)^2$$
$$= \left(\int_0^\infty (e^{-t/2}\sqrt{t^{x-1}})(e^{-t/2}\sqrt{t^{x-1}}\log t)\,dt\right)^2$$
$$\leqq \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log^2 t\,dt = \Gamma\Gamma''.$$

Sea ahora $u(x)$ una solución convexa arbitraria de la ecuación funcional (84a) para $x > 0$. Fórmese la expresión

$$v_h(x) = u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)$$

para $0 < h < x$. Aplicando la relación (84e), la cual es válida para u convexa, se encuentra que, para $0 < h < k < x$,

$$v_k(x) - v_h(x) = [u(x+k) - u(x+h)] - [u(x-h) - u(x-k)]$$
$$= (k-h)\left[\frac{u(x+k) - u(x+h)}{k-h} - \frac{u(x-h) - u(x-k)}{-h+k}\right] \geqq 0.$$

Por lo tanto, para x fija, $v_h(x)$ es una función continua no decreciente de h. Ahora bien, la ecuación funcional para u da

$$v_1(x) = u(x+1) - 2u(x) + u(x-1)$$
$$= [u(x+1) - u(x)] - [u(x) - u(x-1)]$$
$$= \log x - \log(x-1).$$

De aquí que, para $0 < h < 1 < x$,

(84g)
$$0 = v_0(x) \leqq v_h(x)$$
$$= u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)$$
$$\leqq v_1(x) = \log\frac{x}{x-1}.$$

$$\left(\sum_i f(x_i)g(x_i)\Delta x_i\right)^2 \leqq \left(\sum_i f^2(x_i)\Delta x_i\right)\left(\sum_i g^2(x_i)\Delta x_i\right).$$

Refinando las subdivisiones, en el límite se encuentra la *desigualdad de Cauchy-Schwarz para las integrales:*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right).$$

Esta desigualdad se extiende inmediatamente de las integrales propias de Riemann de funciones continuas a las integrales impropias, pasando al límite con respecto al dominio de integración.

Ya que

$$\lim_{x\to\infty} \log \frac{x}{x-1} = \log 1 = 0,$$

de (84g) se encuentra que para toda solución convexa de (84a)

$$\lim_{x\to\infty} [u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)] = 0 \qquad (0 < h < 1).$$

Entonces, si $p(x)$ es la diferencia de dos soluciones convexas de (84a), también se encuentra que

$$\lim_{x\to\infty} [p(x+h) - 2p(x) + p(x-h)] = 0.$$

Puesto que $p(x)$ es periódica con período 1, también lo es la función

$$p(x+h) - 2p(x) + p(x-h),$$

que tiende a 0 como límite cuando $x \to \infty$. Es obvio que una función así debe anularse idénticamente. De donde,

$$\text{(84h)} \qquad p(x+h) - 2p(x) + p(x-h) = 0 \qquad (0 \leqq h < 1).$$

Sea $M = p(\xi)$ el valor máximo de la función continua $p(x)$ en el intervalo $1 \leqq x \leqq 2$. Entonces $p(x) \leqq M$ para toda $x > 0$ y, por (84h),

$$2M = 2p(\xi) = p(\xi + h) + p(\xi - h) \leqq 2M \qquad (0 \leqq h < 1).$$

De aquí que

$$p(\xi - h) = p(\xi + h) = M \qquad (0 \leqq h < 1),$$

y, como p tiene período 1,

$$p(x) = M = \text{constante} \qquad (\text{toda } x > 0).$$

Esto demuestra que cualesquiera dos soluciones convexas de (84a) difieren cuando más en una constante, y ésto completa la demostración del teorema de Bohr y Mollerup.

c. Los productos infinitos para la función gama

El teorema de Bohr y Mollerup se puede usar para deducir las representaciones por medio de productos infinitos para la función gama, encontrados por Gauss y Weierstrass.

Para cualquier función dada, $g(x)$, puede verificarse fácilmente que una solución especial, $w(x)$, de la ecuación diferencia

$$w(x+1) - w(x) = g(x)$$

está dada por la serie infinita

$$\begin{aligned} w(x) &= -\sum_{j=0}^{\infty} g(x+j) \\ &= -g(x) - g(x+1) - g(x+2) - \cdots, \end{aligned}$$

siempre que la serie converja. Esta observación no se puede aplicar directamente a la ecuación (84a) con $g(x) = \log x$, dado que la serie resultante diverge. Sin embargo, la ecuación diferencia para $w = u''$ que se obtiene derivando (84a) por dos veces, puede resolverse de esta manera. Una solución especial de la ecuación

(85a) $$w(x+1) - w(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad (x > 0)$$

está dada por

(85b) $$w(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(x+j)^2} \qquad (x > 0).$$

Aquí, la serie infinita converge uniformemente en todo intervalo finito $0 \leqq x \leqq b$ (ver el Volumen I, p. 535), ya que

$$\frac{1}{(x+j)^2} \leqq \frac{1}{j^2} \qquad (x \geqq 0).$$

Como consecuencia, w es continua para $x > 0$. Es más, puede integrarse término a término esta serie (ver el Volumen I, p. 537) y se llega a una función

(85c) $$\begin{aligned} v(x) &= -\frac{1}{x} + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^x \frac{d\xi}{(\xi+j)^2} \\ &= -\frac{1}{x} - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+j} - \frac{1}{j}\right), \end{aligned}$$

donde, nuevamente, la serie que se presenta en esta fórmula converge uniformemente en cualquier intervalo $0 \leqq x \leqq b$. De donde $v(x) + 1/x$ es una función continua de x para $x \geqq 0$, que se anula para $x = 0$. Por la construcción precedente,

(85d) $$v'(x) = w(x) \qquad (x > 0).$$

Como por (85a, d),

$$\frac{d}{dx}[v(x+1) - v(x)] = -\frac{1}{x^2} \qquad (x > 0),$$

se concluye que

$$v(x+1) - v(x) = \frac{1}{x} + c \qquad (x > 0), \tag{85e}$$

donde c es una constante. Para determinar el valor de c, se observa que, por (85e),

$$\begin{aligned} -c &= \lim_{x\to 0}\left[v(x) + \frac{1}{x}\right] - \lim_{x\to 0} v(x+1) = -v(1) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+j} - \frac{1}{j}\right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \cdots = 0. \end{aligned}$$

La integración de (85c) conduce a una función

$$\begin{aligned} U(x) &= -\log x - \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^x \left(\frac{1}{\xi + j} - \frac{1}{j}\right) d\xi \\ &= -\log x - \sum_{j=1}^{\infty}\left[\log(x+j) - \log j - \frac{x}{j}\right], \end{aligned} \tag{85f}$$

donde, una vez más, la serie infinita converge uniformemente en cualquier intervalo $0 \leqq x \leqq b$. Como antes, se concluye que $U(x)$ es una función continua de x para $x > 0$, que satisface

$$U'(x) = v(x), \lim_{x\to 0} (U(x) + \log x) = 0$$

$$U(x+1) - U(x) - \log x = \text{constante} = C. \tag{85g}$$

Aquí,

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x\to 0} U(x+1) - \lim_{x\to 0}[U(x) + \log x] = U(1) \\ &= -\sum_{j=1}^{\infty}\left[\log(1+j) - \log j - \frac{1}{j}\right] \\ &= -\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n-1}\left[\log(1+j) - \log j - \frac{1}{j}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n\right). \end{aligned}$$

Se concluye que C es idéntica a la *constante de Euler*,

(85h) $$C = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right),$$

introducida en el Volumen I (p. 526).

Por (85g), la función

$$u(x) = U(x) - Cx$$

satisface la ecuación diferencia

$$u(x+1) - u(x) = \log x.$$

Es más, por (85b),

$$u''(x) = w(x) > 0 \qquad (x > 0),$$

de modo que $u(x)$ es *convexa*. Como, además,

$$u(1) = U(1) - C = 0 = \log\Gamma(1),$$

por el teorema de Bohr se deduce que $u(x)$ y $\log\Gamma(x)$ son idénticas:

(86a) $$\log\Gamma(x) = -Cx - \log x - \sum_{j=1}^{\infty}\left(\log\frac{x+j}{j} - \frac{x}{j}\right).$$

La deducción anterior también demuestra que

(86b) $$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C + v(x) = -C - \frac{1}{x} - \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+j} - \frac{1}{j}\right),$$

(86c) $$\frac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2} = w(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(x+j)^2}.$$

Formando la función exponencial de ambos miembros de la ecuación (86a) se llega al *producto infinito de Weierstrass* para $1/\Gamma(x)$:

(86d) $$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{Cx}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x}{j}\right)e^{-x/j} \qquad (x > 0).$$

(86d) puede escribirse en una forma ligeramente diferente que no contenga la constante de Euler C. De (86a), (85h),

$$\log\Gamma(x) = -\log x + \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x}{j} - \log\frac{x+j}{j}\right) - Cx$$

$$= -\log x + \lim_{n\to\infty}\left[x\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} - C - \log n\right)\right.$$
$$\left. + x\log n - \sum_{j=1}^{n}\log\frac{x+j}{j}\right]$$
$$= -\log x + \lim_{n\to\infty}\left[x\log n + \sum_{j=1}^{n-1}\log j - \sum_{j=1}^{n-1}\log(x+j)\right].$$

Consecuentemente, se obtiene la fórmula

$$\text{(86e)}\quad \Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n-1)}n^x \quad (x > 0),$$

que es *el producto infinito de Gauss para la función gama.*

El límite en el segundo miembro de (86e) existe no sólo para valores positivos de x sino para toda $x \neq 0, -1, -2, \ldots$: Para una x dada, supóngase que se elige el entero positivo m tan grande que $x + m > 0$. Entonces, remplazando n por $n + m$ bajo el signo del límite se obtiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}n^x$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdots(n+m-1)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n+m-1)}(n+m)^x$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+1)\cdots(n+m-1)(n+m)^x}{x(x+1)\cdots(x+m-1)n^{x+m}}\right]$$
$$\left[\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)n^{x+m}}{(x+m)(x+m+1)\cdots(x+m+n-1)}\right]$$
$$= \frac{\Gamma(x+m)}{x(x+1)\cdots(x+m-1)}.$$

Por tanto, se puede usar la fórmula de Gauss (86e) para definir $\Gamma(x)$ para todos los valores de x que no sean cero o enteros negativos. Cuando x tiende hacia uno de estos valores excepcionales, $\Gamma(x)$ se vuelve infinita. Es obvio que la función $\Gamma(x)$ extendida aún satisface la ecuación funcional

$$\text{(86f)}\qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

d. El teorema de extensión

También se pueden obtener con facilidad los valores de la función gama para valores negativos de x, a partir de los valores para valores

positivos de x, por medio del llamado teorema de extensión. Fórmese el producto $\Gamma(x)\Gamma(-x)$, el cual es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}n^x \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{-x(1-x)(2-x)\cdots(n-1-x)}n^{-x},$$

y combínense en uno los dos procesos de límite para obtener

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{1}{x^2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\{1-(x/1)^2\}\{1-(x/2)^2\}\cdots\{1-[x/(n-1)]^2\}},$$

siempre que x no sea un entero. Ahora, empleando el producto infinito para el seno

$$\frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x} = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{x}{\nu}\right)^2\right),$$

hallado en el Volumen I (p. 603), se obtiene

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x\operatorname{sen}\pi x}.$$

De donde

$$\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x\operatorname{sen}\pi x}\frac{1}{\Gamma(x)}.$$

Esta relación se puede poner en una forma un tanto diferente, calculando el producto $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$. Dado que, por (86f),

$$\Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x),$$

se obtiene el *teorema de extensión:*

(97a) $$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x}.$$

De donde, se pone $x = \frac{1}{2}$, se tiene $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Como

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du,$$

aquí se tiene una nueva demostración para el hecho de que la integral

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\,du$$

tiene el valor $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (ver la p. 472). Además, puede calcularse la función gama para los argumentos $x = n + \frac{1}{2}$, donde n es cualquier entero positivo:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2}\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi}. \tag{97b}$$

e. La función beta

Otra importante función que se define por medio de una integral impropia que depende de parámetros es la *función beta de Euler*. La función beta se define por

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1 - t)^{y-1}\, dt. \tag{98a}$$

Si x, o y, es menor que la unidad, la integral es impropia. Sin embargo, por el criterio de la p. 523, converge uniformemente en x y y, siempre que nos restrinjamos a los intervalos $x \geqq \varepsilon$, $y \geqq \eta$, donde ε y η son números positivos arbitrarios. Por lo tanto, representa una función continua para todos los valores positivos de x y y.

Se obtiene una expresión un tanto diferente para $B(x, y)$ haciendo la sustitución $t = \tau + \frac{1}{2}$:

$$B(x, y) = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{2} + \tau\right)^{x-1}\left(\frac{1}{2} - \tau\right)^{y-1} d\tau. \tag{98b}$$

Si ahora se pone $\tau = t/2s$, donde $s > 0$, se obtiene

$$(2s)^{x+y-1}B(x, y) = \int_{-s}^{s} (s + t)^{x-1}(s - t)^{y-1}\, dt. \tag{98c}$$

Por último, si se pone $t = \operatorname{sen}^2\phi$ en la fórmula (98a) se obtiene

$$B(x, y) = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2x-1}\phi \cos^{2y-1}\phi\, d\phi. \tag{98d}$$

Ahora se mostrará cómo se puede expresar la función beta en términos de la función gama, usando unas cuantas transformaciones que, a primera vista, pueden parecer extrañas.

Si se multiplican ambos miembros de la ecuación (98c) por e^{-2s} y se integra con respecto a s desde 0 hasta A, se tiene

$$B(x, y) \int_0^A e^{-2s}(2s)^{x+y-1}\, ds = \int_0^A e^{-2s}\, ds \int_{-s}^{s} (s + t)^{x-1}(s - t)^{y-1}\, dt.$$

La integral doble de la derecha se puede considerar como una integral de la función

$$e^{-2s}(s + t)^{x-1}(s - t)^{y-1}$$

sobre el triángulo isósceles en el plano s, t, limitado por las rectas $s \pm t = 0$ y $s = A$. Si se aplica la transformación

$$\sigma = s + t,$$
$$\tau = s - t,$$

esta integral se convierte en

$$\frac{1}{2}\iint_R e^{-\sigma-\tau}\sigma^{x-1}\tau^{y-1}\, d\sigma\, d\tau.$$

La región de integración R es ahora el triángulo en el plano σ, τ limitado por las rectas $\sigma = 0$, $\tau = 0$, y $\sigma + \tau = 2A$.

Si se hace que A crezca más allá de toda cota, por (82a) el primer miembro tiende hacia la función

$$\frac{1}{2} B(x, y)\Gamma(x + y).$$

Por lo tanto, el primer miembro también debe converger y su límite es la integral doble sobre todo el primer cuadrante del plano σ, τ haciéndose la aproximación del cuadrante por medio de triángulos isósceles. Como el integrando es positivo en esta región y la integral converge para una sucesión monótona de regiones (por el Capítulo 4, p. 471, este límite es independiente del modo de aproximación para el cuadrante. En particular, pueden usarse cuadrados de lado A y, en consecuencia, escribir

$$B(x, y)\Gamma(x + y) = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \int_0^A e^{-\sigma-\tau}\sigma^{x-1}\tau^{y-1}\, d\sigma\, d\tau$$
$$= \int_0^\infty e^{-\sigma}\sigma^{x-1}\, d\sigma \int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{y-1}\, d\tau.$$

Por lo tanto, se obtiene la importante relación[1]

(99a) $$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}.$$

A partir de esta expresión se ve que la función beta está relacionada con los coeficientes binomiales,

$$\binom{n + m}{n} = \frac{(n + m)!}{n!m!},$$

aproximadamente en la misma forma en que la función gama está relacionada con los números $n!$. En efecto, para los enteros n, m,

(99b) $$\binom{n + m}{m} = \frac{1}{(n + m + 1)B(n + 1, m + 1)}.$$

Por último, mencionemos que las integrales definidas

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^\alpha t \, dt \qquad \text{y} \qquad \int_0^{\pi/2} \cos^\alpha t \, dt,$$

las cuales, por (98d), son idénticas a las funciones

$$\frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha + 1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{\alpha + 1}{2}\right),$$

pueden expresarse simplemente en términos de la función gama:

(99c) $$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^\alpha t \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^\alpha t \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \frac{\Gamma(1 + \alpha/2)}{\Gamma(\alpha/2)}.$$

---

[1]También puede obtenerse esta ecuación a partir del teorema de Bohr. Primero se demuestra que $B(x, y)$ satisface la ecuación funcional

$$B(x + 1, y) = \frac{x}{x + y} B(x, y),$$

de modo que la función

$$u(x, y) = \Gamma(x + y)\, B(x, y),$$

considerada como una función de x, satisface la ecuación funcional de la función gama,

$$u(x + 1) = xu(x).$$

La convexidad de $\log B(x, y)$ y, de aquí, la de $\log u(x)$ se deduce de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, de la misma manera que la de $\log \Gamma(x)$ en la p. 560. Así se tiene

$$\Gamma(x + y)\, B(x, y) = \Gamma(x) \cdot \alpha(y),$$

y, por último, si se pone $x = 1$, $\alpha(y) = \Gamma(1 + y)\, B(1, y) = \Gamma(y)$.

f. Derivación e integración de orden fraccionario. Ecuación integral de Abel

Aplicando el conocimiento de la función gama, ahora se llevará a cabo un proceso sencillo de generalización de los conceptos de derivación e integración. Ya se ha visto (p. 107) que la fórmula

(100a) $$F(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

da la integral repetida n veces de la función $f(x)$ entre los límites 0 y x. Si, simbólicamente, se denota por D el operador de derivación y por D^{-1} el operador

$$\int_0^x \cdots dx,$$

que es un inverso de la derivación, puede escribirse

(100b) $$F(x) = D^{-n}f(x).$$

La afirmación matemática expuesta por esta fórmula es la de que la función $F(x)$ y sus primeras $(n-1)$ derivadas se anulan en $x = 0$ y que la n-ésima derivada de $F(x)$ es $f(x)$. Pero ahora resulta muy natural construir una definición para el operador $D^{-\lambda}$, incluso cuando el número positivo λ no es necesariamente un entero. *La integral de orden λ de la función $f(x)$ entre los límites 0 y x se define por la expresión*

(100c) $$D^{-\lambda}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x (x-t)^{\lambda-1} f(t)dt.$$

Ahora puede usarse esta definición para generalizar la derivación de n-ésimo orden, simbolizada por el operador D^n o d^n/dx^n, para incluir la derivación de μ-ésimo orden, donde μ es un número arbitrario no negativo. Sea m el menor entero mayor que μ, de modo que $\mu = m - \rho$, donde $0 < \rho \leqq 1$. Entonces la definición es

(101a) $$D^{\mu}f(x) = D^m D^{-\rho} f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^x (x-t)^{\rho-1} f(t)\, dt.$$

Una inversión del orden de los dos procesos daría la definición

$$D^{\mu}f(x) = D^{-\rho}D^m f(x) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^x (x-t)^{\rho-1} f^{(m)}(t)\, dt.$$

Se deja al lector (ver el Ejercicio 12) emplear las fórmulas para la función gama con el fin de probar que

(101b) $$D^{\alpha}D^{\beta}f(x) = D^{\beta}D^{\alpha}f(x),$$

donde α y β son números reales arbitrarios. El lector debe demostrar que estas relaciones y el proceso generalizado de derivación tienen un significado, siempre que la función $f(x)$ sea diferenciable en la forma ordinaria hasta un orden suficientemente alto para toda x y se anule para $x \leqq 0$. En general, $D^{\mu}f(x)$ existe si $f(x)$ tiene derivadas continuas hasta de orden m-ésimo, inclusive.

En relación con estas ideas, mencionemos la *ecuación integral de Abel,* la cual tiene importantes aplicaciones. Dado que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

la integral de orden $\frac{1}{2}$ para una función $f(x)$ está dada por la fórmula

(102) $$D^{-1/2}f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt = \psi(x).$$

La fórmula (102) se llama ecuación integral de Abel cuando se resuelve para una función desconocida $f(x)$, dada la función $\psi(x)$ del segundo miembro. Si la función $\psi(x)$ es continuamente diferenciable y se anula en $x = 0$, la solución de la ecuación está dada por la fórmula

(103a) $$f(x) = D^{1/2}\psi(x),$$

o bien,

(104) $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\psi(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt.$$

Ejercicios 4.14

1. Verificar que para n entero no negativo,

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\,\sqrt{\pi}}{n!4^n}.$$

2. Encontrar $\Gamma(\frac{1}{2} - n)$ donde n es un entero positivo.
3. Demostrar que

$$B(x,x) = 2^{1-2x}B\left(x,\frac{1}{2}\right).$$

4. Probar que

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{x}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\right)}.$$

5. Establecer las relaciones siguientes:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{(n!)^2\,2^{2n}}{(2n+1)!}$,

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$.

6. Probar que el volumen del octante positivo limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = h$ y la superficie $x^m/a^m + y^m/b^m = z/c$, donde $m > 0$, es

$$abh\left(\frac{h}{c}\right)^{2/m}\frac{\Gamma(1+1/m)^2}{\Gamma(2+2/m)}.$$

7. Probar que

$$\iiint f\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\,dx\,dy\,dz$$

tomada sobre todo el octante positivo del elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leqq 1$ es igual a

$$\frac{a^p b^q c^r}{8}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{p}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{q}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{p+p+r}{2}\right)}\int_0^1 f(\xi)\xi^{(p+q+r-2)/2}\,d\xi.$$

(Sugerencia: Introducir las nuevas variables ξ, η, ζ escribiendo

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = \xi \qquad \text{ó} \qquad x = a\sqrt{\xi(1-\eta)}$$

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = \xi\eta \qquad \text{ó} \qquad y = b\sqrt{\xi\eta(1-\zeta)}$$

$$\frac{z^2}{c^2} = \xi\eta\zeta \qquad \text{ó} \qquad z = c\sqrt{\xi\eta\zeta}$$

y realizar las integraciones con respecto a η y ζ.)

8. Encontrar la coordenada x del centro de masa del sólido

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{1/n} + \left(\frac{y}{b}\right)^{1/n} + \left(\frac{z}{c}\right)^{1/n} \leqq 1, \qquad x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0.$$

9. Hallar el momento de inercia del área encerrada por la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$, con respecto al eje x.

10. Probar que la integral de multiplicidad $(n+1)$

$$\int\cdots\int f(x_0+\cdots+x_n)x_0^{a_0-1}\cdots x_n^{a_n-1}dx_0\cdots dx_n$$

tomada sobre el octante positivo $x_k \geqq 0$ para $k = 0, \ldots, n$, limitado por el hiperplano $x_0 + \cdots + x_n = 1$, es igual a

$$\frac{\Gamma(a_0) \cdots \Gamma(a_n)}{\Gamma(a_0 + \cdots + a_n)} \int_0^1 f(t)\, t^{a_0 + \cdots + a_n - 1}\, dt.$$

11. Probar que

$$2^{2x} \frac{\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2x)} = 2\sqrt{\pi}.$$

12. (a) Demostrar que para cualesquiera números reales positivos α y β,

$$D^{\alpha}D^{\beta}f(x) = D^{\beta}D^{\alpha}f(x),$$

donde las derivadas se definen por medio de (101a) y f tiene derivadas ordinarias hasta el orden $(p + q)$-ésimo que se anulan en $x = 0$, siendo p y q los menores enteros mayores que α y β, respectivamente.

(b) Bajo las condiciones anteriores, ¿es siempre cierto que $D^{\alpha}D^{\beta}f(x) = D^{\alpha+\beta}f(x)$?

(c) Extender el resultado anterior al caso en el que α o β puedan ser negativos.

Apéndice: Análisis detallado del proceso de integración

A.1 Areas

El área de un conjunto S puede ser definida rigurosamente siguiendo los lineamientos sugeridos por la intuición, como se explicó en la p. 422. Esencialmente se usa una subdivisión del plano, en cuadrados, por medio de rectas paralelas a los ejes coordenados. Se suman las áreas de los cuadrados que están contenidos por completo en S. Esto proporciona una cota inferior para el área. Sumando las áreas de todos los cuadrados que tienen puntos en común con S se obtiene una cota superior para el área de S. Si estas cotas inferior y superior convergen hacia uno y el mismo valor conforme se hace indefinidamente más fina la subdivisión del plano, se identifica este valor común con el área de S. Esta construcción para el área de una región incorpora las mismas ideas de aproximarse a la región desde el interior y el exterior por medio de regiones compuestas de rectángulos, lo que nos condujo a la noción de la integral de Riemann de una función $f(x)$.

[1] Antes de leer este Apéndice el lector debería repasar los argumentos que conducen a la integral de Riemann, en el Volumen I (pp. 192-195).

El concepto de área, como se define aquí, recibe el nombre de *medida de Jordan* (en honor de uno de los iniciadores del análisis moderno preciso) o *contenido* de S. Esta no es la única forma de presentar las áreas. (Una definición extremadamente importante, que se aplica a conjuntos más generales, se llama *medida de Lebesgue* de S.) La medida de Jordan, que nos ocupará exclusivamente aquí, tiene la ventaja de ser más intuitiva y bastante adecuada para esas partes del análisis que se encuentran dentro del alcance de este libro.

Por simplicidad trabajaremos principalmente en el plano. No obstante, el tratamiento que se presenta se aplica a las dimensiones superiores simplemente con cambios en la terminología, como el remplazo del término *área* por *volumen, cuadrado* por *cubo* y así sucesivamente.

a. *Subdivisiones del plano y áreas interiores y exteriores correspondientes*

Para definir el área de un conjunto S en el plano x, y se usan subdivisiones sucesivas del plano en cuadrados de lado 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, . . . por medio de paralelas equidistantes a los ejes coordenados[1]. La n-ésima subdivisión (donde n es un entero positivo) es producida por las rectas

$$(1) \qquad x = \frac{i}{2^n}, \quad y = \frac{k}{2^n},$$

donde i y k varían sobre todos los enteros. Entonces se divide el plano en los cuadrados cerrados R_{ik}^n dados por

$$(2) \qquad R_{ik}^n: \ \frac{i}{2^n} \leqq x \leqq \frac{i+1}{2^n}, \quad \frac{k}{2^n} \leqq y \leqq \frac{k+1}{2^n}.$$

Sea ahora S cualquier conjunto *acotado* de puntos en el plano.[2] Se forman las aproximaciones desde abajo y desde arriba para el área A de S, formando la suma A_n^- de las áreas de todos los cuadrados R_{ik}^n

[1] En este momento, resulta útil presentar el área a través de un conjunto completamente específico de subdivisiones del plano en cuadrados. Posteriormente se considerarán subdivisiones mucho más generales que conducen a la misma área.

[2] Hablando con propiedad, sólo se definirán las áreas para conjuntos acotados, aunque se define una integral "impropia" para algunos conjuntos no acotados, como el límite de áreas propias.

que están contenidos completamente en S y la suma A_n^+ del área de todos los cuadrados R_{ik}^n que tienen puntos en común con S. Aquí se define el área de un cuadrado R_{ik}^n que tiene el lado 2^{-n}, como 2^{-2n}. En consecuencia, usando la notación simbólica para la relación entre los conjuntos explicada en la p. 114, se tiene[1]

(3) $$A_n^- = \sum_{\substack{i,k \\ R_{ik}^n \subset S}} 2^{-2n}, \qquad A_n^+ = \sum_{\substack{i,k \\ R_{ik}^n \cap S \neq \emptyset}} 2^{-2n}$$

(ver la Fig. 4.1).

Resulta evidente, por la definición, que

(4) $$0 \leqq A_n^- \leqq A_n^+.$$

Conforme se pasa de la n-ésima subdivisión hacia la $(n + 1)$-ésima, se divide cada cuadrado R_{ik}^n en cuatro cuadrados R_{rs}^{n+1}. Si R_{ik}^n está contenido en S, deben estarlo sus partes R_{rs}^{n+1}. Si, además, una parte R_{rs}^{n+1} contiene un punto de S, entonces lo mismo se cumple para el cuadrado completo R_{ik}^n.

Se concluye[2] que sumas sucesivas satisfacen las desigualdades

(5) $$A_n^- \leqq A_{n+1}^- \leqq A_{n+1}^+ \leqq A_n^+.$$

En (5) se ve que las sumas A_n^- forman una sucesión no decreciente, con la cota superior A_1^+, así, convergen hacia un límite

$$A^- = \lim_{n \to \infty} A_n^-.$$

De modo semejante, las sumas A_n^+ forman una sucesión no creciente, con la cota inferior A_1^- y convergen:

$$A^+ = \lim_{n \to \infty} A_n^+.$$

Por (5) se tiene que para toda n

(6) $$0 \leqq A_n^- \leqq A^- \leqq A^+ \leqq A_n^+.$$

---

[1]Si ningún cuadrado R_{ik}^n está contenido por completo en S, se pone $A_n^- = 0$.

[2]Aquí se ha usado el hecho de que la suma de las áreas de los cuatro cuadrados R_{rs}^{n+1} que constituyen a R_{ik}^n es igual al área de R_{ik}^n, la cual, en este contexto, se deduce de la identidad aritmética

$$4 \cdot 2^{-2(n+1)} = 2^{-2n}.$$

A A^- se le da el nombre de *área interior* y a A^+ el de *área exterior* de S. Todo conjunto S acotado tiene un área interior y una exterior, las cuales se donotan por $A^-(S)$ y $A^+(S)$.

El área interior $A^-(S)$ tiene el valor 0 si y sólo si S no tiene puntos interiores, porque un conjunto sin puntos interiores no contiene cuadrado R_{ik}^n alguno, de modo que $A_n^- = 0$ para todo n y, por tanto, $A^- = 0$. Un conjunto con puntos interiores contiene algún cuadrado R_{ik}^n para n lo suficientemente grande, de modo que $A_n^- > 0$ para n grande y, así, $A^- > 0$.

b. *Conjuntos mensurables según Jordan y sus áreas*

Se dice que un conjunto acotado S es mensurable según Jordan si el área interior A^- y el área exterior A^+ de S coinciden.[2] Se denotará el valor común por A y se le dará el nombre de *área* o *medida de Jordan* de S:

$$A^-(S) = A^+(S) = A(S).$$

Nótese que para los cuadrados R_{ik}^n usados en las definiciones, la noción original de "área", y la nueva, la medida de Jordan, coinciden. Cada cuadrado R_{ik}^n tiene la medida de Jordan 2^{-2n} en el sentido de la definición general, ya que, para $S = R_{ik}^n$ y $m > n$,

$$A_m^-(S) = (2^{m-n})^2 2^{-2m} = 2^{-2n}.$$

$$A_m^+ = [(2^{m-n})^2 + 4(2^{m-n}) + 4]2^{-2m} = 2^{-2n} + 2^{2-m-n} + 2^{2-2m}.$$

Más generalmente, cualquier rectángulo S con lados paralelos a los ejes coordenados:

$$S\colon\ a \leqq x \leqq b, \quad c \leqq y \leqq d$$

tiene el área $(b - a)(d - c)$, como es de esperar con base en la geometría elemental; porque, dado un entero positivo n, se pueden hallar los enteros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tales que

[1]Con frecuencia se usan también los términos *medida de Jordan* o *contenido interior* o, respectivamente, *medida exterior de Jordan* o *contenido exterior*.

[2]En lugar de usar la frase "el conjunto S es mensurable según Jordan", simplemente se dirá "S tiene un área". El término *medida* tiene la ventaja de ser independiente de la dimensión y puede usarse con igual propiedad para la *longitud* en una dimensión, para el *área* en dos dimensiones y para el *volumen* en dimensiones superiores.

$$\alpha 2^{-n} < a \leqq (\alpha + 1)2^{-n}, \quad \beta 2^{-n} \leqq b < (\beta + 1)2^{-n}$$
$$\gamma 2^{-n} < c \leqq (\gamma + 1)2^{-n}, \quad \delta 2^{-n} \leqq d < (\delta + 1)2^{-n}.$$

Entonces,

$$A_n^-(S) = (\beta - \alpha - 1)(\delta - \gamma - 1)2^{-2n} \geqq (b - a - 2^{1-n})(d - c - 2^{1-n}),$$
$$A_n^+(S) = (\beta - \alpha + 1)(\delta - \gamma + 1)2^{-2n} \leqq (b - a + 2^{1-n})(d - c + 2^{1-n}),$$

de modo que, cuando $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} A_n^-(S) = \lim_{n\to\infty} A_n^+(S) = (b - a)(d - c).$$

La tarea siguiente es encontrar criterios acerca de la mensurabilidad de un conjunto S. Se probará con bastante generalidad que *para que un conjunto acotado S tenga un área es necesario y suficiente, que su frontera ∂S tenga área cero.*

En la demostración, considérese una subdivisión del plano en cuadrados R_{ik}^n y fórmense las sumas correspondientes $A_n^-(S)$ y $A_n^+(S)$ como en (3). Es obvio que $A_n^+ - A_n^-$ representa la suma de las áreas de los cuadrados R_{ik}^n que contienen puntos en S así como puntos que no están en S. Sea σ_n el conjunto de esos cuadrados. Cada cuadrado de σ_n contiene un punto frontera de S, porque, evidentemente, un punto frontera de S se encuentra sobre el segmento rectilíneo que une un punto P de R_{ik}^n en S con un punto Q que no está en S, pero que está en el mismo cuadrado R_{ik}^n. Por tanto, cada cuadrado de σ_n tiene puntos en común con ∂S, y, como consecuencia,

$$A_n^+(S) - A_n^-(S) \leqq A_n^+(\partial S).$$

Si ∂S tiene área 0 (o, lo que es lo mismo, *área exterior* 0), el segundo miembro tiende a 0 cuando $n \to \infty$, y se encuentra que $A^+(S) - A^-(S) = 0$, bien, que S tiene un área.

Inversamente, supóngase que S tiene un área, de modo que

(7) $$\lim_{n\to\infty} [A_n^+(S) - A_n^-(S)] = 0.$$

Un punto P en el plano, que para un n fijo sólo pertenece a cuadrados R_{ik}^n contenidos en S, debe ser un punto interior de S.[1] De modo semejante, un punto que sólo pertenece a cuadrados libres de

[1]Recuérdese que los cuadrados R_{ik}^n son cerrados. De aquí que P podría pertenecer a cuatro cuadrados.

puntos de S debe ser un punto exterior de S. Sea P un punto frontera de S. Si P no estuviera en cuadrado alguno de σ_n, tendría que pertenecer a un cuadrado contenido en S así como a un cuadrado libre de puntos de S. Pero esto es imposible, dado que dos cuadrados así no pueden tener un punto común. Por lo tanto, todo P en ∂S está contenido en un cuadrado R_{ik}^n del conjunto σ_n. El área total de esos cuadrados es $A_n^+(S) - A_n^-(S)$. Cualquier cuadrado R_{ik}^n que tenga un punto en común con ∂S es un cuadrado en σ_n, o bien, uno de los ocho cuadrados vecinos a éste, teniendo un punto en común con él. Así, el área total de los cuadrados R_{ik}^n que tienen puntos en común con ∂S no puede ser mayor a nueve veces el área total de los cuadrados en σ_n:

$$A_n^+(\partial S) \leqq 9[A_n^+(S) - A_n^-(S)].$$

De aquí que (7) implica que $A^+(\partial S) = 0$ y, por tanto, que ∂S tiene área 0.

Un ejemplo de un conjunto que no tiene área, en el sentido establecido, se tiene en el conjunto de los puntos racionales en el cuadrado unitario, es decir, el conjunto S que consiste de los puntos (x, y), donde x y y son números racionales entre 0 y 1. Aquí la frontera ∂S es el conjunto de todos los (x, y) con $0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1$ y, por tanto, tiene área 1. A partir del teorema dado, se concluye que S no es mensurable según Jordan.

c. *Propiedades básicas de las áreas*

Sean S y T dos conjuntos acotados, con S contenido en T. Un cuadrado R_{ik}^n que contiene un punto de S necesariamente contiene un punto de T, de modo que

$$A_n^+(S) \leqq A_n^+(T).$$

Cuando $n \to \infty$ se encuentra que, en general,

$$A^+(S) \leqq A^+(T) \quad \text{para} \quad S \subset T. \tag{8}$$

En el caso particular en que $A^+(T) = 0$, se concluye que también $A^+(S) = 0$. De aquí que:

Cualquier subconjunto de un conjunto de área 0, tiene área 0.

Para cualesquiera dos conjuntos acotados S, T, la totalidad de los cuadrados R_{ik}^n que cubren a S y T también cubre a su unión $S \cup T$.

Por tanto

$$A_n^+(S \cup T) \leqq A_n^+(S) + A_n^+(T).$$

Cuando $n \to \infty$ se encuentra que

$$A^+(S \cup T) \leqq A^+(S) + A^+(T). \tag{9}$$

Más generalmente, para cualquier número finito de conjuntos S_1, $S_2, \ldots, S_N$ se tiene la *subaditividad finita de las áreas exteriores,* expresada por la fórmula

$$A^+\left(\bigcup_{i=1}^{N} S_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{N} A^+(S_i). \tag{10}$$

Si en (10) todos los S_i tienen área 0, lo mismo se concluye para la unión:

La unión de cualquier número finito de conjuntos de área 0 *tiene área* 0. *En particular, cualquier conjunto finito de puntos tiene área* 0.

Por definición, un conjunto de área 0 puede ser cubierto por un número finito de cuadrados R_{ik}^n de área total A_n^+ arbitrariamente pequeña. Con más generalidad, *un conjunto S tiene área* 0 *si para cada* $\varepsilon > 0$ *puede encontrarse un número finito de conjuntos* $S_1, \ldots, S_N$ *que cubran a S, y cuya suma de áreas exteriores sea menor que* ε, porque entonces, por (8) y (9), el área exterior de S es menor que ε, y, por tanto, como ε es un número arbitrario positivo, $A^+(S) = 0$.

Por ejemplo, un arco continuo C en el plano, dado no paramétricamente por una ecuación

$$y = f(x) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

tiene área 0. Para la demostración, sólo se tiene que aplicar el hecho de que una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua. Porque, dado $\varepsilon > 0$, puede hallarse un n tan grande que los valores de f difieran en menos que ε para dos argumentos cualesquiera en su dominio que estén separados una distancia $< 2^{-n}$. Pueden encontrarse los enteros α, β tales que

$$\alpha 2^{-n} \leqq a < (\alpha + 1)2^{-n}, \qquad \beta 2^{-n} < b \leqq (\beta + 1)2^{-n}.$$

La porción de la gráfica de $f(x)$ que corresponde a valores de x, con $i2^{-n} < x < (i + 1)2^{-n}$, está contenida en un rectángulo con lados

que son paralelos a los ejes coordenados y que tienen las longitudes 2^{-n} y 2ε. De aquí que C está contenido en la unión de estos rectángulos con lados paralelos a los ejes, de área total

$$(\beta + 1 - \alpha)2^{-n}(2\varepsilon) \leqq (b - a + 2^{1-n})2\varepsilon.$$

Cuando $n \to \infty$, se concluye que

$$A^{+}(C) \leqq 2(b - a)\varepsilon,$$

y, por tanto, como ε es un número positivo arbitrario, que el arco C tiene área 0.

La mayoría de las regiones de interés práctico tienen fronteras que consisten de un número finito de arcos continuos de la forma $y = f(x)$ o $x = g(y)$. Como la unión de un número finito de conjuntos de área 0 tiene a su vez área 0, se concluye que tales regiones tienen una frontera de área 0 y, por tanto, son mensurables según Jordan:

Supóngase que la frontera de un conjunto S está contenida en la unión de un número finito de arcos, cada uno de los cuales está dado por una ecuación $y = f(x)$ o por una ecuación $x = g(y)$, con la función f o g definida y continua en un intervalo cerrado finito. Entonces S tiene un área.[1]

Considérese ahora la *unión* y la *intersección* de S y T, donde S y T son dos conjuntos mensurables según Jordan, cualesquiera. Un punto que es interior a S o a T es interior a $S \cup T$; un punto exterior a S y a T es exterior a $S \cup T$. Por tanto, un punto frontera de $S \cup T$ debe ser punto frontera ya sea de S o de T. De modo semejante, puntos frontera de $S \cap T$ deben ser puntos frontera ya sea de S o de T. De aquí que las fronteras de $S \cup T$ y $S \cap T$ se encuentran en la unión de ∂S y ∂T y tienen área 0, dado que las fronteras ∂S y ∂T tienen área 0. Esto prueba el hecho fundamental:

La unión y la intersección de dos conjuntos mensurables según Jordan son, a su vez, mensurables según Jordan.

Aplicando (9) se concluye:

[1]Más generalmente, se deduce de la misma manera que un conjunto S en n dimensiones es mensurable según Jordan si su frontera está contenida en la unión de un número finito de superficies, cada una dada por una ecuación de la forma

$$x_j = f(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n)$$

con f continua en un conjunto cerrado y acotado del espacio $x_1 \cdots x_{j-1}\, x_{j+1} \cdots x_n$

Si los conjuntos S y T tienen un área, su unión $S \cup T$ también tiene un área y

(11) $$A(S \cup T) \leqq A(S) + A(T).$$

Es más, si S y T no se traslapan (es decir, los puntos interiores de cualquiera de los dos conjuntos son exteriores al otro), incluso puede concluirse que

(12) $$A(S \cup T) = A(S) + A(T).$$

Porque entonces un cuadrado R_{ik}^n no puede estar contenido simultáneamente en S y T. De donde, para la n-ésima subdivisión,

$$A_n^-(S \cup T) \geqq A_n^-(S) + A_n^-(T).$$

Cuando $n \to \infty$, se deduce que

$$A^-(S \cup T) \geqq A^-(S) + A^-(T).$$

Dado que S, T y $S \cup T$ son mensurables según Jordan, esto implica que

$$A(S \cup T) \geqq A(S) + A(T),$$

de modo que (12) se deduce de (11).

Este resultado se puede extender inmediatamente a cualquier número finito de conjuntos mensurables según Jordan y constituye la *aditividad finita de las áreas:*

Si cada uno del número finito de conjuntos $S_1, \ldots, S_N$ tiene un área y ningún par de ellos se traslapan, entonces la unión S de $S_1, \ldots, S_N$ también tiene un área y

(13) $$A(S) = A(S_1) + A(S_2) + \cdots + A(S_N).$$

Este teorema de adición se puede suplementar con un *teorema de sustracción*. Dados dos conjuntos S, T con $S \subset T$, denotemos por $T - S$ el conjunto de los puntos de T que no están contenidos en S. Se probará que cuando S y T tienen áreas y $S \subset T$, entonces $T - S$ tiene un área y

(14) $$A(T - S) = A(T) - A(S).$$

Una vez más se ve, con facilidad, que la frontera de $T - S$ está contenida en la unión de las fronteras de T y de S, de modo que $T - S$ tiene un área. Además, S y $T - S$ no tienen puntos en común,

por tanto no se traslapan y tienen la unión T, de modo que, por la regla de aditividad (12),

$$A(T) = A(S) + A(T - S),$$

lo cual es equivalente a (14).

Una combinación más simétrica de las reglas de adición y sustracción para las áreas consiste en la identidad

$$A(S \cap T) + A(S \cup T) = A(S) + A(T) \tag{15}$$

válida para cualesquiera dos conjuntos mensurables según Jordan S y T. En efecto, se tiene la identidad

$$S \cup T - T = S - S \cap T$$

entre los cuatro conjuntos S, T, $S \cap T$, $S \cup T$. Como los cuatro conjuntos tienen un área, puede aplicarse (14), y se deduce (15).

Los teoremas precedentes nos permiten liberar a la noción de área de toda referencia a los cuadrados especiales R_{ik}^n usados en su definición. Se verá que el área se puede definir en términos de métodos de subdivisión del plano mucho más generales, incluyendo, por ejemplo, subdivisiones del plano en rectángulos con lados paralelos a los ejes.

Primero se observa que, para un conjunto S, mensurable según Jordan, todos los puntos lo suficientemente próximos a la frontera ∂S de S pueden encerrarse en un conjunto de área arbitrariamente pequeña, porque, como ∂S tiene área 0, es posible, para un $\varepsilon > 0$ dado, encontrar un $n = n(\varepsilon)$ tal que el conjunto σ_n de los cuadrados R_{ik}^n que tienen puntos en común con ∂S tenga área total $< \varepsilon/9$. Sea P un punto del plano, a una distancia $< 2^{-n}$ de algún punto de ∂S. Entonces P pertenece a uno de los cuadrados en σ_n, o bien, a uno de los ocho vecinos de ese cuadrado. La unión del conjunto de todos los cuadrados en σ_n y de sus vecinos es entonces un conjunto de área $< \varepsilon$ que contiene a todos los puntos que están a una distancia $< 2^{-n}$ de los puntos de ∂S.

Tómese ahora una subdivisión $\mathfrak{M}$ del plano completo en rectángulos cerrados con lados paralelos a los ejes coordenados. Los rectángulos no necesitan ser congruentes, pero se requiere que la subdi-

visión sea tan fina que todos los rectángulos ρ tengan diámetros[1] menores que $2^{-n(\varepsilon)}$. Se forma la suma $A_\Sigma^-(S)$ de las áreas de todos los rectángulos ρ de la subdivisión hecha que estén contenidos en S, y también la suma $A_\Sigma^+(S)$ de todos los ρ que tengan puntos en común con S. Evidentemente,

$$A_\Sigma^-(S) \leqq A(S) \leqq A_\Sigma^+(S).$$

Además, $A_\Sigma^+(S) - A_\Sigma^-(S)$ representa la suma de las áreas de todos los rectángulos ρ que contienen tanto puntos en S como puntos que no están en S. Estos rectángulos necesariamente contienen puntos frontera de S. Supuesto que su diámetro es menor que 2^{-n}, cada punto de ese rectángulo ρ estará a una distancia menor que 2^{-n} de algún punto de ∂S. De aquí que, el área total de estos rectángulos será menor que ε. Por tanto,

$$A_\Sigma^+(S) - A_\Sigma^-(S) < \varepsilon,$$

y, consecuentemente,

$$A(S) - A_\Sigma^-(S) < \varepsilon, \quad A_\Sigma^+(S) - A(S) < \varepsilon.$$

Tomando una sucesión de subdivisiones $\sum_n$ del plano en rectángulos, con el diámetro máximo de cualquier rectángulo en $\sum_n$ tendiendo a cero, se encuentra que las sumas correspondientes $A_n^+(S)$ y $A_n^-(S)$ tienden hacia el área $A(S)$ del conjunto.

El argumento usado se aplica con igual propiedad a subdivisiones $\sum_n$ mucho más generales del plano en conjuntos ρ. Sólo se necesita requerir que los conjuntos individuales ρ sean mensurables según Jordan, cerrados y conexos, y que el diámetro máximo de cualquier conjunto ρ en una subdivisión tienda a 0 conforme $n \to \infty$.

A.2 Integrales de funciones de varias variables

a. Definición de la integral de un función f(x, y)

Primero se definirá la integral de una función $f(x, y)$ sobre el plano x, y completo. En toda esta sección se supondrá que la función $f(x, y)$ está definida para todo (x, y) pero tiene el valor 0 fuera de algún

[1] El diámetro de un conjunto se define generalmente como la menor cota superior (o, en el caso de un conjunto cerrado y acotado, como el máximo) de las distancias entres dos puntos cualesquiera en el conjunto. En el caso de un rectángulo el diámetro es la longitud de las diagonales.

conjunto acotado, es decir, que $f(x, y) = 0$ para todo (x, y) lo suficientemente alejado del origen (se dice que tales funciones tienen *soporte compacto*). Además, se supone que f es acotada.

Al definir la integral de una función f de esta clase se hace uso del mismo tipo de subdivisión del plano, en cuadrados cerrados R_{ik}^n, como en el caso de las áreas. Sea M_{ik}^n el supremum y m_{ik}^n el infimum[1] de f en el cuadrado R_{ik}^n. Entonces se asocian a f y a la n-ésima subdivisión del plano la *suma superior*

$$F_n^+ = \sum_{i,k} M_{ik}^n\, 2^{-2n}$$

y la *suma inferior*[2]

$$F_n^- = \sum_{i,k} m_{ik}^n\, 2^{-2n}.$$

Sólo un número finito de términos en estas sumas son diferentes de 0, dado que $f = 0$ para puntos distantes. Como $m_{ik}^n \leqq M_{ik}^n$, se tiene

$$(16) \qquad F_n^- \leqq F_n^+.$$

Al pasar de la subdivisión n-ésima a la $(n + 1)$-ésima, cada cuadrado R_{ik}^n se divide en cuatro cuadrados R_{js}^{n+1} de áreas 2^{-2n-2}, para los cuales, obviamente,

$$m_{ik}^n \leqq m_{js}^{n+1} \leqq M_{js}^{n+1} \leqq M_{ik}^n.$$

Se deduce que

$$(17) \qquad F_n^- \leqq F_{n+1}^- \leqq F_{n+1}^+ \leqq F_n^+.$$

Dado que las sucesiones monótonas acotadas convergen (ver el Volumen I, p. 96), las sumas superior e inferior tienen límites

$$(18) \qquad F^- = \lim_{n\to\infty} F_n^-, \qquad F^+ = \lim_{n\to\infty} F_n^+,$$

donde, por supuesto,

$$(19) \qquad F^- \leqq F^+.$$

---

[1] Ver las definiciones en el Volumen I, p. 97.

[2] El factor 2^{-2n} representa el área de los cuadrados R_{ik}^n producidos en la n-ésima subdivisión. En tres dimensiones, donde se subdivide el espacio en cubos de lado 2^{-n}, el factor se convierte en 2^{-3n} y, de modo semejante, en k dimensiones es 2^{-kn}.

F^+ recibe el nombre de *integral superior* y F^- es la *integral inferior* de la función $f(x, y)$.

DEFINICION *Se dice que la función $f(x, y)$ es integrable*[1] *si su integral superior F^+ y su integral inferior F^- tienen el mismo valor, el cual entonces se llama integral de f y se denota por*

$$\iint f\,dx\,dy.$$

Como

$$F^+ - F^- = \lim_{n\to\infty} (F_n^+ - F_n^-),$$

inmediatamente se tiene la siguiente condición de integrabilidad: *es necesario y suficiente, para la integrabilidad de f, que*

$$\lim_{n\to\infty} (F_n^+ - F_n^-) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,k} (M_{ik}^n - m_{ik}^n)2^{-2n} = 0. \tag{20}$$

A la n-ésima subdivisión se le puede asociar una *suma de Riemann*

$$F_n = \sum_{i,k} f(\xi_{ik}^n, \eta_{ik}^n)2^{-2n},$$

donde $(\xi_{ik}^n, \eta_{ik}^n)$ es un punto arbitrario del cuadrado R_{ik}^n. Evidentemente,

$$F_n^- \leqq F_n \leqq F_n^+. \tag{21}$$

De (18) se concluye que:

Si f es integrable las sumas de Riemann F_n convergen hacia el valor $\iint f\,dx\,dy$, independientemente de la elección de los puntos intermedios $(\xi_{ik}^n, \eta_{ik}^n)$ en R_{ik}^n.

b. Integrabilidad de las funciones continuas e integrales sobre conjuntos

Para las aplicaciones de la noción de integral es básico el teorema siguiente:

---

[1]Más precisamente, "integrable según Riemann". La definición dada aquí defiere de la común en cuanto a que sólo se considera la clase restringida de subdivisiones en los cuadrados R_{ik}^n pero es equivalente a ella.

Una función continua f que se anula fuera de algún conjunto acotado S es integrable.

Para la demostración se puede suponer que S es un cuadrado

$$|x| \leqq N, \quad |y| \leqq N,$$

donde N es un entero positivo. Entonces, en la n-ésima subdivisión, $M_{ik}^n = m_{ik}^n = 0$ para R_{ik}^n no contenido en S. En el conjunto cerrado y acotado S la función continua f es uniformemente continua. Como consecuencia, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que los valores de f difieren en menos que ε para dos puntos cualesquiera en S que estén separados por una distancia menor que δ. Así,

$$M_{ik}^n - m_{ik}^n \leqq \varepsilon,$$

siempre que n sea tan grande que

$$\sqrt{2}\, 2^{-n} < \delta.$$

Por tanto,

$$F_n^+ - F_n^- \leqq \sum \varepsilon 2^{-2n},$$

donde la suma se extiende sobre todos los i, k para los cuales los cuadrados R_{ik}^n estén contenidos en S. Ya que la suma de las áreas de esos cuadrados es igual al área $4N^2$ de S, se deduce que

$$F_n^+ - F_n^- \leqq 4N^2\varepsilon$$

para todo n lo suficientemente grande y, de aquí, que f satisface la condición de integrabilidad (20).

Las funciones continuas no son las únicas integrables. No se tratarán de determinar las funciones integrables más generales. Sin embargo, se considerará una clase importante de funciones discontinuas que son integrables, a saber, las funciones características de los conjuntos acotados, mensurables según Jordan. Con cualquier conjunto S en el plano se asocia la *función característica* ϕ_S definida por

$$\phi_S(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{para } (x, y) \in S \\ 0 & \text{para } (x, y) \notin S. \end{cases}$$

Los puntos donde ϕ_S es discontinua son exactamente los puntos frontera de S.

Tomemos ahora un conjunto acotado S e investiguemos la integrabilidad de la función $\phi_S(x, y)$. Lo acotado de S implica que ϕ_S se anula fuera de algún conjunto acotado. Obviamente, para esta función $M_{ik}^n = 1$ para todos los cuadrados R_{ik}^n que tienen puntos en común con S, y $M_{ik}^n = 0$ para los demás. De esta manera, la suma superior F_n^+ es precisamente la suma $A_n^+(S)$ de las áreas de todos los cuadrados R_{ik}^n que tienen puntos en común con S. Por tanto, para la función ϕ_S la integral superior $F^+ = \lim_{n\to\infty} F_n^+$ es idéntica al área exterior $A^+(S)$. De modo semejante, F_n^- es igual al área total $A_n^-(S)$ de los cuadrados R_{ik}^n contenidos en S, de modo que la integral inferior F^- es el área interior $A^-(S)$. De aquí que la integrabilidad de ϕ_S es equivalente a tener $A^+(S) = A^-(S)$, es decir, a la mensurabilidad de S según Jordan. Cuando ϕ_S es integrable, el valor F de su integral es, por supuesto, el área $A(S)$. Se ha probado que:

Los conjuntos S cuya función característica ϕ_S es integrable son exactamente aquéllos que tienen un área. La integral de ϕ_S es el área de S:

$$\iint \phi_S \, dx \, dy = A(S).$$

A partir de funciones continuas y funciones características de conjuntos mensurables según Jordan, pueden construirse otras funciones integrables, aplicando la regla:

El producto de dos funciones integrables es integrable.

Sean f y g integrables, lo cual para nosotros implica que son acotadas y que se anulan fuera de algún conjunto acotado. Denotemos por M_{ik}^n, M'^n_{ik}, M''^n_{ik} los supremos y m_{ik}^n, m'^n_{ik}, m''^n_{ik} los ínfimos de las tres funciones fg, f, g en el cuadrado R_{ik}^n. Para dos puntos cualesquiera (ξ', η'), (ξ'', η''), se tiene

$$\begin{aligned} &f(\xi', \eta')g(\xi', \eta') - f(\xi'', \eta'')g(\xi'', \eta'') \\ &\quad = f(\xi', \eta')[g(\xi', \eta') - g(\xi'', \eta'')] + g(\xi'', \eta'')[f(\xi', \eta') - f(\xi'', \eta'')]. \end{aligned}$$

De aquí que, denotando por N una cota superior para $|f|$ y $|g|$:

$$M_{ik}^n - m_{ik}^n \leqq N(M''^n_{ik} - m''^n_{ik}) + N(M'^n_{ik} - m'^n_{ik}).$$

Inmediatamente se deduce que fg satisface la condición de integrabilidad (20), si es satisfecha por f y por g.

Dados una función $f(x, y)$ y un conjunto S en el plano x, y, se dice que f *es integrable sobre el conjunto* S si la función $f\phi_S$ es integrable

en el sentido usado anteriormente; entonces se define *la integral de f sobre S por*

(22) $$\iint_S f\,dx\,dy = \iint f\phi_S\,dx\,dy.$$

Por el teorema del producto se tiene:

Una función integrable f es integrable sobre todo conjunto S mensurable según Jordan. En particular, toda función continua de soporte compacto es integrable sobre conjuntos mensurables según Jordan.

Si f es integrable sobre el conjunto S, el valor de la integral

$$\iint_S f\,dx\,dy$$

no depende de los valores de f en los puntos que no están en S, dado que la función $f\phi_S$ está determinada por los valores de f en los puntos de S. Incluso no es necesario tener a f definida en todo punto. Mientras S pertenezca al dominio de una función f, puede definirse $f\phi_S$ como igual a f en los puntos de S y 0 en todos los demás.

Para cualquier $f(x, y)$, integrable siempre puede interpretarse

$$\iint f\,dx\,dy$$

como

$$\iint_S f\,dx\,dy,$$

donde S es algún cuadrado suficientemente grande, fuera del cual f se anula.

c. Reglas básicas para integrales múltiples

Ya se vió que el producto de dos funciones integrables f y g, a su vez, es integrable. Aún más trivial es el hecho de que $f + g$ también es integrable; se deduce a partir de la condición de integrabilidad (20) y la observación de que para cualquier conjunto

$$\sup(f + g) - \inf(f + g) \leqq (\sup f - \inf f) + (\sup g - \inf g).$$

Entonces, la representación de las integrales como límites de sumas de Riemann muestra que

(23) $$\iint (f+g)dx\,dy = \iint f\,dx\,dy + \iint g\,dx\,dy.$$

Una estimación análoga al *teorema del valor medio del cálculo integral* para funciones de una sola variable es básica para todo lo que se hace con integrales. Sea S un conjunto mensurable según Jordan y f una función integrable. Sea M una cota superior y m una cota inferior para f en S. Se puede hacer una aproximación de la integral de $f\phi_S$ por las sumas de Riemann

$$F_n = \sum_{i,k} f(\xi_{ik}^n, \eta_{ik}^n)\phi_S(\xi_{ik}^n, \eta_{ik}^n)2^{-2n},$$

donde se tiene el cuidado de elegir como $(\xi_{ik}^n, \eta_{ik}^n)$ un punto de S, si el cuadrado R_{ik}^n contiene tal punto. Así,

$$F_n = \sum f(\xi_{ik}^n, \eta_{ik}^n)2^{-2n},$$

donde la suma se extiende sobre todos los i, k para los cuales R_{ik}^n tiene puntos en común con S. Dado que $m \leqq f \leqq M$ en S, se encuentra que

$$mA_n^+(S) \leqq F_n \leqq MA_n^+(S).$$

Cuando $n \to \infty$ se concluye que

$$mA^+(S) \leqq F \leqq MA^+(S);$$

ya que, por hipótesis, S tiene un área, se concluye que se cumple la desigualdad

(24) $$mA(S) \leqq \iint_S f\,dx\,dy \leqq MA(S).$$

Sean S' y S'' conjuntos mensurables según Jordan que no se traslapan (es decir, puntos interiores de uno de ellos son exteriores al otro); sea S su unión y s su intersección. Las funciones características de estos conjuntos satisfacen la relación

$$\phi_S + \phi_s = \phi_{S'} + \phi_{S''}.$$

De aquí que, aplicando (23), para cualquier función integrable f se encuentra la relación

$$\iint f\phi_S\,dx\,dy + \iint f\phi_s\,dx\,dy = \iint f\phi_{S'}\,dx\,dy + \iint f\phi_{S''}\,dx\,dy;$$

es decir,

$$\iint_S f\,dx\,dy + \iint_s f\,dx\,dy = \iint_{S'} f\,dx\,dy + \iint_{S''} f\,dx\,dy.$$

Aquí, por hipótesis, s sólo contiene puntos frontera de S' y de S''. De donde, $A(s) = 0$, y, por tanto, por (24), también

$$\iint_s f\,dx\,dy = 0.$$

Esto prueba la *ley de aditividad para las integrales:*

Si los conjuntos S' y S'' tienen áreas y no se traslapan y si f es integrable, se cumple la relación

$$\iint_{S'\cup S''} f\,dx\,dy = \iint_{S'} f\,dx\,dy + \iint_{S''} f\,dx\,dy. \tag{25}$$

Más generalmente, si S es la unión de los conjuntos mensurables según Jordan $S_1, \ldots, S_N$, ninguna pareja de los cuales se traslapan, y si f es integrable, se tiene

$$\iint_S f\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{N} \iint_{S_i} f\,dx\,dy. \tag{26}$$

Esta regla abre la posibilidad de aproximar las integrales sobre un conjunto S, por medio de sumas de Riemann basadas en subdivisiones mucho más generales que las que se han considerado hasta aquí. Supóngase, por simplicidad, que S es un conjunto cerrado, mensurable según Jordan, y f una función continua en S. Una "subdivisión general" $\sum$ de S es una representación de S como la unión de los conjuntos mensurables según Jordan $S_1, \ldots, S_N$, ninguna pareja de los cuales se translapan. En cada S_i se selecciona un punto arbitrario (ξ_i, η_i) y se forma la suma generalizada de Riemann

$$F_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i, \eta_i)A(S_i). \tag{27}$$

Se probará que F tiende a la integral de f sobre el conjunto S, a medida que la subdivisión se hace indefinidamente más fina. La función continua f es uniformemente continua en el conjunto cerrado y acotado S Dado un $\varepsilon > 0$, puede encontrarse un $\delta > 0$ tal que f varíe en menos que ε entre dos puntos cualesquiera de S que se encuentren a una distancia menor que δ. Supóngase que la subdivisión $\sum$ es tan fina que todos los S_i tienen diámetro $< \delta$, es decir, que dos puntos cualesquiera en el mismo S_i están a una distancia menor que δ. Entonces,

$$f(\xi_i, \eta_i) - \varepsilon \leqq f(\xi, \eta) \leqq f(\xi_i, \eta_i) + \varepsilon$$

para todo (ξ, η) en S_i. De (24) se deduce que

$$[f(\xi_i, \eta_i) - \varepsilon]A(S_i) \leqq \iint_{S_i} f(\xi, \eta)dx\,dy \leqq [f(\xi_i, \eta_i) + \varepsilon]A(S_i).$$

De aquí que, por (26), (27), (13),

$$F_\Sigma - \varepsilon A(S) \leqq \iint_S f\,dx\,dy \leqq F_\Sigma + \varepsilon A(S).$$

Se concluye que las sumas generalizadas de Riemann F_Σ difieren arbitrariamente poco del valor de la integral de f sobre S, para todos las subdivisiones $\sum$ lo suficientemente finas.

d. Reducción de integrales múltiples a integrales simples repetidas

Por lo común, puede reducirse el cálculo del valor de una integral triple a la evaluación de integrales simples y dobles—y, de modo semejante, el de las integrales dobles a integrales simples y, en general, el de una integral en el espacio n a integrales en el espacio $(n - 1)$ aplicando el teorema siguiente:

Sea $f(x, y, z)$ una función integrable definida en el espacio x, y, z. Supóngase que para cualesquiera valores fijos de x, y se tiene en $f(x, y, z)$ una función de la única variable z, que es integrable,[1] y *sea*

$$(28) \qquad \int f(x, y, z)dz = h(x, y).$$

Entonces $h(x, y)$ como función de x, y es integrable y

$$(29) \qquad \iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint h(x, y)\,dx\,dy.$$

Para la demostración, considérese la n-ésima subdivisión del espacio x, y, z en los cubos C^n_{ijk} dados por

$$C^n_{ijk}: \frac{i}{2^n} \leqq x \leqq \frac{i+1}{2^n}, \quad \frac{j}{2^n} \leqq y \leqq \frac{j+1}{2^n}, \quad \frac{k}{2^n} \leqq z \leqq \frac{k+1}{2^n}.$$

[1] Por supuesto, aquí se toman las integrales simples en el mismo sentido que las integrales dobles; se definen con la ayuda de las subdivisiones de la recta en intervalos $i2^{-n} \leqq z \leqq (i+1)2^{-n}$, tomando las sumas inferior y superior, y así sucesivamente.

Fórmese la suma superior para la integral triple de f:

$$F_n^+ = \sum_{i,j,k} M_{ijk}^n \, 2^{-3n},$$

donde M_{ijk}^n es el supremum, de $f(x, y, z)$ en C_{ijk}^n, y, de modo semejante, fórmese la suma inferior F_n^-. Tómese ahora cualquier punto fijo (x, y) en el cuadrado R_{ij}^n,

$$R_{ij}^n\colon \frac{i}{2^n} \leqq x \leqq \frac{i+1}{2^n}, \quad \frac{j}{2^n} \leqq y \leqq \frac{j+1}{2^n}.$$

Entonces M_{ijk}^n es una cota superior para $f(x, y, z)$ como una función de z en el intervalo

$$I_k^n\colon \frac{k}{2^n} \leqq z \leqq \frac{k+1}{2^n}.$$

De (24) y (26) se deduce que, para $x, y, \in R_{ij}^n$

$$h(x, y) = \int f(x, y, z) \; dz$$

$$= \sum_k \int_{I_k^n} f(x, y, z) \, dz \leqq \sum_k M_{ijk}^n 2^{-n} \; {}^{1}$$

Denotemos por H_n^+ y H_n^- las sumas superior e inferior para la integral de $h(x, y)$ en la n-ésima subdivisión. Se concluye que

$$H_n^+ \leqq \sum_{i,j} (\sum_k M_{ijk}^n \, 2^{-n}) 2^{-2n} = F_n^+,$$

y, de manera semejante,

$$H_n^- \geqq F_n^-.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} F_n^+ = \lim_{n\to\infty} F_n^- = \iiint f(x, y, z) \; dx\, dy\, dz,$$

se deduce que $h(x, y)$ es integrable y que se cumple (29).

Bajo hipótesis apropiadas, puede reducirse aún más la integral doble

[1] Por supuesto, está implícito en nuestras hipótesis que f se anula fuera de alguna región acotada. de modo que sólo interviene un número finito de los intervalos I_k^n

$$\iint h(x, y)\, dx\, dy$$

a un integral simple repetida

$$\int g(x)\, dx,$$

donde, para cada x fija, la función $g(x)$ está definida por

$$g(x) = \int h(x, y)\, dy.$$

Para aplicar esta reducción sólo se tiene que saber que, para cada x fija, se tiene en $h(x, y)$ una función integrable de y. Sin embargo, esto es una consecuencia de la análoga bidimensional de la fórmula (29), si se establece *la hipótesis adicional de que $f(x, y, z)$, para cualquier x fija, es una función integrable en el plano y,z, de* modo que

$$\iint f(x, y, z)\, dx\, dy = \int h(x, y)\, dy = g(x).$$

De aquí que puede evaluarse la integral triple original por medio de integraciones simples repetidas:

$$\text{(30)} \qquad \iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int \left\{ \int \left[\int f(x, y, z)\, dz \right] dy \right\} dx.$$

Una aplicación sencilla, conocida desde el cálculo elemental, se tiene en la fórmula para la reducción de una integral de volumen, sobre una región cilíndrica, a una integral doble.

Supóngase que S, un conjunto cerrado en el plano x, y, tiene un área y que $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ son funciones continuas definidas en S, con $\alpha(x, y) \leqq \beta(x, y)$. Denotemos por C la región *cilíndrica*

$$C: (x, y) \in S, \qquad \alpha(x, y) \leqq z \leqq \beta(x, y).$$

La frontera de C consiste de las superficies $z = \alpha(x,y)$, y $z = \beta(x,y)$, las cuales, por la p. 581, tienen volumen 0, y de los puntos en C para los cuales (x, y) se encuentra sobre la frontera S_b de S. Dado que S_b tiene área 0, este último conjunto también tiene volumen 0. Esto indica que C es mensurable según Jordan. Sea ahora $f(x, y, z)$ una función continua definida en C. Entonces $f(x, y, z)\phi_C(x, y, z)$ es integrable y

$$\iiint_C f\,dx\,dy\,dz = \iiint f(x, y, z)\phi_C(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

existe. Ahora bien, para cualquier $(x, y) \in S$, fijo, la expresión $f(x, y, z)\phi_C(x, y, z)$ se anula fuera del intervalo

$$\alpha(x, y) \leqq z \leqq \beta(x, y)$$

(el cual podría reducirse a un punto) y es continua en el intervalo. De donde, $f(x, y, z)\phi_C(x, y, z)$ es integrable y tiene la integral

$$h(x, y) = \int f(x, y, z)\phi_C(x, y, z)\,dz = \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\,dz,$$

donde se ha hecho uso de la notación ordinaria para las integrales definidas sobre intervalos. Para $(x, y) \notin S$ se tiene $f(x, y, z)\phi_C(x, y, z) = 0$ para toda z. De aquí que, para cualquier (x, y),

$$h(x, y) = \phi_S(x, y) \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\,dx\,dy.$$

Consecuentemente, en este caso la identidad (29) conduce a

$$\text{(31)} \qquad \iiint_C f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_S \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\,dz\right] dx\,dy.$$

A.3 Transformación de áreas e integrales

a. Aplicaciones de conjuntos

Nuestro propósito será deducir la regla por medio de la cual se transforma una integral múltiple cuando se cambian las variables de integración. Un cambio así de las variables x, y en el plano es una *aplicación* T de la forma

$$\text{(32)} \qquad \xi = f(x, y), \quad \eta = g(x, y),$$

donde f y g están definidas en un conjunto Ω, el *dominio* de la aplicación. (Aplicaciones semejantes definen un cambio de variable en dimensiones superiores.) Cada punto (x, y) en Ω tiene una imagen única (ξ, η). Las imágenes forman el *recorrido* $\omega = T(\Omega)$ de la aplicación T (ver la p. 288). Más generalmente, para cualquier subconjunto S de Ω, se denota por $T(S)$ el conjunto que consiste de las imágenes de todos los puntos de S.

Para las aplicaciones T consideradas aquí se harán las suposiciones siguientes:

1. El dominio Ω de T es un conjunto abierto acotado en el plano x, y.
2. Las funciones de aplicación f, g, son continuas y tienen primeras derivadas continuas, f_x, f_y, g_x, g_y, en Ω.
3. El jacobiano Δ de la aplicación no se anula en Ω:

$$\Delta = \frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = f_x g_y - f_y g_x \neq 0. \tag{33}$$

4. La aplicación es biunívoca; es decir, cada punto (ξ, η) en ω es la imagen de *un solo* punto (x, y) de Ω.

La fórmula (33) tiene la importante consecuencia (ver la p. 308) de que para cada vecindad ε, N_ε, de un punto (x_0, y_0) de Ω existe una vecindad δ del punto imagen (ξ_0, η_0) contenida en $T(N_\varepsilon)$. Esto implica que, para cualquier subconjunto S de Ω, un punto interior de S se aplica sobre un punto interior de $T(S)$. Por tanto, *los conjuntos abiertos S se aplican sobre los conjuntos abiertos $T(S)$* [1] En particular, el recorrido ω de la aplicación es abierto.

La condición 4 afirma que existe una *aplicación inversa* T^{-1}, la cual a cada (ξ, η) en ω le asocia el (x, y) único en Ω que es aplicado por T sobre (ξ, η). La aplicación inversa está dada por las funciones

$$x = \alpha(\xi, \eta), \quad y = \beta(\xi, \eta)$$

definidas en el conjunto abierto ω, las cuales son continuas y tienen primeras derivadas continuas

$$\alpha_\xi = g_y/\Delta, \quad \alpha_\eta = -f_y/\Delta, \quad \beta_\xi = -g_x/\Delta, \quad \beta_\eta = f_x/\Delta$$

(ver la p. 308). El jacobiano de la aplicación inversa es

$$\frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \alpha_\xi & \alpha_\eta \\ \beta_\xi & \beta_\eta \end{vmatrix} = \alpha_\xi \beta_\eta - \alpha_\eta \beta_\xi = \frac{1}{\Delta}$$

y, por supuesto, también es diferente de cero.

De aquí que, en pocas palabras, la aplicación inversa T^{-1} tiene todas las propiedades que se postularon para T.

---

[1] Se dice que T es una *aplicación abierta*.

Con el fin de llegar al área de la imagen de un conjunto S, primero se considerará un cuadrado cerrado R_{ik}^n contenido en Ω y se estimará el área de $T(R_{ik}^n)$. Supóngase que se da una cota superior μ para $|f_x|, |f_y|, |g_x|, |g_y|$ y una cota superior M para $|\Delta|$ en R_{ik}^n. Supóngase también que se tiene una cota superior ε para la variación de cualquiera de las cantidades f_x, f_y, g_x, g_y en R_{ik}^n. Introduciendo las abreviaturas $x_i = i2^{-n}, y_k = k2^{-n}$ para las coordenadas del vértice inferior izquierdo de R_{ik}^n, pueden aproximarse f y g en R_{ik}^n por medio de las funciones *lineales*

$$f_{ik}^n(x, y) = f(x_i, y_k) + f_x(x_i, y_k)(x - x_i) + f_y(x_i, y_k)(y - y_k)$$
$$g_{ik}^n(x, y) = g(x_i, y_k) + g_x(x_i, y_k)(x - x_i) + g_y(x_i, y_k)(y - y_k).$$

Por el teorema del valor medio del cálculo diferencial (ver la p. 95), para todo (x, y) en R_{ik}^n se tiene

$$f(x, y) = f(x_i, y_k) + f_x(x', y')(x - x_i) + f_y(x', y')(y - y_k)$$
$$g(x, y) = g(x_i, y_k) + g_x(x'', y'')(x - x_i) + g_y(x'', y'')(y - y_k),$$

donde (x', y') y (x'', y'') son puntos intermedios apropiados sobre la recta que une (x, y) y (x_i, y_k). Se concluye que, para cualquier (x, y) en R_{ik}^n,

$$\begin{aligned} &|f(x, y) - f_{ik}^n(x, y)| \\ &\quad = |[f_x(x', y') - f_x(x_i, y_k)](x - x_i) \\ &\qquad + [f_y(x', y') - f_y(x_i, y_k)](y - y_k)| \leqq 2\varepsilon 2^{-n}, \end{aligned}$$

y, de manera semejante,

$$|g(x, y) - g_{ik}^n(x, y)| \leqq 2\varepsilon 2^{-n}.$$

Ahora bien, la *aplicación lineal*

$$\xi = f_{ik}^n(x, y), \quad \eta = g_{ik}^n(x, y) \tag{34}$$

lleva el cuadrado R_{ik}^n hacia el paralelogramo π_{ik}^n con vértices

$$(f, g), \quad (f + 2^{-n}f_x, g + 2^{-n}g_x), \quad (f + 2^{-n}f_y, g + 2^{-n}g_y),$$
$$(f + 2^{-n}f_x + 2^{-n}f_y, g + 2^{-n}g_x + 2^{-n}g_y),$$

donde f, g, f_x, f_y, g_x, g_y deben tomarse en el punto (x_i, y_k). El área de este paralelogramo es el valor absoluto del determinante (p. 236)

$$\begin{vmatrix} 2^{-n}f_x & 2^{-n}f_y \\ 2^{-n}g_x & 2^{-n}g_y \end{vmatrix} = 2^{-2n}\Delta.$$

Las coordenadas (ξ, η) de cualquier punto de $T(R^n_{ik})$ difieren cuando más en $2\varepsilon 2^{-n}$ de las coordenadas correspondientes de un punto en π^n_{ik}, obtenido por medio de la aplicación lineal. De aquí que todo punto en $T(R^n_{ik})$ está en π^n_{ik}, o bien, cuando más a una distancia $2^{3/2}\varepsilon\, 2^{-n}$ de uno de los lados de π^n_{ik}. Cada lado de π^n_{ik} tiene cuando más una longitud de $\sqrt{2}\, 2^{-n}\mu$. El conjunto de los puntos que se encuentran dentro de la distancia $2^{3/2}\varepsilon 2^{-n}$ de uno de los lados tiene cuando más un área de

$$(4\sqrt{2}\, 2^{-n}\varepsilon)(\sqrt{2}\, 2^{-n}\mu) + \pi(2\sqrt{2}\, 2^{-n}\varepsilon)^2 = 8\varepsilon(\pi\varepsilon + \mu)2^{-2n}.$$

Dado que el área de π^n_{ik} no es mayor que $M2^{-2n}$, se encuentra que $T(R^n_{ik})$ está contenido en un conjunto cuya área es cuando más

$$(M + 32\pi\varepsilon^2 + 32\mu\varepsilon)2^{-2n}. \tag{35}$$

Tómese ahora cualquier cuadrado R^N_{jr} que surja en la N-ésima subdivisión, contenido en Ω. En el conjunto cerrado R^N_{jr}, las cantidades $|f_x|, |f_y|, |g_x|, |g_y|$ tienen una cota superior común μ. Supuesto que f_x, g_x, f_y, g_y son uniformemente continuas en R^N_{jr}, puede encontrarse una subdivisión más fina en cuadrados R^n_{ik} tal que estas funciones varíen en menos que ε en cada cuadrado $R^n_{ik} \subset R^N_{jr}$. Si M^n_{ik} denota el supremum de $|\Delta|$ en R^n_{ik}, de (35) se encuentra que $T(R^N_{jr})$ es cubierto por conjuntos cuya área total es cuando más de

$$\sum_{R^n_{ik} \subset R^N_{jr}} (M^n_{ik} + 32\pi\varepsilon^2 + 32\mu\varepsilon)2^{-2n} = F^+_n + (32\pi\varepsilon^2 + 32\mu\varepsilon)2^{-2N},$$

donde F^+_n es la suma superior correspondiente a la n-ésima subdivisión para la integral

$$\iint_{R^N_{jr}} |\Delta|\, dx\, dy.$$

Cuando $n \to \infty$ las sumas superiores F^+_n tienden al valor de la integral, dado que la función $|\Delta|$ es continua y, por tanto, integrable sobre R^N_{jr}. Como ε es un número positivo arbitrario, se encuentra que [ver (8), (10), pp. (579, 580] el área exterior de la imagen del cuadrado R^N_{jr} satisface la desigualdad

$$A^+[T(R^N_{jr})] \leqq \iint_{R^N_{jr}} |\Delta|\, dx\, dy, \tag{36}$$

la cual representa el primer paso en el cálculo del área de conjuntos imagen.

Tómese ahora cualquier conjunto S mensurable según Jordan, el cual, junto con su frontera ∂S, está en el conjunto abierto Ω. Puede hallarse un conjunto cerrado $S' \subset \Omega$ y un N tal que para $n > N$ cualquier cuadrado R_{ik}^n de lado 2^{-n} que tiene puntos en común con S esté completamente en S'.[1] Para $n > N$, denotemos por S_n la unión de los cuadrados R_{ik}^n que tienen puntos en común con S. La imagen de S_n es cubierta por las imágenes de esos cuadrados. De aquí que (36) proporciona la estimación para el área exterior de $T(S)$

$$A^+[T(S)] \leqq A^+[T(S_n)] \leqq \sum_{R_{ik}^n \subset S_n} A^+[T(R_{ik}^n)]$$

$$\leqq \sum_{R_{ik}^n \subset S_n} \iint_{R_{ik}^n} |\Delta|\, dx\, dy = \iint_{S_n} |\Delta|\, dx\, dy.$$

Cuando $n \to \infty$ la integral de $|\Delta|$ sobre S_n tiende a la integral sobre S, ya que $|\Delta|$ está acotado en S' y el área total de los R_{ik}^n que tienen puntos en común con S, sin estar por completo en S, tiende a 0 para el conjunto S mensurable según Jordan. Así, se ha probado que

$$A^+[T(S)] \leqq \iint_S |\Delta|\, dx\, dy \tag{37}$$

para cualquier conjunto mensurable según Jordan cuya cerradura esté en Ω.

Bajo las mismas hipótesis respecto a S, también (37) se puede aplicar a la frontera ∂S de S, la cual es un subconjunto cerrado de Ω de área 0. Entonces, por (37),

$$A^+[T(\partial S)] \leqq \iint_{\partial S} |\Delta|\, dx\, dy \leqq (\operatorname{Max}_{\partial S} |\Delta|) A(\partial S) = 0.$$

De aquí que $T(\partial S)$ tiene área 0. Sea (ξ, η) un punto frontera de $T(S)$ y considérese una sucesión de puntos (ξ_n, η_n) en $T(S)$ con el límite (ξ, η). Los (ξ_n, η_n) son imágenes de los puntos (x_n, y_n) en S. Una subsucesión de los (x_n, y_n) converge hacia un punto (x, y) en la cerradura de S y, por tanto, en Ω. La continuidad de la aplicación T implica que (ξ, η) es la imagen de (x, y). Aquí (x, y) no puede ser un punto interior de S, puesto que entonces (ξ, η) tendría que ser un punto interior de $T(S)$ y no un punto frontera. De aquí que (x, y) es un punto

[1] Sólo se tiene que elegir como S' la unión de todos los R_{jr}^N que tienen puntos en común con S, donde N se toma lo suficientemente grande.

frontera de S. Así, la frontera de $T(S)$ consiste de imágenes de puntos frontera de S y, por tanto, es un subconjunto del conjunto $T(\partial S)$ que, se ha demostrado, tiene área 0. Por tanto, *la frontera de T(S) también tiene área* 0 y se ha probado que *T(S) es mensurable según Jordan*. Entonces se puede remplazar $A^+[T(S)]$ en (37) por el área $A[T(S)]$ y encontrar que $A[T(S)]$ *existe y satisface*

$$A[T(S)] \leqq \iint_S |\Delta|\, dx\, dy = \iint_S \left|\frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)}\right| dx\, dy \tag{38}$$

para cualquier conjunto S mensurable según Jordan cuya cerradura esté en Ω.

Se vio que la frontera de $T(S)$ está contenida en $T(\partial S)$ y, por tanto, en ω. Así, $T(S)$ es un conjunto mensurable según Jordan cuya cerradura está en $\omega = T(\Omega)$. Supuesto que T y T^{-1} tienen las mismas propiedades, la fórmula (38) se puede aplicar a la aplicación inversa y encontrar que también

$$A(S) \leqq \iint_{T(S)} \left|\frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)}\right| d\xi\, d\eta = \iint_{T(S)} \left|\frac{1}{\Delta}\right| d\xi\, d\eta. \tag{39}$$

Si se aplica esta última fórmula a un cuadrado R^n_{ik} contenido en Ω, se encuentra que

$$2^{-2n} = A(R^n_{ik}) \leqq \iint_{T(R^n_{ik})} \left|\frac{1}{\Delta}\right| d\xi\, d\eta \leqq \frac{1}{m^n_{ik}} A[T(R^n_{ik})],$$

donde m^n_{ik} es la máxima cota inferior de $|\Delta|$ en R^n_{ik}. Por tanto,

$$A[T(R^n_{ik})] \geqq m^n_{ik} 2^{-2n}.$$

Para cualquier conjunto mensurable según Jordan con cerradura en Ω, denotemos por S_n la unión de los $R^n_{ik} \subset S$. Entonces

$$A[T(S)] \geqq A[T(S_n)] = \sum_{R^n_{ik} \subset S} A[T(R^n_{ik})] \geqq \sum_{R^n_{ik} \subset S} m^n_{ik}\, 2^{-2n} = F^-_n,$$

donde F^-_n es la suma inferior para la integral de $|\Delta|$ sobre el conjunto S. Cuando $n \to \infty$ se concluye que

$$A[T(S)] \geqq \iint_S |\Delta|\, dx\, dy.$$

Así, combinando con (38) se ha probado el hecho fundamental:

Sea S un conjunto mensurable según Jordan cuya cerradura se encuentra en el dominio Ω de la aplicación T Entonces la imagen T(S) también tiene un área y esta área está dada por la fórmula

$$A[T(S)] = \iint_{T(S)} d\xi\, d\eta = \iint_S \left| \frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)} \right| dx\, dy. \tag{40}$$

b. Transformación de integrales múltiples

Es fácil pasar de la fórmula (40), la cual representa la ley de transformación de las áreas, a la fórmula más general para la transformación de integrales. Se establecen las mismas hipótesis anteriores acerca de la aplicación T Ahora, sea S un conjunto *cerrado,* mensurable según Jordan, contenido en Ω y sea $F(x, y)$ una función definida y continua para (x,y) en S. Dado que la aplicación inversa $x = \alpha(\xi, \eta), y = \beta(\xi, \eta)$ es continua en Ω la función $F(\alpha(\xi, \eta), \beta(\xi, \eta))$ está definida y es continua en el conjunto $T(S)$ Una vez más, denotemos esta función de ξ y η por la letra F. Entonces la ley de transformación para las integrales toma la forma

$$\iint_{T(S)} F\, d\xi\, d\eta = \iint_S F \left| \frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)} \right| dx\, dy. \tag{41}$$

Para la demostración se hace uso de la representación de las integrales de las funciones continuas por medio de las sumas generalizadas de Riemann (ver la p. 591). Se considera una subdivisión general de S:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i,$$

donde los S_i son subconjuntos cerrados mensurables según Jordan, de S, que no se traslapan. Los conjuntos imagen $T(S_i)$ proporcionan una subdivisión correspondiente del conjunto $T(S)$. Como la aplicación T es uniformemente continua en el conjunto cerrado S, los diámetros de los conjuntos imagen $T(S_i)$ tienden a 0 cuando acontece lo mismo con los de los S_i. Tómese una subdivisión tan fina que f varíe en menos que ε en cada S_i. Sea (x_i, y_i) un punto en S_i. Entonces $F(x_i, y_i)$ es también uno de los valores tomados por la función $F(\alpha(\xi, \eta), \beta(\xi, \eta))$ en el conjunto $T(S_i)$. Fórmese la suma de Riemann correspondiente a la integral de la izquierda en (41).

$$\sum_i F(x_i, y_i)A[T(S_i)] = \sum_i \iint_{S_i} F(x_i, y_i)\, |\Delta(x, y)|\, dx\, dy$$
$$= \sum_i \iint_{S_i} F(x, y)\, |\Delta(x, y)|\, dx\, dy + r$$
$$= \iint_S F(x, y)\, |\Delta(x, y)|\, dx\, dy + r,$$

donde

$$|r| = \left|\sum_i \iint_{S_i} [F(x_i, y_i) - F(x, y)]\, |\Delta(x, y)|\, dx\, dy\right|$$
$$\leqq \varepsilon \sum_i \iint_{S_i} |\Delta(x, y)|\, dx\, dy = \varepsilon A[T(S)].$$

Conforme la subdivisión se hace más fina la suma de Riemann tiende a la integral de F sobre el conjunto $T(S)$. Cuando $\varepsilon \to 0$ se obtiene la identidad (41).

A.4 Nota acerca de la definición del área de una superficie curva

En la Sección 4.8 (p. 480) se definió el área de una superficie curva en una forma un tanto diferente a la que se usó para definir la longitud de arco en el Volumen I (p. 348). En la definición de la longitud, se partió de polígonos inscritos, mientras que en la definición del área se usaron planos tangentes en lugar de poliedros inscritos.

Para ver por qué no se pueden usar poliedros *inscritos,* considérese esa parte del cilindro con ecuación $x^2 + y^2 = 1$ en el espacio x, y, z, que se encuentra entre los planos $z = 0$ y $z = 1$. El área de esta superficie cilíndrica es 2π. Inscríbasé ahora en él una superficie poliédrica, cuyas caras sean todas triángulos idénticos, del modo siguiente: subdivídase la circunferencia del círculo unitario en n partes iguales y, sobre el cilindro, considere los m círculos horizontales equidistantes $z = 0, z = h, z = 2h, \ldots, z = (m - 1)h$, donde $h = 1/m$. Subdivídase cada uno de estos círculos en n partes iguales, de tal manera que los puntos de división de cada círculo estén encima de los centros de los arcos del círculo precedente. Considérese ahora un poliedro inscrito en el cilindro cuyas aristás consistan de las cuerdas de los círculos y de las rectas que unen los puntos de división vecinos de círculos vecinos. Las caras de este poliedro son triángulos isósceles congruentes, y si se eligen n y m lo suficientemente grandes, este poliedro se aproximará tanto como se desee a la superficie cilíndrica. Si ahora n se mantiene fijo, puede elegirse m tan grande que cada uno de los

triángulos esté tan aproximadamente paralelo al plano x, y como se desee y, por lo tanto, forme un ángulo con la superficie del cilindro arbitrariamente pronunciado. Entonces ya no se puede esperar que la suma de las áreas de los triángulos individuales sea una aproximación para el área del cilindro. De hecho, las bases de los triángulos individuales tienen la longitud 2 sen π/n, y la altura, por el teorema de Pitágoras, la longitud

$$\sqrt{\frac{1}{m^2} + \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{m^2} + 4\,\mathrm{sen}^4\frac{\pi}{2n}}\,.$$

Como, obviamente, el número de triángulos es $2mn$, el área de la superficie del poliedro es

$$F_{n,m} = 2mn\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{1}{m^2} + 4\,\mathrm{sen}^4\frac{\pi}{2n}} = 2n\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}\sqrt{1 + 4m^2\,\mathrm{sen}^4\frac{\pi}{2n}}\,.$$

El límite de esta expresión no es independiente de la manera en la que m y n tienden al infinito. Si, por ejemplo, se mantiene n fijo y se hace que $m \to \infty$, la expresión crece más allá de toda cota. Si, sin embargo, se hace que m y n tiendan simultáneamente a ∞, poniendo $m = n$, la expresión tiende a 2π. Si se pone $m = n$ se obtiene el límite

$$2\pi\sqrt{1 + \pi^4/4},$$

y así sucesivamente. A partir de la expresión anterior $F_{n,m}$ para el área del poliedro se ve que el límite inferior (punto inferior de acumulación) del conjunto de números $F_{n,m}$ es 2π, donde m tiende a infinito junto con n, de cualquier manera.[1] Esto se deduce inmediatamente de $F_{n,m} \geqq 2n$ sen π/n y $\lim\limits_{n\to\infty} 2n\,\mathrm{sen}\,\pi/n = 2\pi$.

[1] El *límite inferior* L de una sucesión acotada F_n (denotado por $L = \liminf\limits_{n\to\infty} F_n$) se puede definir en varias formas equivalentes:

(a) L es la máxima cota inferior de los límites de todas las subsucesiones convergentes de la sucesión F_n.

(b) L es el límite, cuando $N \to \infty$ de las máximas cotas inferiores de los conjuntos obtenidos de la sucesión F_n omitiendo los primeros N términos.

(c) L es el *punto inferior de acumulación* (ver el Volumen I, p. 95) de la sucesión F_n es decir, L es el menor número con la propiedad de que toda vecindad de L contiene puntos F_n para un número infinito de valores de n.

(d) Para cada ε positivo se tiene: $F_n < L - \varepsilon$ para cuando más un número finito de valores de n y $F_n < L + \varepsilon$ para un número infinito de valores de n.

El *límite superior* $M = \limsup\limits_{n\to\infty} F_n$ de la sucesión F_n se define de manera análoga. La sucesión converge si y sólo si $L = M$.

Por último, se mencionará —sin demostración— un hecho teóricamente interesante del cual el caso que acaba de darse es un ejemplo particular. Si se tiene cualquier sucesión de poliedros que tienden hacia una superficie dada, se ha visto que las áreas de los poliedros no necesariamente tienden hacia el área de la superficie. Pero el límite de las áreas de los poliedros (si existe), o, más generalmente, cualquier punto de acumulación de los valores de estas áreas siempre es mayor que, o al menos igual a, el área de la superficie curva. Si para cada sucesión de tales superficies poliédricas se encuentra el límite inferior del área, estos números forman un conjunto definido de números asociados con la superficie curva. *El área de la superficie curva puede definirse como la máxima cota inferior de este conjunto de números.*[1]

[1] Esta notable propiedad del área se llama *semicontinuidad* o, con más precisión, *semicontinuidad inferior*.

CAPITULO 5

Relaciones entre las integrales de superficie y las de volumen

Las integrales múltiples que se discutieron en el capítulo anterior no son las únicas extensiones posibles del concepto de integral a casos de más de una variable independiente. Surgen otras generalizaciones del hecho de que regiones de varias dimensiones pueden contener variedades de menos dimensiones, y de que pueden considerarse integrales sobre tales variedades. Así, para dos variables independientes no sólo se consideraron las integrales sobre regiones bidimensionales, sino también integrales a lo largo de curvas, que son variedades unidimensionales. Con tres variables independientes, junto con las integrales sobre regiones tridimensionales e integrales a lo largo de curvas se encontraron integrales sobre superficies curvas. En el presente capítulo se introducirán las integrales de superficie y se discutirán las relaciones mutuas entre integrales sobre variedades de dimensiones variables.[1]

5.1 Relación entre las integrales de línea y las integrales dobles en el plano (los teoremas de la integral de Gauss, de Stokes y de Green)

Para las funciones de una sola variable independiente, la fórmula

[1] Se usa el término *variedad* sin definición precisa, como un nombre genérico para los conjuntos de un número no especificado de dimensiones. En este libro se trata exclusivamente con variedades que son subconjuntos de algún espacio euclidiano, tales como las curvas, las superficies bidimensionales, las hipersuperficies y las regiones tetradimensionales en el espacio euclidiano tetradimensional. Con más generalidad, pueden definirse las variedades sin hacer referencia a un espacio euclidiano que las rodee. Tales variedades se asemejan localmente a porciones deformadas del espacio euclidiano, mientras que su estructura en conjunto puede ser mucho más complicada que la de dicho espacio.

fundamental que enuncia la relación entre la derivación y la integración (ver el Volumen I, p. 190) es

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{x_1} f'(x)\,dx = f(x_1) - f(x_0).$$

En dos dimensiones se cumple una fórmula análoga—*teorema de Gauss,* también llamado *teorema de la divergencia.* Aquí, nuevamente, la integral de una derivada de funciones

$$\iint_R f_x(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{o} \qquad \iint_R g_y(x,y)\,dx\,dy$$

se transforma en una expresión que depende de los valores de las propias funciones sobre la frontera. Aquí se considerará la frontera C del conjunto R como una curva *orientada* $+C$, eligiendo como sentido positivo sobre C aquel para el cual la región R permanece a la "izquierda" conforme se describe la curva frontera C.[1] Entonces el teorema de Gauss afirma que

$$(2) \qquad \iint_R [f_x(x,y) + g_y(x,y)]\,dx\,dy = \int_{+C} [f(x,y)\,dy - g(x,y)\,dx].$$

Este teorema contiene como un caso especial a la fórmula anterior que expresa el área A del conjunto R como una integral de línea sobre la frontera C de R. Póngase $f(x, y) = x$, $g(x, y) = 0$ e inmediatamente se obtiene

$$A = \iint_R dx\,dy = \int_{+C} x\,dy.$$

Exactamente de la misma manera, para $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = y$, se obtiene

$$A = \iint_R dx\,dy = -\int_{+C} y\,dx,$$

que concuerda con lo obtenido en el Volumen I (p. 367).

El teorema de la divergencia se vuelve particularmente sugerente en la notación del cálculo de formas diferenciales, como se explicó en las p. 357-376. En (2), la integral de línea tiene el integrando

$$L = f(x,y)\,dy - g(x,y)\,dx,$$

[1]Suponiendo que el sistema coordenado x, y es derecho.

una forma diferencial de primer orden. En efecto, L puede identificarse con la forma más general de primer orden $a(x, y)dx + b(x, y)dy$ si se toma $f = b, g = -a$. Por la definición de la p. 363, la derivada de esta forma es

$$dL = df\,dy - dg\,dx = (f_x\,dx + f_y\,dy)\,dy - (g_x\,dx + g_y\,dy)\,dx$$
$$= f_x\,dx\,dy - g_y\,dy\,dx = (f_x + g_y)\,dx\,dy,$$

lo cual es precisamente el integrando de la integral doble dada en (2). De aquí que la fórmula (2) toma la forma[1]

(2a) $$\iint_R dL = \int_{+C} L.$$

En la demostración nos restringiremos al caso en el que R es un conjunto abierto cuya frontera C es una curva simple cerrada que consiste de un número finito de arcos suaves; además, se supondrá que toda paralela a uno de los ejes coordenados se .intersecta con C en cuando más dos puntos.[2] Se requiere que f y g sean continuas y tengan primeras derivadas continuas en la cerradura de R (que consiste de R y de su frontera C).

Primero se supondrá que la función g se anula idénticamente. Entonces la integral doble de f_x sobre R existe y se puede escribir como una integral repetida[3]

---

[1] El proceso de formar la frontera de un conjunto R presenta analogías formales con la derivación. Por esa razón frecuentemente se usa el símbolo ∂R para la frontera $+C$ R, escribiendo (2a) como

(2b) $$\iint_R dL = \int_{\partial R} L.$$

En realidad, esta fórmula se aplica mucho más generalmente a las formas diferenciales integradas sobre variedades en el espacio n- dimensional (ver la p. 692)

[2] En el Apéndice se prueba el teorema (y sus generalizaciones en dimensiones superiores) bajo la hipótesis de que R es la cerradura de un conjunto abierto limitado por una curva simple que es suave en todo punto.

[3] El conjunto R está limitado por la unión de un número finito de arcos suaves y, por tanto (ver la p. 581), es mensurable según Jordan. Entonces, la integral de la función continua f_x sobre R existe y se define como la integral de $\phi_R f_x$ sobre el plano completo donde ϕ_R es la función característica del conjunto R.(es decir ϕ_R es 1 en los puntos de R pero es 0 en todos los demás puntos). Es permisible la reducción de la integral doble a una integral repetida (ver la p. 592), puesto que la función $\phi_R f_x$ puede ser integrada sobre cada paralela al eje x; en efecto, cada paralela al eje x corta a R en un intervalo abierto, o bien, no lo toca, de modo que la integral de $\phi_R f_x$ sobre una paralela al eje x- es la integral de la función continua f_x sobre un intervalo abierto o tiene el valor cero.

(3) $$\iint_R f_x(x,y)\,dx\,dy = \int dy \int f_x(x,y)\,dx.$$

Sobre cada paralela al eje x, la variable y es constante. Las paralelas al eje x que se intersectan con R corresponden a valores de y que forman un intervalo abierto $\eta_0 < y < \eta_1$, la proyección de R sobre el eje y.[1] Para cada y en ese intervalo la correspondiente paralela al eje x determina en R un intervalo, $x_0(y) < x < x_1(y)$, cuyos puntos extremos son las abscisas de los dos puntos de intersección de la paralela con C (ver la Fig. 5.1). Más concretamente, la fórmula (3) afirma que

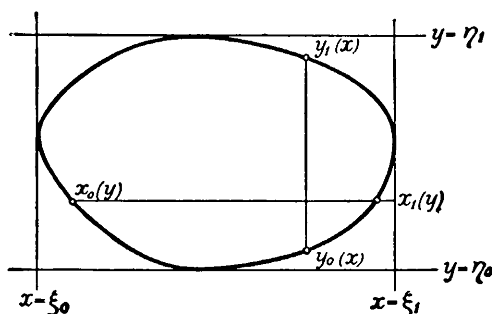


Figura 5.1

$$\iint_R f_x\,dx\,dy = \int_{\eta_0}^{\eta_1} h(y)\,dy,$$

donde

$$h(y) = \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f_x(x,y)\,dx = f(x_1(y),y) - f(x_0(y),y).$$

De aquí que

(4) $$\iint_R f_x\,dx\,dy = \int_{\eta_0}^{\eta_1} f(x_1(y),y)\,dy - \int_{\eta_0}^{\eta_1} f(x_0(y),y)\,dy.$$

Introdúzcanse los dos arcos simples orientados $+C_1$, $+C_0$ dados paramétricamente por

[1] La proyección de R es un intervalo abierto porque R es abierto y su frontera es una curva simple cerrada y, por lo tanto, conexa.

$$+C_1: x = x_1 t, y = t, \quad \text{para} \quad \eta_0 \leqq t \leqq \eta_1$$

$$+C_0: x = x_0 t, y = t, \quad \text{para} \quad \eta_0 \leqq t \leqq \eta_1,$$

respectivamente, donde, en cada caso, el sentido de la t creciente corresponde a la orientación del arco. Entonces la fórmula (4) se puede escribir como

$$\iint_R f_x \, dx \, dy = \int_{+C_1} f \, dy - \int_{+C_0} f \, dy.$$

Ahora C_1 y C_0 forman, respectivamente, las porciones derecha e izquierda de C, donde, no obstante, $+C_1$ tiene la misma orientación que C y $+C_0$ la opuesta. Denotando por $-C_0$ el arco que se obtiene invirtiendo la orientación de C_0, resulta (ver la p. 124)

$$\iint_R f \, dx \, dy = \int_{+C_1} f \, dy + \int_{-C_0} f \, dy = \int_{+C} f \, dy.$$

De manera semejante, $+C$ se descompone en un arco "superior"

$$+\Gamma_1: x = t, \quad y = y_1(t), \quad \text{para} \quad \xi_0 \leqq t \leqq \xi_1$$

y un arco "inferior"

$$+\Gamma_0: x = t, \quad y = y_0(t), \quad \text{para} \quad \xi_0 \leqq t \leqq \xi_1,$$

orientados de acuerdo con el sentido de la t creciente. Aquí el intervalo $\xi_0 < x < \xi_1$ representa la proyección de R sobre el eje x. Entonces,

$$\begin{aligned}
\iint_R g_y \, dx \, dy &= \int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} g_y \, dy \\
&= \int_{\xi_0}^{\xi_1} g(x, y_1(x)) dx - \int_{\xi_0}^{\xi_1} g(x, y_0(x)) \, dx \\
&= \int_{+\Gamma_1} g \, dx - \int_{+\Gamma_0} g \, dx \\
&= -\int_{-\Gamma_1} g \, dx - \int_{+\Gamma_0} g \, dx
\end{aligned}$$

$$= -\int_{+C} g\,dx$$

dado que aquí Γ_0 tiene la misma orientación que C y Γ_1 la opuesta. Sumando las dos identidades obtenidas se llega a la fórmula general (2).

Ahora la fórmula se puede extender a conjuntos abiertos R más generales limitados por una curva simple cerrada C, siempre que C pueda descomponerse en un número finito de arcos simples $C_1, \ldots, C_n$ cada uno de los cuales se intersecta cuando más en un punto con cualquier paralela a uno de los ejes coordenados.[1] Con el fin de probar que aquí también

$$\iint_R f_x\,dx\,dy = \int_{+C} f\,dy, \tag{5}$$

trácense paralelas al eje y que pasen por todos los puntos extremos de los arcos simples C_i (ver la Fig. 5.2). De esta manera se descompone

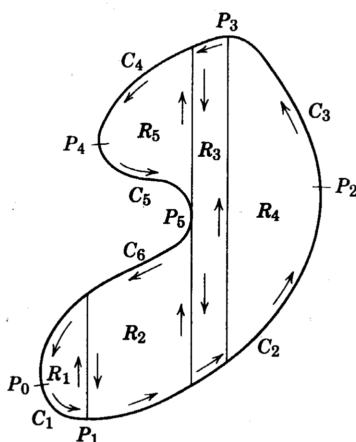


Figura 5.2

R en un número finito de conjuntos $R_1, \ldots, R_N$, cada uno de los cuales está limitado lateralmente por segmentos rectilíneos paralelos

[1] No siempre se satisface esta hipótesis. Por ejemplo, la curva frontera C puede consistir en parte de la curva $y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, la cual es cortada por el eje x en un número finito de puntos y no puede ser descompuesta en un número finito de arcos cortados en sólo un punto.

al eje y y arriba y abajo por subarcos simples de dos de los arcos C_i. La fórmula

$$\iint_{R_i} f_x \, dx \, dy = \int_{+\Gamma_i} f \, dy$$

se puede aplicar a cada uno de los conjuntos R_i con frontera Γ_i, ya que Γ_i se intersecta con cada paralela al eje x en cuando más dos puntos. Aquí la orientación de la curva frontera $+\Gamma_i$ concuerda con la de $+C$ en las porciones no verticales y es la de la y creciente sobre la frontera derecha y la de la y decreciente sobre la frontera izquierda. Sumando las fórmulas para $i = 1, \ldots, N$ las integrales dobles sobre los R_i conducen a la integral doble sobre R. En las integrales de línea sobre las $+\Gamma_i$ las contribuciones sobre los segmentos verticales auxiliares se cancelan, dado que cada segmento se recorre dos veces, una vez hacia arriba, una vez hacia abajo. De aquí que las integrales de línea sobre las curvas $+\Gamma_i$ se agregan a la integral sobre la curva completa $+C$, y se obtiene la fórmula (5). De la misma manera se prueba que

$$\iint_R g_y \, dx \, dy = -\int_{+C} g \, dx,$$

dividiendo R por medio de paralelas al eje x que pasen por todos los puntos extremos de los arcos C_i.

Los mismos argumentos conducen a afirmar también que puede suprimirse la hipótesis de que la frontera C de R consiste de una *sola* curva cerrada C. El teorema de la divergencia (2) se aplica con igual propiedad cuando C consiste de varias curvas cerradas, mientras c pueda descomponerse en un número finito de arcos simples, cada uno de los cuales se intersecte cuando más en un punto con paralelas o los ejes. Al tomar la integral sobre $+C$ tiene que darse a cada una de las componentes cerradas de C la orientación correspondiente para dejar R a la izquierda. Entonces, la descomposición por medio de paralelas al eje y aún conduce a regiones cuya frontera se intersecta cuando más en dos puntos con cualquier paralela al eje x (ver la Fig. 5.3).

De esta manera, se prueba el teorema de la divergencia para regiones R más generales *descomponiendo* R en regiones para las cuales el teorema ya ha sido probado. Con frecuencia, como alternativa R se puede *transformar* en una región para la cual se sabe que

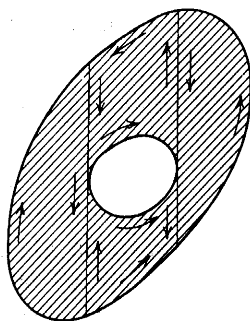


Figura 5.3

el teorema es aplicable. Excribiendo el teorema de la divergencia como

$$\iint_R dL = \int_{+C} L,$$

se observa que las formas diferenciales dL y L están definidas independientemente de las coordenadas, como se explicó en la Sección 3.6d, p. 373. Sea

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

una transformación uno a uno continuamente diferenciable, con jacobiano positivo, que lleva a R hacia un conjunto R^* con frontera C^* en el plano u, v. Entonces

$$\begin{aligned} L = f\,dy - g\,dx &= f(y_u\,du + y_v\,dv) - g(x_u\,du + x_v\,dv) \\ &= (fy_u - gx_u)\,du + (fy_v - gx_v)\,dv \\ &= A\,du + B\,dv, \end{aligned}$$

donde

$$A = fy_u - gx_u, \qquad B = fy_v - gx_v.$$

La derivada de L, calculada en las variables x, y, o bien, las u, v, está dada por

$$dL = df\,dy - dg\,dx = (f_x + g_y)\,dx\,dy$$

$$= dA\,du + dB\,dv = (B_u - A_v)\,du\,dv,$$

de modo que (como también puede verificarse directamente)

$$(f_x + g_y)\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = B_u - A_v.$$

Supóngase que se refiere C a un parámetro t:

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad\qquad a \leqq t \leqq b,$$

donde la orientación de $+C$ corresponde a la t creciente. Usando el mismo valor del parámetro t, para los puntos correspondientes de $+C^*$ se tiene, para las integrales de línea de L sobre C y C^* el valor común

$$\int L = \int \frac{L}{dt}\,dt = \int_{+C}\left(f\frac{dy}{dt} - g\frac{dx}{dt}\right)dt = \int_{+C^*}\left(A\frac{du}{dt} + B\frac{dv}{dt}\right)dt.$$

De modo semejante, se tiene el mismo valor para las integrales de área en los dos planos:

$$\iint dL = \iint_R (f_x + g_y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{R^*} (f_x + g_y)\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\,du\,dv$$

$$= \iint_{R^*} (B_u - A_v)\,du\,dv.$$

De aquí que el teorema de la divergencia para R,

$$\iint_R (f_x + g_y)\,dx\,dy = \int_C (f\,dy - g\,dx)$$

se deducirá de la fórmula correspondiente para R^*,

$$\iint_{R^*} (B_u - A_v)\,du\,dv = \int_{+C^*} (A\,du + B\,dv).$$

Para la validez del teorema en una región R basta con que R se pueda transformar en un región cuya frontera consista de arcos sim-

ples que se intersecten con paralelas a los ejes en, cuando más, un punto. Si, por ejemplo, la frontera C (o el propio R) es un polígono, siempre puede girarse la figura de tal manera que ninguno de los lados del polígono sea paralelo a los ejes, y será aplicable el teorema de la divergencia.

5.2 Forma vectorial del teorema de la divergencia. Teorema de Stokes

El teorema de Gauss se puede enunciar en un forma particularmente simple si se usan las notaciones del análisis vectorial. Con este fin se consideran las dos funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ como las componentes de un campo vectorial plano, **A**. El integrando de la integral doble en la fórmula (2) se denota por div **A**,

$$\text{div } \mathbf{A} = f_x(x, y) + g_y(x, y)$$

y se llama divergencia del vector **A** (ver la p. 251). Con el fin de obtener una expresión vectorial para la integral de línea de la derecha en el teorema de la divergencia, se introduce la longitud de arco s de la curva frontera orientada $+C$ (ver el Volumen I, p. 352). Aquí, el sentido de la s creciente se hace corresponder a la orientación[1] de la curva $+C$. Entonces el segundo miembro de la identidad (2) se transforma en

$$\int_C [f(x, y)\dot{y} - g(x, y)\dot{x}]\, ds,$$

[1] En efecto, esta convención respecto a s hace el valor de una integral de línea de la forma

$$I = \int_C h\, ds$$

independiente de la orientación de C siempre que el integrando C no dependa de la orientación. Si se representa h paramétricamente en la forma $x = x(t), y = y(t)$ para $a \leqq t \leqq b$ donde el sentido de t creciente corresponde a una orientación particular de C, entonces

$$I = \int_C h\, ds = \int_a^b h \frac{ds}{dt}\, dt,$$

donde $ds/dt > 0$. En particular, $I > 0$ siempre que el integrando h sea positivo a lo largo de la curva.

donde se pone $dx/ds = \dot{x}$ y $dy/ds = \dot{y}$.

Recordemos ahora que el vector plano **t**, con componentes $\dot{x}$ y $\dot{y}$ tiene longitud unitaria y la dirección de la tangente en el sentido de la s creciente y, por tanto, la dirección dada por la orientación de C. El vector **n** con componentes $\xi = \dot{y}$ y $\eta = -\dot{x}$ tiene longitud 1, es perpendicular a la tangente y, además, tiene la misma posición relativa al vector **t** que la del eje x positivo relativa al eje positivo y [1] Si, como es costumbre, una rotación de 90° en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj lleva al eje y positivo hacia el eje x positivo, el vector **n** se obtiene por una rotación de 90° en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj del vector tangente **t**. De donde, **n** es el vector normal que apunta hacia el lado "derecho" de la curva orientada C (ver el Volumen I, p. 346). Como, en nuestro caso, $+C$ está orientada de tal manera que la región R se encuentra a su izquierda, se concluye que **n** es el vector unitario en la dirección de la normal trazada hacia afuera (ver la Fig. 5.4). Las componentes ξ, η del vector unitario **n** son los cosenos directores de la normal hacia afuera:

$$\xi = \cos\theta, \qquad \eta = \operatorname{sen}\theta$$

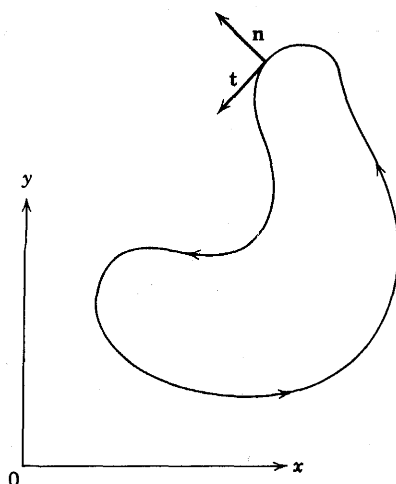


Figura 5.4

[1] Esto se ve a partir de las consideraciones de continuidad; puede suponerse que se construye la tangente a la curva de modo que coincida con el eje y y que **t** apunte en la dirección de la y creciente. Entonces $x = 0, y = 1$, de modo que el vector **n** con componentes $\xi = 1$ y $\eta = 0$ tiene la dirección del eje x positivo.

si **n** forma el ángulo θ con el eje x positivo. Resulta útil observar que las componentes de **n** también se pueden escribir como las derivadas direccionales de x y y en la dirección de **n**:

$$\xi = \dot{y} = \frac{dx}{dn}, \qquad \eta = -\dot{x} = \frac{dy}{dn},$$

dado que para cualquier escalar $h(x, y)$ la derivada de h en la dirección de **n** está dada por

$$\frac{dh}{dn} = h_x \cos\theta + h_y \operatorname{sen}\theta = \xi h_x + \eta h_y$$

(ver la p. 71).

Por lo tanto, el teorema de Gauss se puede escribir en la forma

$$(6) \qquad \iint_R \operatorname{div} \mathbf{A}\, dx\, dy = \int_C \left(f\frac{dx}{dn} + g\frac{dy}{dn}\right) ds.$$

Aquí el integrando de la derecha es el producto escalar $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}$ del vector **A** con componentes f, g y el vector **n** con componentes dx/dn, dy/dn. Ya que el vector **n** tiene longitud 1, el producto escalar $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}$ representa la componente A_n del vector **A** en la dirección de **n**. Consecuentemente, el teorema de la divergencia toma la forma

$$(7) \qquad \iint_R \operatorname{div} \mathbf{A}\, dx\, dy = \int_C \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, ds = \int_C A_n\, ds.$$

Dicho en palabras, *la integral doble de la divergencia de un campo vectorial plano sobre un conjunto R es igual a la integral de línea, a lo largo de la frontera C de R, de la componente del campo vectorial en la dirección de la normal hacia afuera.*

Para llegar a una interpretación vectorial completamente diferente del teorema de Gauss en el plano, se pone

$$a(x, y) = -g(x, y), \qquad b(x, y) = f(x, y).$$

Entonces, por (2),

$$(8) \qquad \iint_R (b_x - a_y)\, dx\, dy = \int_C (a\dot{x} + b\dot{y})\, ds = \int_{+C} a\, dx + b\, dy.$$

Si, nuevamente, se toman las dos funciones a y b como componentes de un campo vectorial **B** (donde, en cada punto, se obtiene **B** a par-

tir del vector **A** por medio de una rotación de 90° en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj), se ve que $a\dot{x} + b\dot{y}$ es el producto escalar de **B** con el vector unitario tangencial **t**:

$$a\dot{x} + b\dot{y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} = B_t,$$

donde B_t es la componente tangencial del vector **B**. El integrando de la integral doble dada en (8) apareció en la p. 252 como una componente del rotacional de un vector en el espacio. Para aplicar aquí el concepto de rotacional, imaginemos el campo vectorial plano **B** continuado de alguna manera en el espacio x, y, z, de modo que en el plano x, y las componentes x y y de **B** coincidan con $a(x, y)$ y $b(x, y)$, respectivamente. Entonces $b_x - a_y$ representa la componente z, $(\text{rot } \mathbf{B})_z$, del rot **B**. El teorema de la divergencia ahora toma la forma

$$\iint_R (\text{rot } \mathbf{B})_z \, dx \, dy = \int_C B_t \, ds. \tag{9}$$

El teorema puede enunciarse en palabras como sigue:

La integral de la componente z del rotacional de un campo vectorial en el espacio, tomada sobre un conjunto R en el plano x, y, es igual a la integral de la componente tangencial tomada a lo largo de la frontera de R. Esta proposición es el *teorema de Stokes* en el plano.

Si se aplica el carácter vectorial del rotacional de un campo vectorial en el espacio, puede liberarse el teorema de Stokes de la restricción de que la región plana R esté en el plano x, y. Cualquier plano en el espacio puede tomarse como plano x, y de un sistema coordenado apropiado. Así se llega al enunciado más general del teorema de Stokes:

$$\iint_R (\text{rot } \mathbf{B})_n \, ds = \int_C B_t \, ds, \tag{10}$$

donde R es cualquier región plana en el espacio limitada por la curva C y $(\text{rot } \mathbf{B})_n$ es la componente del vector rot **B** en la dirección del vector normal **n** al plano que contiene a R. Aquí C tiene que estar orientada de modo que el vector tangente **t** apunte en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj, visto desde el lado del plano hacia el que apunta **n**.

Si la frontera completa C de R consiste de varias curvas cerradas estas fórmulas siguen siendo válidas, siempre que se extienda la in-

tegral de línea sobre cada una de esas curvas, orientadas apropiadamente de manera de dejar R a su izquierda.

De importancia es el caso especial en que las funciones $a(x, y)$, $b(x, y)$ satisfacen la condición de integrabilidad

$$a_y = b_x, \tag{11}$$

es decir, donde $a\ dx + b\ dy$ una forma "cerrada". Aquí la integral doble sobre R se anula y, de (8), se encuentra que

$$\int_C a\ dx + b\ dy = 0$$

siempre que C denote la frontera completa de una región R en la que se cumple (11). Una vez más, esto implica, como se vió en la p. 126, que

$$\int a\ dx + b\ dy$$

extendida sobre un arco simple tiene el mismo valor para todos los arcos con los mismos puntos extremos y que pueden deformarse hasta convertirse uno en otro sin dejar R (ver la p. 134).

Ejercicios 5.2

1. Usar el teorema de la divergencia en el plano para evaluar la integral de línea

$$\int_C A\ du + B\ dv$$

para las funciones y trayectorias que siguen recorridas en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la región dada

(a) $A = au + bv,\quad B = 0,\quad u \geqq 0,\quad v \geqq 0,\quad \alpha^2 u + \beta^2 v \leqq 1$

(b) $A = u^2 - v^2,\quad B = 2uv,\quad |u| < 1,\quad |v| < 1$

(c) $A = v^n,\quad B = u^n,\quad u^2 + v^2 \leqq r^2.$

2. Deducir la fórmula para el teorema de la divergencia en coordenadas polares:

$$\int_{+C^*} f(r, \theta)\ dr + g(r, \theta)\ d\theta = \iint_{R^*} \frac{1}{r} \left\{\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial \theta}\right\} dS.$$

3. Suponiendo que se cumplen las condiciones para el teorema de la divergencia, deducir las expresiones siguientes en coordenadas polares para el área de una región R con frontera C,

$$\frac{1}{2}\int_{+C^*} r^2\, d\theta, \qquad -\int_{+C^*} r\theta\, dr,$$

donde en la segunda fórmula se supone que R no contiene al origen.
4. Aplicar el teorema de Stokes en el plano x, y para demostrar que

$$\iint_{R^*} \frac{d(u, v)}{d(x, y)}\, dS = \int_{+C^*} u(\text{grad } v) \cdot \mathbf{t}\, ds,$$

donde $\mathbf{t}$ es el vector tangente unitario para C, orientado positivamente.

5.3 Fórmula para la integración por partes en dos dimensiones. Teorema de Green

El teorema de la divergencia

$$(12) \qquad \iint_R (f_x + g_y)\, dx\, dy = \int_C \left(f\frac{dx}{dn} + g\frac{dy}{dn}\right) ds$$

ver la fórmula (6) , combinado con la regla para derivar un producto, inmediatamente proporciona una fórmula para la *integración por partes,* que es básica en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales. Sea $f(x, y) = a(x, y)\, u(x, y)$ y $g(x, y) = b(x, y)\, v(x, y)$, donde las funciones a, u, b, v tienen primeras derivadas continuas. Puesto que aquí

$$f_x + g_y = (au_x + bv_y) + (a_x u + b_y v),$$

puede escribirse la fórmula (12) en la forma

$$(13) \qquad \iint_R (au_x + bv_y)\, dx\, dy = \int_C \left(au\frac{dx}{dn} + bv\frac{dy}{dn}\right) ds - \iint_R (a_x u + b_y v)\, dx\, dy.$$

Para obtener el *primer teorema de Green* se aplica esta fórmula al caso en que $u = v$ y a y b son de la forma $a = w_x$ y $b = w_y$. (Se supone que u tiene primeras derivadas continuas y w segundas derivadas continuas en la cerradura de R.) Se obtiene la ecuación

$$\iint_R (u_x w_x + u_y w_y)\,dx\,dy = \int_C u\left(w_x \frac{dx}{dn} + w_y \frac{dy}{dn}\right) ds - \iint_R u(w_{xx} + w_{yy})\,dx\,dy.$$

Usando el símbolo Δ para el *operador de Laplace* (p. 255), se escribe

$$w_{xx} + w_{yy} = \Delta w.$$

Es más, dx/dn y dy/dn son los cosenos directores de la normal hacia afuera de la frontera C de R (ver la p. 615); así, se tiene en

$$w_x \frac{dx}{dn} + w_y \frac{dy}{dn} = \frac{dw}{dn}$$

la derivada direccional de w tomada en la dirección de la normal exterior a C.[1] En esta notación, el *primer teorema de Green* se convierte en

$$\iint_R (u_x w_x + u_y w_y)\,dx\,dy = \int_C u \frac{dw}{dn}\,ds - \iint_R u\Delta w\,dx\,dy \tag{14}$$

Si, además, u tiene segundas derivadas continuas, intercambiando los papeles de u y w en (14) se obtiene la fórmula

$$\iint_R (w_x u_x + w_y u_y)\,dx\,dy = \int_C w \frac{du}{dn}\,ds - \iint_R w\Delta u\,dx\,dy$$

Restando las dos relaciones se llega a una ecuación simétrica en u y w que se conoce como *segundo teorema de Green:*

$$\iint_R (u\Delta w - w\Delta u)\,dx\,dy = \int_C \left(u\frac{dw}{dn} - w\frac{du}{dn}\right) ds. \tag{15}$$

Los dos teoremas de Green son básicos en el estudio de las soluciones de la ecuación diferencial parcial $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (ecuación de Laplace).[2]

[1] Por brevedad, comúnmente se da el nombre de *derivada normal de w a dw/dn*

[2] Ver la sección que trata de la teoría del potencial (p. 788).

5.4 El teorema de la divergencia aplicado a la transformación de integrales dobles

a. El caso de las aplicaciones biunívocas

El teorema de la divergencia proporciona una nueva demostración de la regla fundamental para la transformación de las integrales dobles con el fin de introducir nuevas variables independientes (ver la p. 460). El teorema de la divergencia para una región R con frontera C puede enunciarse en la forma

$$\int_R dL = \int_{+C} L \tag{16}$$

[ver la fórmula (2a), p. 545].[1] Aquí, poniendo $f = b$, $g = -a$,

$$L = a(x, y)\, dx + b(x, y)\, dy \tag{17a}$$

$$dL = (b_x - a_y)\, dx\, dy. \tag{17b}$$

Si la curva C tiene una representación paramétrica

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad \alpha \leqq t \leqq \beta,$$

donde el sentido de la t creciente corresponde a la orientación de $+C$, puede escribirse la integral de línea que se tiene en (16) como la integral ordinaria

$$\int_{+C} L = \int_{+C} a\, dx + b\, dy = \int_a^\beta \frac{L}{dt}\, dt \tag{17c}$$

con el integrando

$$\frac{L}{dt} = a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt}$$

[1] Aquí y en lo que sigue siempre se supondrá tácitamente que se satisfacen las hipótesis usadas en la demostración del teorema de la divergencia; esto es, que R es un conjunto abierto cuya frontera C consiste de un número finito de arcos suaves, cada uno de los cuales se intersecta cuando más en un punto con las paralelas a los ejes. Se supone que los coeficientes de la forma lineal L tienen primeras derivadas continuas en la cerradura de R.

(ver la p. 357).

Considérese ahora una aplicación definida por las funciones

(18a) $$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y).$$

Se supone que la aplicación es biunívoca en la cerradura de R y que el jacobiano $d(u, v)/d(x, y)$ es positivo en todas partes. Supóngase que R se aplica sobre el conjunto R' del plano u, v y C sobre la frontera C' de R'. Además, C' también deberá consistir de un número finito de arcos suaves, cada uno de los cuales se intersecta en, cuando más, un punto con cualquier paralela a uno de los ejes coordenados. Como el jacobiano es positivo, se conserva la orientación; es decir, al crecer t el punto (u, v) dado por

$$u = u(x(t), y(t)), \qquad v = v(x(t), y(t))$$

describe la curva C' de manera tal que el conjunto R' queda a la izquierda. Con referencia a las coordenadas u, v se tiene

$$L = A\,du + B\,dv = A\,(u_x dx + u_y dy) + B\,(v_x dx + v_y dy) = a\,dx + b\,dy,$$

donde los coeficientes A, B en el sistema u, v están relacionados con los coeficientes a, b en el sistema x, y por las expresiones

$$a = Au_x + Bv_x, \qquad b = Au_y + Bv_y.$$

A lo largo de C',

$$\frac{L}{dt} = a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} = A\frac{du}{dt} + B\frac{dv}{dt},$$

de modo que, por (17c),

(18b) $$\int_{+C} L = \int_{a}^{\beta} \frac{L}{dt}\,dt = \int_{a}^{\beta} A\,du + B\,dv = \int_{+C'} L.$$

Aplicando el teorema de la divergencia (16) a la región R' en el plano u, v, se encuentra que

(18c) $$\int_{C'} L = \iint_{R'} dL,$$

donde, en analogía con (17b),

$$dL = (B_u - A_v)\, du\, dv.$$

Se verifica inmediatamente que[1]

$$\begin{aligned} b_x - a_y &= (Au_y + Bv_y)_x - (Au_x + Bv_x)_y \\ &= (A_u u_x + A_v v_x)u_y + (B_u u_x + B_v v_x)v_y - (A_u u_y + A_v v_y)u_x \\ &\qquad - (B_u u_y + B_v v_y)v_x \\ &= (B_u - A_v)\,(u_x v_y - u_y v_x). \end{aligned}$$

Así, de (18b, c) y (16), se concluye que

$$(19) \quad \iint_{R'} dL = \iint_{R'} (B_u - A_v)\, du\, dv = \iint_R dL$$
$$= \iint_R (b_x - a_y)\, dx\, dy = \iint_R (B_u - A_v) \frac{d(u, v)}{d(x, y)}\, dx\, dy.$$

Esta fórmula contiene la *ley de transformación general*

$$(20) \qquad \iint_{R'} f(u, v)\, du\, dv = \iint_R f(u\,(x, y), v\,(x, y)) \frac{d(u, v)}{d(x, y)}\, dx\, dy$$

para las integrales dobles [ver (16b), p. 459]. Sólo tienen que elegirse las funciones A, B en (19) de tal manera que $A = 0$ y $B_u = f(u, v)$. Esto significa que para v fija la función B será alguna integral indefinida de $f\,(u, v)$ como una función de u solamente:

$$B(u, v) = \int_{g(v)}^{u} f(w, v)\, dw + h(v),$$

donde $h(v)$ es arbitraria y $g(v)$ se elige de tal manera que el punto $(g(v), v)$ esté en R'. Para la función especial $f = 1$, la fórmula (20) proporciona una expresión para el área de la región imagen como una integral doble:

[1] Se llega a esta fórmula sin cálculo algebraico alguno, si se usa el hecho, probado en la p. 373, de que puede formarse dL para una forma L sin hacer referencia a sistema coordenado alguno; de aquí que, por (56c), p. 359.

$$b_x - a_y = \frac{dL}{dx\,dy} = \frac{dL}{du\,dv}\,\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = (B_u - A_v)\,\frac{d(u, v)}{d(x, y)}$$

(20a) $$\iint_{R'} du\, dv = \iint_R \frac{d(u, v)}{d(x, y)}\, dx\, dy$$

Esencialmente, la fórmula (20) *expresa el hecho de que la integral doble de una forma diferencial de segundo orden* $\omega = f\, du\, dv$ *no se altera bajo cambios de las variables independientes.* Este hecho se prueba aquí expresando ω como la derivada, dL, de una forma de primer orden, L, reduciendo la integral doble a una integral de línea por medio del teorema de la divergencia y aplicando la invariancia de una integral de línea $\int L$.

b. Transformación de las integrales y grado de la aplicación

Resulta interesante observar lo que sucede a la fórmula de transformación (20) cuando la aplicación

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

ya no es biunívoca y cuando su jacobiano no es necesariamente positivo. Primero, observemos el caso en donde la aplicación de R sobre R' es biunívoca pero el jacobiano es negativo en toda la cerradura de R. La única diferencia en el argumento que condujo a (20) es que ahora $+C$ y $+C'$ tienen orientaciones opuestas: si incrementar los valores del parámetro t sobre C' significa dejar R' a la izquierda, entonces incrementar t sobre C significa dejar R a la derecha. Al aplicar el teorema de la divergencia (16) se supone que la frontera de la región bidimensional está orientada de modo que la región se encuentra en el lado positivo (izquierdo) de la frontera. El resultado es que la fórmula (20)[1] se tiene que remplazar por

(20b) $$\iint_{R'} f\, du\, dv = -\iint_R f \frac{d(u, v)}{d(x, y)}\, dx\, dy.$$

[1]La fórmula (20) se aplica sin cambios si las propias regiones bidimensionales R y R' se consideran como variedades orientadas. En ese caso el signo de una integral sobre la variedad cambia cuando se invierte la orientación de ésta. Un jacobiano negativo para la aplicación implica que R y R' tienen orientaciones opuestas, de modo que persiste la fórmula (20) si se escribe como

$$\iint_{+R'} f\, du\, dv = \iint_{+R} f\, \frac{d(u, v)}{d(x, y)}\, dx\, dy.$$

En lugar de orientar las regiones también puede remplazarse el jacobiano por su valor absoluto, como en la fórmula (16b) en la p. 459.

Pueden combinarse las fórmulas (20) y (20b) en una sola fórmula válida siempre que la aplicación de (x, y) sobre (u, v) es uno a uno y el jacobiano es de signo constante:

$$\iint f\varepsilon_R \, du \, dv = \iint_R f \frac{d(u, v)}{d(x, y)} \, dx \, dy. \tag{21}$$

Aquì la integral del primer miembro debe extenderse sobre el plano u, v completo y la función $\varepsilon_R = \varepsilon_R(u, v)$ se define como

$$\varepsilon_R(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } (u, v) \text{ no es la imagen de un punto de } R \\ \operatorname{sgn} \dfrac{d(u, v)}{d(x, y)} & \text{si } (u, v) \text{ es la imagen de un punto de } R. \end{cases}$$

Más generalmente, considérese el caso en que la aplicación de R no es necesariamente uno a uno. Supóngase que R se puede dividir en subconjuntos R_i, cada uno de los cuales se aplica biunívocamente y en cada uno de los cuales el jacobiano es de signo constante, ε_{R_i}. Entonces

$$\begin{aligned} \iint_R f \frac{d(u, v)}{d(x, y)} \, dx \, dy &= \sum_i \iint_{R_i} f \frac{d(u, v)}{d(x, y)} \, dx \, dy \\ &= \sum_i \iint f\varepsilon_{R_i} \, du \, dv = \iint f\chi_R \, du \, dv. \end{aligned}$$

Aquí la última integral se extiende sobre el plano u, v completo y la función χ_R representa

$$\chi_R(u, v) = \sum_i \varepsilon_{R_i}(u, v).$$

Cada término $\varepsilon_{R_i}(u, v)$, cuando (u, v) es imagen de un punto de R_i, es igual al signo del jacobiano en el punto. De aquí que la función $\chi_R(u, v)$, *el grado de la aplicación de* R en el punto (u, v), es el exceso del número de puntos de R con imagen (u, v) para los cuales $d(u, v)/d(x, y)$ es positivo sobre el número de aquellos puntos para los cuales $d(u, v)/d(x, y) < 0$. Con esta definición de $\chi_R(u, v)$ la fórmula de transformación para la integral se convierte en

$$\iint f(u, v) \, \chi_R(u, v) \, du \, dv = \iint_R f(u(x, y), v(x, y)) \frac{d(u, v)}{d(x, y)} \, dx \, dy. \tag{22}$$

Tomando f igual a 1 se obtiene la fórmula

(23) $$\iint_R \frac{d(u, v)}{d(x, y)}\, dx\, dy = \iint \chi_R(u, v)\, du\, dv,$$

la cual generaliza la fórmula (20a) al caso de aplicaciones con jacobiano no nulo y que no necesariamente son biunívocas.

Como ejemplo, considérese la aplicación

(24a) $$u = e^x \cos y, \qquad v = e^x \operatorname{sen} y,$$

para la cual

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = e^{2x} > 0$$

para todo (x, y). Usando las coordenadas polares r, θ en el plano u, v, definidas por $u = r\cos\theta$, $v = r\operatorname{sen}\theta$, se ve que la imagen del punto (x, y) es el punto con las coordenadas polares $r = e^x$, $\theta = y$. Ahora bien, sea R el rectángulo

(24b) $$0 < x < \log 2, \qquad -\frac{3}{2}\pi < y < \frac{3}{2}\pi.$$

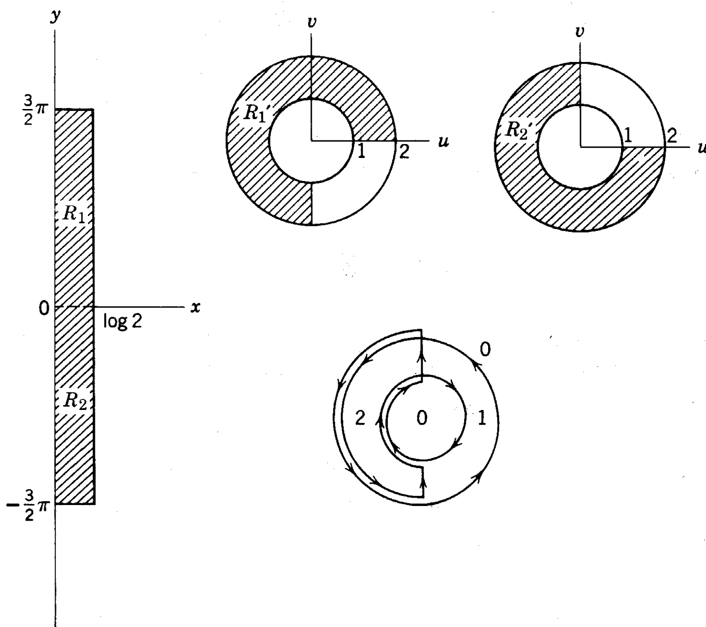


Figura 5.5 Grado de la aplicación $u = e^x \cos y$, $v = e^x \operatorname{sen} y$ aplicada al rectángulo $0 < x < \log 2$, $|y| < 3/2\,\pi$.

Los puntos imagen están en la corona $1 < r < 2$ (ver la Fig. 5.5). Los puntos de la corona con $u < 0$ son cubiertos dos veces por la imagen de R (se les pueden asignar ángulos polares entre $\pi/2$ y $3\pi/2$, o bien, entre $-\pi/2$ y $-3\pi/2$). Los otros puntos de la corona son cubiertos una vez. De aquí que

$$\chi_R(u, v) = \begin{cases} 0 \text{ para } 0 \leqq r \leqq 1 \text{ ó } r \geqq 2 \\ 2 \text{ para } 1 < r < 2 \text{ y } u < 0 \\ 1 \text{ para } 1 < r < 2 \text{ y } u \geqq 0. \end{cases}$$

Aquí, como cada mitad de la corona $1 < r < 2$ tiene área $3\pi/2$, se tiene

$$\iint \chi_R(u, v)\, du\, dv = 2\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \frac{3}{2}\pi = \frac{9}{2}\pi.$$

Alternativamente, por cálculo directo,

$$\iint_R \frac{d(u, v)}{d(x, y)}\, dx\, dy = \int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} dy \int_0^{\log 2} e^{2x}\, dx = 3\pi \int_0^{\log 2} e^{2x}\, dx = \frac{9}{2}\pi.$$

Se tiene la notable identidad

$$\chi_R(u, v) = \mu_C(u, v) \tag{25a}$$

entre el número (con signo) de veces $\chi_R(u, v)$ que la imagen R' de R cubre al punto (u, v) y el número de veces $\mu_C(u, v)$ que la imagen C' de C describe una vuelta alrededor del punto (u, v). Aquí se determina el número de vueltas de acuerdo con la definición dada en el Volumen I (p. 431). Suponiendo que tanto el sistema de coordenadas x, y como el u, v son derechos, se da a C el sentido positivo con respecto a R, lo que corresponde a dejar R a la izquierda. Si sobre cualquier porción γ de C este sentido es el de los valores crecientes de algún parámetro t, también se orienta la porción correspondiente γ' de C' de acuerdo con la t creciente. Entonces, el número de veces que C' da vueltas alrededor de un punto (u_0, v_0) que no esté en C' es la diferencia — denotada aquí por $\mu_C(u_0, v_0)$ — entre el número de veces que C' cruza el rayo $u = u_0$, $v > v_0$ de derecha a izquierda y el número de veces que lo cruza de izquierda a derecha, recorriendo C' en el sentido que se le haya asignado.

Evidentemente, ambos miembros en la ecuación (25a) son *aditivos* por definición; es decir, dividiendo R en un número finito de subregiones R_i con curvas frontera C_i se tiene

$$\chi_R(u, v) = \sum_i \chi_{R_i}(u, v), \qquad \mu_C(u, v) = \sum_i \mu_{C_i}(u, v).$$

De donde, para demostrar (25a) basta con probar que

(25b) $$\chi_{R_i}(u, v) = \mu_{C_i}(u, v)$$

para cualquier porción R_i de R que se aplique biunívocamente en el plano u, v y en la que el jacobiano $d(u, v)/d(x, y)$ tenga un signo constante ε_{R_i}. Supóngase que R_i tiene la curva frontera C_i y sea R_i' la imagen de R_i, C'_i la de C_i. Resulta obvio que para cualquier (u, v) que no esté sobre C_i,

$$\chi_{R_i}(u, v) = \begin{cases} \varepsilon_{R_i} & \text{para } (u, v) \text{ en } R_i \\ 0 & \text{para } (u, v) \text{ exterior a } R_i. \end{cases}$$

Es más, C_i es una curva simple cerrada cuya orientación está en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj para $\varepsilon_{R_i} > 0$, en el mismo sentido de ese movimiento para $\varepsilon_{R_i} < 0$ (ver la Sección 3.3e, p. 307). Por tanto, el número de veces que C_i encierra al punto (u, v) también es ε_{R_i} cuando (u, v) está en el interior de C_i y es 0 cuando (u, v) está fuera de C_i, lo cual prueba (25b).

Para el ejemplo de la p. 626, la identidad de $\chi_R(u, v)$ y $\mu_C(u, v)$ es inmediata por inspección (ver la Fig. 5.5).

5.5 Derivación de área. Transformación de Δu a coordenadas polares

En la p. 443 se definió la noción de *derivación en el espacio* de una integral triple. En dos dimensiones se trata el concepto correspondiente de *derivación de área* de una integral doble

(26) $$M(R) = \iint_R \rho(x, y)\, dx\, dy.$$

Aquí se supone que $\rho(x, y)$ es una función continua definida en un conjunto abierto S del plano x, y. Entonces, con cualquier subconjunto R (mensurable según Jordan y cerrado) de S puede asociarse, a través de la fórmula (26), un valor $M = M(R)$. Denotemos por $A(R)$ el área de R:

$$A(R) = \iint_R dx\, dy.$$

Por el teorema del valor medio (p. 440) se sabe que el cociente

$$\frac{M(R)}{A(R)}$$

está entre el supremum y el infimum de $\rho(x, y)$ en R. Se deduce que en un punto (x_0, y_0) de S,

$$\rho(x_0, y_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{M(R_n)}{A(R_n)}, \tag{27}$$

donde los R_n constituyen cualquier sucesión de subconjuntos de S que tienen área $A(R_n)$, contienen al punto (x_0, y_0) y tienen diámetros que tienden a 0 cuando $n \to \infty$. El límite es análogo a la derivación en una dimensión. A ρ se le dará el nombre de *derivada de área* de M con respecto a A.

Físicamente, puede interpretarse la forma diferencial $\rho(x, y)$ $dx\,dy$ (al menos $\rho > 0$) como el elemento de masa de una cierta distribución de masa en el plano, representando la integral $M(R)$ la *masa total* contenida en el conjunto R. Entonces la ecuación (27) indica que $\rho(x, y)$ se puede obtener como el límite de las masas de los conjuntos R_n divididas entre sus áreas, a medida que los R_n se reducen hasta el punto (x, y). Dado el nombre de *densidad promedio* de la distribución de masa en el conjunto R_n, a $M(R_n)/A(R_n)$, se define $\rho(x, y)$ como la *densidad* en (x, y), o como la *masa por unidad de área*. En una interpretación física diferente, no restringida a ρ, positiva, puede concebirse $\rho\, dx\, dy$ como el *elemento de carga eléctrica*, $M(R)$ como la *carga total en* R y $\rho(x, y)$ como la *densidad de carga* o *carga por unidad de área*.

En una aplicación

$$\bar{x} = \bar{x}(x, y), \quad \bar{y} = \bar{y}(x, y)$$

de los puntos (x, y) del plano sobre los puntos $(\bar{x}, \bar{y})$, el área de la imagen $\bar{R}$ de un conjunto R está dada por

$$A(\bar{R}) = \iint_{\bar{R}} d\bar{x}\, d\bar{y} = \iint_R \frac{d(\bar{x}, \bar{y})}{d(x, y)}\, dx\, dy$$

[ver la fórmula (20a)]. Es evidente que aquí el jacobiano

$$\frac{d(\bar{x}, \bar{y})}{d(x, y)} = \lim_{n\to\infty} \frac{A\,(\bar{R}_n)}{A\,(R_n)}$$

es *la derivada de área del área de la región imagen con respecto al área de la región original.*

Imaginemos ahora que se cubre el plano por medio de un material elástico deformable, donde (x, y) es la posición de una partícula del material en un cierto instante t y $(\bar{x}, \bar{y})$ es la posición de la misma partícula en un instante posterior $\bar{t}$. Sea $\rho(x, y)$ la densidad del material en la posición (x, y) en el instante t y $\bar{\rho}(\bar{x}, \bar{y})$ la densidad en el instante $\bar{t}$ en $(\bar{x}, \bar{y})$. Si se postula que la masa total de las partículas que llenan el conjunto R en el instante t es la misma que la de las mismas partículas en el instante $\bar{t}$ cuando llenan el conjunto $\bar{R}$, entonces

$$M(\bar{R}) = \iint_{\bar{R}} \bar{\rho}\, d\bar{x}\ d\bar{y} = M(R) = \iint_{R} \rho\, dx\ dy.$$

Se concluye que

$$\bar{\rho} = \lim_{n\to\infty} \frac{M(\bar{R}_n)}{A(\bar{R}_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{M(\bar{R}_n)}{A(R_n)}\, \frac{A(R_n)}{A(\bar{R}_n)} = \frac{\rho}{d(\bar{x}, \bar{y})/d(x, y)}.$$

De aquí que las densidades de masa en las aplicaciones $(\bar{x}, \bar{y}) \to (x, y)$ se transforman de acuerdo con la regla

$$\rho = \bar{\rho}\, \frac{d(\bar{x}, \bar{y})}{d(x, y)}. \tag{28}$$

Esta ecuación, escrita como una relación entre formas diferenciales (ver la p. 308), enuncia precisamente la *ley de conservación de los elementos de masa:*

$$\rho\, dx\, dy = \bar{\rho}\, d\bar{x}\, d\bar{y}. \tag{28a}$$

Aplicando la noción de derivación de área es posible transformar la expresión $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ a nuevas coordenadas, por ejemplo, a coordenadas polares (r, θ). Con este fin se aplica la fórmula

$$\iint_R \Delta u\, dx\, dy = \int_C \frac{du}{dn}\, ds,$$

que se obtiene del teorema de Green [ver (15), p. 620] si se pone $w = 1$. Si se lleva a cabo la derivación de área usando una sucesión de conjuntos R_n con fronteras C_n que se contraen hasta el punto (x, y), se encuentra que

(29)
$$\Delta u = \lim_{u \to \infty} \frac{1}{A(R_n)} \int_{C_n} \frac{du}{dn}\, ds$$

Por lo tanto, para transformar Δu a otras coordenadas sólo se tiene que aplicar la transformación correspondiente a la integral de línea $\int (du/dn)\, ds$, dividir entre el área y realizar el paso al límite. La ventaja sobre el cálculo directo es que no se necesita llevar a cabo el cálculo un tanto complicado de la *segunda* derivada de u, ya que sólo se presentan las primeras derivadas en la integral de línea.

Como un ejemplo importante, se realizará la transformación de Δu a las coordenadas polares (r, θ). Como R_n elíjase una pequeña malla de la red coordenada polar,[1] digamos aquélla entre los círculos r y $r + h$ y las rectas θ y $\theta + k$, cuya área, como se sabe, tiene el valor

$$A(R_n) = kh\left(r + \frac{1}{2} h\right).$$

Las primeras derivadas se transforman de acuerdo con las fórmulas

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r} u\,(r \cos \theta,\ r \operatorname{sen} \theta) = \frac{1}{r}\,(xu_x + yu_y)$$

$$u_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} u\,(r \cos \theta,\ r \operatorname{sen} \theta) = -\, yu_x + xu_y.$$

Sobre un círculo $r =$ constante los cosenos directores de la normal (que apunta en la dirección de r creciente) son x/r, y/r, y, por tanto, $du/dn = u_r$, mientras que $ds = r\, d\theta$. Sobre un rayo $\theta =$ constante, los cosenos directores de la normal (que apunta en la dirección de θ creciente) son $-y/r$, x/r, y, en consecuencia, $du/dn = u_\theta/r$, mientras que $ds = dr$. Así, tomando la integral de la derivada de u en la dirección de la *normal hacia afuera* a lo largo de la frontera C_n de R_n, se encuentra que

$$\int_{C_n} \frac{du}{dn}\, ds = \int_\theta^{\theta+k} [(r + h)u_r\,(r + h, \theta) - ru_r\,(r, \theta)]\, d\theta$$

$$+ \int_r^{r+h} \frac{1}{r}\, [u_\theta(r, \theta + k) - u_\theta(r, \theta)]\, dr$$

$$= \int_\theta^{\theta+k} d\theta \int_r^{r+h} [ru_r(r, \theta)]_r\, dr$$

[1] Aquí se supone que h y k tienden a 0 cuando $n \to \infty$.

$$+ \int_r^{r+h} dr \int_\theta^{\theta+k} \left[\frac{1}{r} u_\theta(r, \theta)\right]_\theta d\theta$$

$$= \iint_{R_n} \left[\frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} u_\theta\right)_\theta\right] r \, dr \, d\theta.$$

Como aquí, por la fórmula para el área en coordenadas polares (p. 455 y siguientes),

$$A(R_n) = \iint_{R_n} r \, dr \, d\theta,$$

de (29) se encuentra que

$$(30) \qquad \Delta u = \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} u_\theta\right)_\theta = u_{rr} + \frac{1}{r} + u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta},$$

que es la fórmula de transformación requerida.

Esta fórmula sugiere algunas importantes soluciones especiales de la ecuación diferencial de Laplace $\Delta u = 0$. Por (30), las soluciones de esta ecuación que sólo dependan de —r es decir, que sean de la forma $u = f(r)$— deben satisfacer la condición

$$\frac{1}{r}[rf'(r)]_r = 0,$$

la cual conduce a $rf'(r) =$ constante $= a$, o bien, a

$$(31a) \qquad u = f(r) = a \log r + b = a \log \sqrt{x^2 + y^2} + b,$$

donde a y b son constantes. De modo semejante, se encuentra que la solución general de la ecuación de Laplace, que sólo depende de θ, tiene la forma

$$(31b) \qquad u = c\theta + d = c \arctan \frac{y}{x} + d,$$

con las constantes c y d.

5.6 Interpretación de las fórmulas de Gauss y de Stokes mediante flujos bidimensionales

Los teoremas sobre integrales que se han presentado encuentran su interpretación más natural en términos del movimiento de un

líquido en el plano x, y. El movimiento se describe en todo momento por medio de su campo de velocidad.[1] La partícula que ocupa la posición (x, y) en el instante t tendrá el vector velocidad $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.

Si la velocidad del líquido es independiente de x, y, t, el líquido que cruza un segmento rectilíneo I durante el intervalo de tiempo desde t hasta $t + dt$ llena en el instante $t + dt$ un paralelogramo de área $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, s\, dt$, donde s es la longitud de I y $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a I que apunta hacia el lado de I hacia el cual el líquido cruza (ver la Fig. 5.6).[2] Si, por el contrario, se elige arbitrariamen-

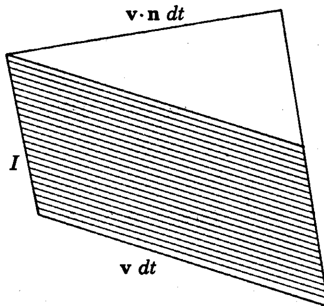


Figura 5.6 Cantidad de líquido que cruza el segmento I en el tiempo dt para un flujo uniforme de velocidad $\mathbf{v}$.

te como $\mathbf{n}$ cualquiera de los dos vectores unitarios normales a I, entonces $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) s\, dt$ es el área llenada por el líquido que cruza I en el intervalo de tiempo de t hasta $t + dt$, considerada positiva si el líquido cruza hacia el lado al cual apunta $\mathbf{n}$ y negativa en caso contrario. Si ρ es la densidad del líquido, entonces $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, \rho\, s\, dt$ es la *masa* del líquido que cruza I hacia el lado al cual apunta $\mathbf{n}$.

Sea C una curva en el plano x, y. A lo largo de C selecciónese ar-

1 Puede imaginarse el movimiento en el plano x, y como parte de un movimiento en el espacio x, y, z en el cual la velocidad de cualquier partícula es paralela al plano x, y y es independiente de la coordenada z.

2 El paralelogramo es formado por los puntos $(\bar{x}, \bar{y})$ para los cuales el segmento con puntos extremos $(\bar{x}, \bar{y})$ y

$$(x, y) = (\bar{x} - v_1\, dt, \bar{y} - v_2\, dt)$$

tiene puntos en común con I.

bitrariamente uno de los dos vectores unitarios normales posibles y denótese por $\mathbf{n}$. En un flujo con velocidad y densidad dependientes de x, y, t, la integral

$$\int_C (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\rho \, ds \tag{32a}$$

representa la masa del líquido que cruza C en la unidad de tiempo hacia ese lado de C al cual apunta $\mathbf{n}$. Esto se deduce inmediatamente aproximando C por medio de un polígono y el flujo original por otro flujo para el cual la velocidad sea constante a través de cada lado del polígono.

Si C es la frontera de una región R y si $\mathbf{n}$ es el vector normal dirigido hacia afuera, la integral representa la masa del líquido que *sale de* R en la unidad de tiempo.[1] Aplicando el teorema de la divergencia en la forma (7), p. 616, puede expresarse el flujo a través de C como una integral doble:

$$\int_C (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, \rho \, ds = \int_C (\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_R \operatorname{div} (\rho\mathbf{v}) \, dx \, dy. \tag{32b}$$

Puede compararse este flujo de masa a través de C saliendo de R, con el cambio de la masa contenida en R. La masa total del líquido contenido en R en el instante t es[2]

$$\iint_R \rho \, dx \ dy.$$

Por tanto, en la unidad de tiempo hay una pérdida de la masa contenida en R dada por la cantidad

$$-\frac{d}{dt}\iint_R \rho(x, y, t)\, dx \, dy = -\iint \rho_t(x, y, t)\, dx \, dy.$$

Si se supone que se conserva la masa, entonces sólo puede perderse masa de R a través de la frontera C. De aquí que, por (32b), se debe tener

[1] Esta será una cantidad negativa si el flujo neto es *hacia* R.

[2] Generalmente, ésta es una función de t, puesto que se permite que $\rho = \rho(x, y, t)$ varíe con t. En la consideración presente se mantienen fijas la región R y su frontera C

$$\text{(32c)} \qquad \iint_R \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})\, dx\, dy = -\iint_R \rho_t\, dx\, dy.$$

Esta identidad se cumple para regiones arbitrarias R. Dividiendo entre el área de R y reduciendo esta región hasta un punto (es decir, por derivación de área), en el límite se encuentra que

$$\text{(33)} \qquad \rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

(ver la Sección 4.6, Ejercicio 15). Esta ecuación diferencial[1] y y la relación integral (32c) expresa la *ley de conservación de la masa* en el flujo. En términos de las componentes v_1, v_2 del vector velocidad, (33) se puede escribir como

$$\text{(33a)} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) = 0.$$

Se tiene un importante caso especial de esta ecuación cuando se trata con un medio *homogéneo incompresible,* en el que ρ tiene un valor constante independiente de la posición y del tiempo. En ese caso las ecuaciones (33) o (33a) se reducen a una ecuación para el vector velocidad únicamente:

$$\text{(34)} \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0.$$

De (32b) se deduce que la cantidad total de un líquido incompresible que cruza una curva cerrada C en la unidad de tiempo es 0:

$$\text{(35)} \qquad \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, ds = 0.$$

El teorema de Stokes (9), p. 617, aplicado al vector $\mathbf{v}$ también tiene una interpretación en términos del movimiento de un fluido. La integral extendida sobre una curva orientada cerrada, C,

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}\, ds,$$

donde $\mathbf{t}$ es el vector unitario tangente que corresponde a la orientación de C, se llama la circulación del fluido alrededor de C. Por el teorema de Stokes, la circulación es igual a la doble integral

[1] En mecánica, a menudo llamada la *ecuación de continuidad.*

$$\iint_R (\text{rot } \mathbf{v})_z \, dx \, dy$$

sobre la región encerrada R. De aquí que la cantidad

$$(36) \qquad (\text{rot } \mathbf{v})_z = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y},$$

llamada *vorticidad* del movimiento, mide la *densidad de la circulación* en el punto (x, y), en el sentido de que la integral de área de la vorticidad da la circulación alrededor de la frontera.

Se dice que un flujo es *irrotacional* si la vorticidad se anula en todo punto, es decir, si

$$(37) \qquad \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0.$$

Por el teorema de Stokes, la circulación alrededor de una curva cerrada, C, se anula si C es la frontera de una región en donde el movimiento es irrotacional. Como (37) es la condición para que $v_1 dx + v_2 dy$ sea una diferencial exacta (ver la p. 135), para un flujo irrotacional en toda región simplemente conexa existe una función $\varphi = \varphi(x, y, t)$ tal que

$$(38) \qquad v_1 = -\varphi_x, \qquad v_2 = -\varphi_y.$$

El escalar φ (que está determinado hasta una constante) se llama *potencial de velocidad.* En notación vectorial las ecuaciones (38) pueden remplazarse por la ecuación única

$$(38a) \qquad \mathbf{v} = -\text{grad } \varphi.$$

El movimiento irrotacional de un líquido homogéneo incompresible satisface tanto la ecuación (37) como la (34). Sustituyendo v_1 y v_2 en (34) por sus expresiones dadas en (38), se encuentra que el *potencial de velocidad es una solución de la ecuación de Laplace:*

$$\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0.$$

Como ejemplo, considérese el flujo que corresponde a la solución

$$\varphi = a \log r = a \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

de la ecuación de Laplace [(ver (31a), p. 569]. Por (38), el vector velocidad $\mathbf{v}$ tiene las componentes

$$v_1 = -\frac{ax}{r^2}, \qquad v_2 = -\frac{ay}{r^2}$$

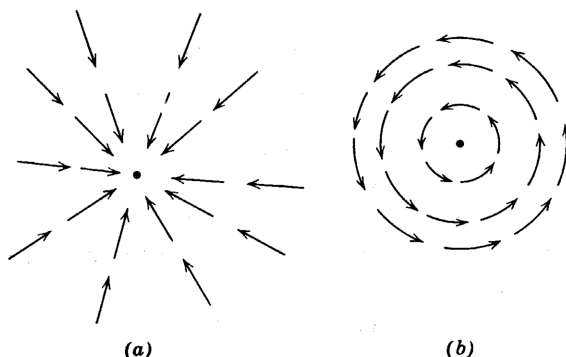


Figura 5.7 (a) Flujo con sumidero. (b) Flujo con vórtice.

y es singular en el origen (ver la Fig. 5.7a). Todos los vectores velocidad apuntan hacia el origen para $a > 0$, y en sentido opuesto para $a < 0$. En este ejemplo, la velocidad del líquido en una posición dada no cambia con el tiempo, aunque se tienen velocidades diferentes en puntos diferentes; se dice que se trata de un *flujo estacionario.* La circulación alrededor de cualquier curva cerrada C que no pasa por el origen se anula, puesto que

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}\, ds = \int_C v_1\, dx + v_2\, dy = -\int_C d\varphi = 0.$$

Por otra parte, la cantidad de líquido que sale a través de la curva cerrada C en la unidad de tiempo es

$$\begin{aligned}\rho \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, ds &= \rho \int_C \left(v_1 \frac{dx}{dn} + v_2 \frac{dy}{dn}\right) ds = \rho \int_C v_1\, dy - v_2\, dx \\ &= -a\rho \int_C \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2} = -a\rho \int_C d\theta,\end{aligned}$$

donde θ es el ángulo polar desde el origen. Ya que (ver la p. 354)

$$\frac{1}{2\pi}\int_C d\theta$$

es un entero que mide el número de veces que C encierra al origen, se ve que si la curva cerrada C es simple no pasa por el origen y está orientada en sentido contrario del movimiento de las manecillas del reloj,

$$\rho\int_C \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,ds = \begin{cases} 0 \text{ si } C \text{ no encierra al origen} \\ -2\pi a\rho \text{ si } C \text{ encierra al origen} \end{cases}$$

Por lo tanto, la misma cantidad de masa fluye en la unidad de tiempo a través de toda curva simple cerrada, C, que encierre al origen. Para $a > 0$, el origen es un *sumidero* donde la masa desaparece a la rapidez de $2\pi a\rho$ unidades en la unidad de tiempo. Para $a < 0$ se tiene una *fuente* de masa en el origen.

Se encuentra el comportamiento opuesto si se considera el flujo estacionario con potencial de velocidad [ver (31b), p. 632]

$$\varphi = c\theta = c \text{ arc tan } \frac{y}{x}.$$

Mientras que la propia φ es una función multiforme, el campo de velocidad correspondiente tiene componentes uniformes

$$v_1 = \frac{cy}{r^2}, \quad v_2 = -\frac{cx}{r^2}.$$

El vector $\mathbf{v}$ es perpendicular a los radios que parten del origen (Fig. 5.7b). Nuevamente, el campo de velocidades es singular en el origen.

La circulación alrededor de una curva cerrada, C, tiene el valor

$$\int_C v_1\,dx + v_2\,dy = -\int_C d\varphi = -c\int_C d\theta.$$

De aquí que la circulación es cero para una curva simple cerrada que no encierre al origen. Para una curva simple cerrada que dé vuelta alrededor del origen en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, se encuentra el valor $-2\pi c$ para la circulación. Esto corresponde a un *vórtice de intensidad* $-2\pi c$ concentrado en el origen. Por otra parte, el flujo de masa en la unidad de tiempo a

través de cualquier curva cerrada, C, que no pase por el origen es 0, ya que aquí

$$\begin{aligned}\rho \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, ds &= \rho \int_C v_1\, dy - v_2\, dx \\ &= c\rho \int_C \frac{x\, dx + y\, dy}{x^2 + y^2} \\ &= c\rho \int_C \frac{dr}{r} = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, el origen no es una fuente o un sumidero de masa

5.7 Orientación de superficies

La teoría de la integración para tres variables independientes no sólo incluye a las integrales triples y a las integrales de línea, que se han discutido previamente, sino también el concepto de *integral de superficie*. Con el fin de explicar esto último, empecemos con algunas consideraciones de naturaleza general, las cuales, al mismo tiempo, servirán para refinar nuestras ideas anteriores relacionadas con las integrales dobles. Al tratar las integrales de una diferencial sobre una curva C en el plano o en el espacio (p. 118), se encontró necesario no sólo considerar a C como un conjunto de puntos en el espacio sino asignarle un cierto *sentido* u *orientación*. Lo mismo se cuemple cuando se consideran integrales de formas diferenciales sobre superficies en el espacio de tres o más dimensiones. De modo semejante, la definición de integrales de formas diferenciales de tercer orden sobre variedades tridimensionales requiere una definición de orientación para esas variedades. Al discutir este concepto topológico de orientación nos restringiremos a las situaciones más sencillas de curvas, superficies, etc., que se encuentren en un espacio euclidiano de cualquier dimensión y posean representaciones paramétricas suaves en una vecindad lo suficientemente pequeña de cualquier punto.

a. Orientación de superficies bidimensionales en el espacio tres

En la Sección 3.4 se describieron las superficies en el espacio tridimensional por medio de sus representaciones paramétricas. En lo que sigue se usa la noción un tanto más refinada de superficie, que considera a ésta como un conjunto de puntos en el espacio que existe independientemente de cualquier representación paramétrica par-

ticular y que para su descripción completa incluso puede requerir de varios sistemas de parámetros. Se define una superficie bidimensional, S, como un conjunto de puntos en el espacio x, y, z con *representaciones locales regulares* por medio de dos parámetros. Es decir, en una vecindad de cualquier punto P_0 de S los vectores de posición $\mathbf{X} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ de los puntos P de S son representables en la forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v) \tag{39a}$$

donde los parámetros u, v varían sobre un conjunto abierto γ en el plano u, v y (u, v) diferentes corresponden a puntos diferentes sobre S. Además, se requiere que la representación (39a) sea *regular,* en el sentido de que el vector $\mathbf{X}(u, v)$ tengan derivadas $\mathbf{X}_u = (x_u, y_u, z_u)$ y $\mathbf{X}_v = (x_v, y_v, z_v)$ con respecto a u, v en γ que sean continuas y linealmente independientes.[1] La independencia de los vectores $\mathbf{X}_u$, $\mathbf{X}_v$ se expresa algebraicamente por la condición [ver la fórmula (40d), p. 327]

$$\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v \neq 0, \tag{39b}$$

o por

$$\Gamma(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v) = \begin{vmatrix} \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u & \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v \\ \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_u & \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_v \end{vmatrix} = |\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|^2 > 0, \tag{39c}$$

donde Γ denota el determinante de Gram de los vectores $\mathbf{X}_u$, $\mathbf{X}_v$ [ver la p. 232 y la fórmula (45a), p. 332].

Los vectores $\mathbf{X}_u(u, v)$ y $\mathbf{X}_v(u, v)$ en un punto $P = \mathbf{X}(u, v)$ de S con parámetros u, v, son tangenciales a S en P y "generan" el plano tangente $\pi(P)$ de S en P; es decir, todo punto del plano tangente tiene un vector de posición de la forma

---

[1] Incluso para una superficie tan simple como una esfera, no puede esperarse encontrar una *sola* representación paramétrica regular para la superficie completa. Por esa razón sólo se requiere la existencia de representaciones *locales* para S. Incidentalmente, se excluyen las superficies que tienen aristas y vértices, donde no es posible representación local *regular* alguna (por ejemplo, los cubos).

Con mayor generalidad, una superficie m dimensional (simple) en el espacio n dimensional $x_1, \ldots, x_n$ se define como un conjunto de puntos con representaciones paramétricas locales de la forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(u_1, \ldots, u_m),$$

donde las primeras derivadas del vector $\mathbf{X}$ con respecto a las variables u_k son continuas y linealmente independientes.

$$\mathbf{X}(u, v) + \lambda \mathbf{X}_u(u, v) + \mu \mathbf{X}_v(u, v),$$

con las constantes apropiadas λ, μ (ver la p. 180]. Se *orienta* la superficie S asignando una orientación a cada uno de los planos tangentes de S *en una forma continua.* Se dará un significado preciso a esta proposición. Un plano tangente orientado $\pi^*(P)$ se obtiene a partir del plano $\pi(P)$ especificando una pareja *ordenada* de vectores independientes $\boldsymbol{\xi}(P)$ y $\boldsymbol{\eta}(P)$ en $\pi(P)$. Entonces la orientación de π^* es la de la pareja ordenada $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ o, simbólicamente,[1]

$$\Omega(\pi^*(P)) = \Omega(\boldsymbol{\xi}(P), \boldsymbol{\eta}(P)). \tag{40a}$$

Cualquier otra pareja ordenada de vectores tangenciales independientes, $\boldsymbol{\xi}'$, $\boldsymbol{\eta}'$ en P determina la misma orientación si

$$[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\eta}'] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}' & \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}' \\ \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\xi}' & \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta}' \end{vmatrix} > 0; \tag{40b}$$

(ver la p. 237). Más generalmente,

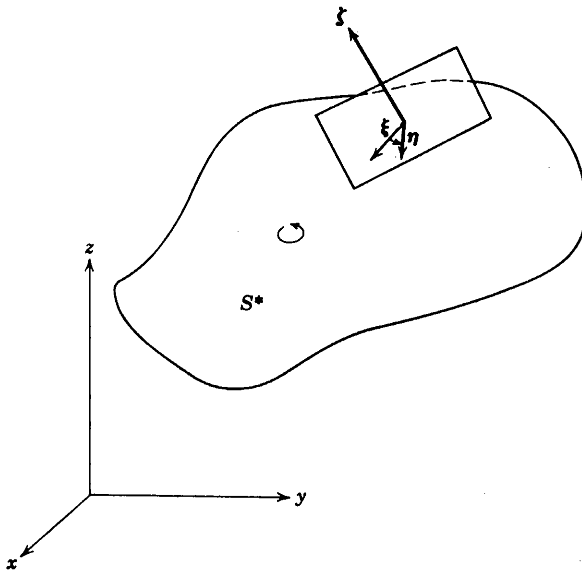


Figura 5.8

[1] Puede concebirse $\Omega(\pi^*(P))$ como un sentido de rotación en el plano $\pi(P)$; a saber, como el sentido de esa rotación en un ángulo menos que 180x que lleva la dirección del vector $\boldsymbol{\xi}$ sobre la del $\boldsymbol{\eta}$.

(40c) $$\Omega(\xi, \eta) = \text{sgn}\,[\xi, \eta; \xi', \eta']\,\Omega(\xi', \eta')$$

La orientación $\Omega(\pi^*)$ puede describirse más fácilmente en términos del vector unitario (ver la Fig. 5.8)

(40d) $$\zeta = \frac{\xi \times \eta}{|\xi \times \eta|}.$$

que es normal a ξ y a η y, por tanto, al plano tangente $\pi(P)$. El vector ζ no depende de la pareja particular de vectores tangenciales ξ, η sino sólo de la orientación determinada por ellos. Esto se deduce de la identidad general para los productos vectoriales[1]

(40e) $$(\xi \times \eta) \cdot (\xi' \times \eta') = \begin{vmatrix} \xi \cdot \xi' & \xi \cdot \eta' \\ \eta \cdot \xi' & \eta \cdot \eta' \end{vmatrix} = [\xi, \eta; \xi', \eta'].$$

Si aquí las parejas ordenadas de vectores tangenciales ξ, η y ξ', η' dan la misma orientación para π, entonces, por (40b), los vectores normales unitarios correspondientes, ζ y ζ' satisfacen

(40f) $$\zeta \cdot \zeta' = \frac{[\xi, \eta; \xi', \eta']}{|\xi \times \eta|\,|\xi' \times \eta'|} > 0.$$

Como ζ y $-\zeta$ son los únicos vectores unitarios normales posibles, de (40f) se deduce que $\zeta' = \zeta$.

Ahora se dice que las orientaciones $\Omega(\pi^*(P))$ determinadas por (40a) a partir de las parejas de vectores tangenciales $\xi(P)$, $\eta(P)$ *varían continuamente* con P si el vector normal unitario ζ dado por (40d) depende continuamente de P. Una *superficie orientada* S se define como una superficie S con planos tangentes $\pi^*(P)$ orientados continuamente. Si la orientación de π^* está dada por (40a), se escribe simbólicamente

(40g) $$\Omega(S^*) = \Omega(\pi^*) = \Omega(\xi, \eta).$$

Cualquier vector normal unitario ζ en un punto P de S determina una orientación del plano tangente $\pi(P)$, a saber, la dada por $\Omega(\xi, \eta)$, donde ξ, η son vectores tangenciales cualesquiera para los cuales $\xi \times \eta$ tiene la dirección de ζ. Por la fórmula (71c), p. 220,

[1] La identidad puede verificarse directamente escribiéndola en términos de las componentes de los vectores que intervienen; ver también el Ejercicio 9b, Sección 2.4, p. 203. La fórmula (39c) es el caso especial $\xi = \xi' = \mathbf{X}_u$, $\eta = \eta' = \mathbf{X}_v$.

(40h) $$\det(\xi, \eta, \zeta) = \zeta \cdot (\xi \times \eta) = |\xi \times \eta| > 0.$$

De aquí que (ver la p. 226) ζ es el vector normal unitario de S en P tal que *la terna de vectores* ζ, ξ, η *está orientada positivamente con respecto a los ejes coordenados;* esto es,

(40i)[1] $$\Omega(\zeta, \xi, \eta) = \Omega(x, y, z).$$

Entonces, dar una orientación de S consiste en elegir en una forma continua un vector normal unitario, ζ, en todos los puntos de S. Aquí ζ está dado por (40d) siempre que $\Omega(S^*) = \Omega(\xi, \eta)$ para la superficie orientada S^*. Se dice que ζ es el vector normal unitario que *apunta hacia el lado positivo* de la superficie orientada S, o que es el *vector normal unitario positivo* de S^*.[2]

Sea S una superficie *conexa,* es decir, una superficie con la propiedad de que dos puntos cualesquiera de S pueden unirse por medio de una curva que se encuentra en S. Entonces fácilmente se ve que S no puede ser orientado en lo absoluto o que existen exactamente dos maneras diferentes de orientarla,[3] porque dos orientaciones de S corresponden a dos elecciones $\zeta(P)$ y $\zeta'(P)$, de vectores normales unitarios sobre S. Aquí, necesariamente $\zeta' = \varepsilon\zeta$, donde $\varepsilon = \varepsilon(P)$ tiene uno de los dos valores $+1$ ó -1. Como, por hipótesis, los vectores ζ y ζ' varían continuamente con P, lo mismo se cumple para el escalar $\varepsilon(P) = \zeta \cdot \zeta'$. Por tanto, ε es una función continua sobre S, que sólo toma los valores $+1$ ó -1. Si $\varepsilon(P) \neq \varepsilon(Q)$ para dos puntos cualesquiera P, Q sobre S, se concluiría, por el teorema del

---

[1] La fórmula (40i) muestra que el sentido de la rotación del plano π asociado con $\Omega(\xi, \eta)$ se ve como si fuera en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj cuando se observa desde el lado de π hacia el cual apunta ζ siempre que el sistema coordenado x, y, z sea derecho. Nótese que la relación entre $\Omega(\xi, \eta)$ y la dirección de ζ depende de la orientación del sistema coordenado usado, dado que el producto vectorial $\xi \times \eta$ depende de esa orientación.

[2] Más generalmente, se dice que cualquier vector no tangencial ζ con punto inicial P *apunta hacia el lado positivo* de S^* si se cumple (40i). Para una superficie "material" orientada, digamos, una delgada hoja metálica, los dos lados de la superficie pueden pintarse de colores distintos. Entonces, la capa de pigmento sobre la cara positiva sólo ocuparía puntos que pueden ser alcanzados partiendo de un punto P de la superficie y moviéndose una corta distancia en la dirección del vector normal positivo de la superficie.

[3] La hipótesis de que S es *conexa* es esencial. Porque en una superficie que consista de varias componentes conexas ajenas, las componentes individuales podrían orientarse independientemente entre sí. En la p. 648 se demostrará que existen superficies que no pueden orientarse en lo absoluto.

valor intermedio, que $\varepsilon = 0$ en algún punto a lo largo de una curva sobre S que vaya de P a Q, lo que es contrario a la definición de ε. Consecuentemente, ε tiene el mismo valor en todos los puntos de S. Por tanto, cualquier orientación de S es la descrita por el vector normal $\zeta(P)$ o bien la descrita por $-\zeta(P)$. Si S^* es la superficie orientada con normal positivo ζ, se escribe $-S^*$ para la superficie que tiene la otra orientación, de modo que

$$\Omega(-S^*) = -\Omega(S^*). \tag{40j}$$

Es obvio que la orientación del vector normal positivo ζ a una superficie conexa S en un solo punto P determina de modo único el vector normal positivo en cualquier otro punto Q y, por tanto, la orientación de S. Sólo se requiere unir Q con P por medio de una curva C sobre S y definir un vector unitario normal a S a lo largo de C que coincida con ζ en P y que varíe continuamente a lo largo de C; entonces el vector normal también coincide en Q con el vector normal positivo.

Es particularmente simple orientar una superficie S que forma la frontera de una región tridimensional R del espacio (aquí S no necesita ser conexa, como en el caso de un cascarón esférico R). En cada punto P de S puede distinguirse un *vector normal interior* que apunta hacia R y un *vector normal exterior* que apunta hacia afuera de R, variando ambos continuamente con P. Tomando el vector normal exterior como normal positivo se define una orientación para S. Se dice que la superficie orientada correspondientes, S^*, está *orientada positivamente con respecto a R.*[1]

[1] Como se definió aquí, la orientación positiva de la frontera S de una región R depende de la orientación del sistema coordenado x, y, z o de la orientación del espacio tres determinada por ese sistema. A menudo resulta más conveniente pensar en R como si también estuviera orientada, y definir sin ambigüedad la frontera orientada S^* de la región conexa orientada R^* en el espacio tres. Aquí, la "orientación" de R^* consiste de una selección particular del sistema coordenado x, y, z, el cual entonces está "orientado positivamente con respecto a R" por definición:

$$\Omega(R^*) = \Omega(x, y, z).$$

La superficie frontera orientada positivamente, S^* de R^* (comúnmente denotada por ∂R^*) se define tal que

$$\Omega(\zeta, \xi, \eta) = \Omega(R^*)$$

siempre que ξ, η sean vectores tangenciales en un punto P de S con $\Omega(S^*) = \Omega(\xi, \eta)$, y que ζ sea el vector unitario normal exterior en P.

Si, por ejemplo, R es el cascarón esférico

$$a \leqq |\mathbf{X}| \leqq b, \tag{40k}$$

la frontera orientada positivamente S^*, de R tiene el vector normal unitario positivo

$$\zeta = -\mathbf{X}/a \quad \text{para} \quad |\mathbf{X}| = a \qquad \text{y} \qquad \zeta = \mathbf{X}/\text{b} \quad \text{para} \quad |\mathbf{X}| = b. \tag{40l}$$

Supóngase que una porción de la superficie orientada S tiene una representación paramétrica regular $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v)$ para (u, v) que varía sobre un conjunto abierto γ del plano u, v. Entonces

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|} \tag{40m}$$

define un vector normal unitario para (u, v) en γ. Si ζ es el vector normal unitario positivo de S^*, se tiene

$$\zeta = \varepsilon \mathbf{Z} \tag{40n}$$

con $\varepsilon = \varepsilon(u, v) = \pm 1$. Como tanto ζ como $\mathbf{z}$ son continuas, se deduce que ε es continua y, por tanto, constante en cualquier parte conexa de γ. Para $\varepsilon = 1$, es decir, para

$$\Omega(S^*) = \Omega(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v), \tag{40o}$$

se dice que S^* está *orientada positivamente con respecto a los parámetros u, v* y se escribe

$$\Omega(S^*) = \Omega(u, v). \tag{40p}$$

Si la misma porción de S^* tiene una segunda representación paramétrica regular en términos de los parámetros u', v' que varían sobre una región γ', por la fórmula (42), p. 331 se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v &= \left(\frac{d(y, z)}{d(u, v)}, \frac{d(z, x)}{d(u, v)}, \frac{d(x, y)}{d(u, v)}\right) \\ &= \frac{d(u', v')}{d(u, v)} (\mathbf{X}_{u'} \times \mathbf{X}_{v'}). \end{aligned} \tag{40q}$$

De aquí que los vectores normales unitarios $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Z}'$ correspondientes a las dos representaciones paramétricas están relacionados por

(40r) $$\mathbf{Z} = \operatorname{sgn} \frac{d(u', v')}{d(u, v)} \mathbf{Z}'.$$

De donde, si S^* está orientada positivamente con respecto a los parámetros u, v, entonces también está orientada positivamente con respecto a los parámetros u', v', siempre que

(40s) $$\frac{d(u', v')}{d(u, v)} > 0.$$

Como ilustración, considérese la esfera unitaria S^* con centro en el origen, orientada positivamente con respecto a su interior. Usando $u = x$, $v = y$ como parámetros para $z \neq 0$, se tiene

(40t) $$\mathbf{X} = (u, v, \varepsilon \sqrt{1 - u^2 - v^2}), \quad \text{aonde } \varepsilon = \operatorname{sgn} z.$$

El vector normal correspondiente, $\mathbf{Z}$, definido por (40m) se convierte aquí en

$$\mathbf{Z} = (\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon z) = \varepsilon \boldsymbol{\zeta},$$

donde $\boldsymbol{\zeta}$ es el vector normal unitario exterior. Por tanto, S^* está orientada positivamente con respecto a los parámetros x, y para $z > 0$ y negativamente para $z < 0$ (ver la Fig. 5.9).

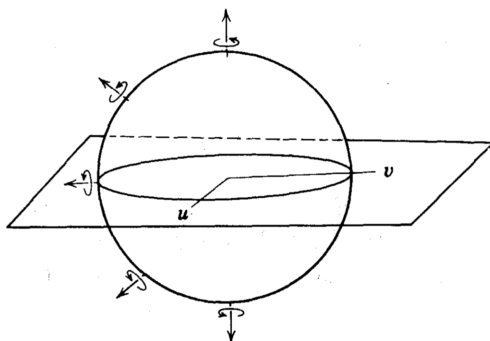


Figura 5.9

Una superficie en el espacio tres para la cual no puede establecerse distinción alguna entre las caras o a lo largo de la cual no se puede seleccionar un vector normal unitario que varíe continuamente, no

puede ser orientable. El ejemplo más sencillo de una superficie de este tipo "con una sola cara", mostrada en la Fig. 5.10(a), se llama *cin-*

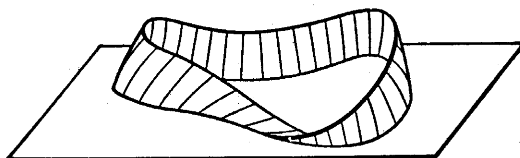


Figura 5.10(a) Cinta de Möbius.

ta de Mobius, en honor de su descubridor. Fácilmente puede construirse una de tales superficies usando una cinta rectangular de papel, pegando los extremos de la cinta después de hacer girar uno de ellos un ángulo de 180°. Si se parte del rectángulo $0 < u < 2\pi$, $-a < v < a$ (donde $0 < a < 1$) en el plano u, v, se llega a la cinta de Möbius si se mueve rígidamente cada segmento $u =$ constante de manera tal que su centro se mueva hacia el punto $(\cos u, \operatorname{sen} u, 0)$ del círculo unitario en el plano x, y y tal que se vuelva perpendicular a ese círculo y forme el ángulo $u/2$ con el eje Z positivo (la hipótesis $a < 1$ evita que la superficie se corte a sí misma). La cinta resultante S tiene la representación paramétrica

$$\text{(40u)} \qquad \mathbf{X} = \left(\left(1 + v \operatorname{sen} \frac{u}{2}\right) \cos u, \left(1 + v \operatorname{sen} \frac{u}{2}\right) \operatorname{sen} u, v \cos \frac{u}{2} \right)$$

con v restringida al intervalo $-a < v < a$. Los puntos (u, v), $(u + 4\pi, v)$, $(u + 2\pi, -v)$ en el plano u, v corresponden al mismo punto sobre la superficie. Si para un punto arbitrario, P_0 de S se hace una selección posible, u_0, v_0 , de los parámetros, la fórmula (40u) proporciona una representación paramétrica local regular de S para u, v estringidas al rectángulo γ dado por

$$u_0 - \pi < u < u_0 + \pi, \qquad -a < v < a.$$

A lo largo de la línea central $v = 0$ de la superficie, la ecuación (40m) define un vector normal unitario:

$$\mathbf{Z} = \left(\cos u \cos \frac{u}{2}, \operatorname{sen} u \cos \frac{u}{2}, -\operatorname{sen} \frac{u}{2}\right)$$

que varía continuamente con u. Empezando con el vector normal unitario $\mathbf{Z} = (1, 0, 0)$ en el punto $(1, 0, 0)$ de S correspondiente a

$u = 0$, y haciendo que u crezca desde 0 hasta 2π, se describe un circuito completo a lo largo de la línea del centro de la superficie, regresando al mismo punto pero con el vector normal unitario opuesto: $\mathbf{Z} = (-1, 0, 0)$. De modo semejante se encuentra que llevando durante el movimiento una pequeña curva tangencial orientada, se regresa al mismo punto pero con la orientación invertida. Por tanto, no es posible elegir un vector normal unitario que varíe continuamente, o bien, una cara de S, o elegir un sentido de rotación sobre S en una forma consistente. La existencia de una sola cara en la cinta de Möbius es ilustrada de manera notable por los insectos caminando a lo largo de la misma en el dibujo debido a M. C. Escher, que se reproduce en la Fig. 5m10(b). Se ve que una superficie no goza automáticamente de la propiedad de *orientabilidad.*

Una superficie se orienta orientando sus planos tangentes en una forma continua. La orientación de los planos tangentes $\pi^*(P)$ se describió por medio de una pareja apropiada de vectores tangenciales independientes, $\xi(P)$, $\eta(P)$. Cuando se tuvo necesidad de definir la "continuidad" de $\Omega(\pi^*) = \Omega(\xi, \eta)$, se hizo uso del vector normal ζ formado de acuerdo con (40d) y se requirió que ζ fuera continuo. Resulta conveniente definir la continuidad de las orientaciones $\Omega(\xi(P), \eta(P))$ sin recurrir a los vectores normales o a los productos cruz. Esto tiene una importancia particular cuando se necesita definir la orientación para variedades en espacios de dimensiones superiores, digamos para una superficie bidimensional, S, en el espacio euclidiano tetradimensional. Nuevamente, aquí puede describirse la orientación de cada plano tangente por medio de una pareja ordenada de vectores tangenciales independientes, ξ, η. Pero no se tiene un vector unitario normal único o "lado" de S que pueda asociarse con S. Tampoco se puede requerir que los vectores tangenciales $\xi(P)$, $\eta(P)$ que describen a $\Omega(\pi^*)$ sean definidos y continuos para todo P sobre S.[1] Se discutirán brevemente dos definiciones de orientación de superficies en el espacio tres, equivalentes a la dada con anterioridad pero que no están relacionadas con los vectores normales y, por tanto, que pueden ser generalizadas hacia dimensiones superiores.

---

[1] Incluso para una superficie tan simple como una esfera en el espacio tres no pueden hallarse vectores tangenciales $\xi(P)$ que no se anulen y que sean continuos en todos los puntos de la superficie. Sin embargo, siempre pueden elegirse los vectores $\xi(P)$, $\eta(P)$ de manera tal que varíen continuamente *en una vecindad de un punto dado.*



Figura 5.10(b) *Cinta de Möbius II,* diseño de M. C. Escher (Fundación Escher, Haags Gemeentemuseum, La Haya, Holanda).

Cualquier representación paramétrica regular $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v)$ de una porción de una superficie S en el espacio tres determina un vec-

tor normal unitario, $\mathbf{Z}$, sobre esa porción, que varía continuamente, por medio de la fórmula (40m). Supóngase que se da un cierto número de representaciones paramétricas regulares para las diferentes porciones de S. Entonces, éstas definirán un vector normal unitario que varía continuamente sobre toda la superficie S y, en consecuencia, una orientación de S, siempre que al menos una de las representaciones sea válida cerca de cualquier punto P de S y siempre que dos representaciones cualesquiera válidas en P conduzcan al mismo vector normal unitario $\mathbf{Z}$. Por (40r), la última condición simplemente requiere que

$$\frac{d(u', v')}{d(u, v)} > 0 \tag{41a}$$

en todo punto donde se cumplan dos de las representaciones con parámetros u, v y u', v' Entonces la superficie está orientada positivamente con respecto a cada una de las representaciones paramétricas dadas.

Por ejemplo, varias porciones de la esfera unitaria S tienen las representaciones paramétricas regulares

$$\mathbf{X} = (\operatorname{sen} u \cos v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u) \tag{41b}$$

$$\text{para} \quad 0 < u < \pi, \quad v_0 - \pi < v < v_0 + \pi$$

$$\mathbf{X} = (u', v', \sqrt{1 - u'^2 - v'^2}) \quad \text{para} \quad u'^2 + v'^2 < 1 \tag{41c}$$

$$\mathbf{X} = (v'', u'', -\sqrt{1 - u''^2 - v''^2}) \quad \text{para} \quad u''^2 + v''^2 < 1. \tag{41d}$$

Fácilmente se ve que todas estas representaciones definen una orientación de S. Por ejemplo, tanto (41b) como (41d) se aplican sobre el hemisferio $z < 0$ y, allí

$$\frac{d(u'', v'')}{d(u, v)} = \frac{d(\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \cos v)}{d(u, v)} = -\operatorname{sen} u \cos u > 0.$$

El vector normal unitario $\mathbf{Z}$ que se obtiene a partir de todas estas representaciones paramétricas es el vector normal exterior y la orientación de S es aquélla que resulta positiva con respecto al interior.

El segundo método que se debe mencionar expresa la condición de continuidad de $\Omega(\boldsymbol{\xi}(P), \boldsymbol{\eta}(P))$ directamente en términos de los vectores $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$. Sea $\boldsymbol{\zeta}(P)$ el vector normal unitario asociado con $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ por medio de (40d). En una vecindad de un punto dado, P_0, de S se cumple una representación paramétrica regular $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v)$ que

define un vector normal $\mathbf{Z}$ variable continuamente, por medio de (40m). Entonces $\zeta(P) = \varepsilon(P)\ \mathbf{Z}(P)$ con un cierto $\varepsilon(P) = \pm 1$. Obviamente, la continuidad del vector $\zeta(P)$ en P_0 es equivalente a la condición $\varepsilon(P) =$ constante cerca de P_0, o a la condición

$$\zeta(P) \cdot \zeta(P_0) = \varepsilon(P)\ \varepsilon(P_0)\ \mathbf{Z}(P) \cdot \mathbf{Z}(P_0) > 0$$

para todo P lo suficientemente próximo a P_0. Ahora bien, usando la identidad (40e) se encuentra que

$$\zeta(P) \cdot \zeta(P_0) = \frac{[\xi(P), \eta(P); \xi(P_0), \eta(P_0)]}{|\xi(P) \times \eta(P)|\ |\xi(P_0) \times \eta(P_0)|}.$$

Como consecuencia, las orientaciones $\Omega(\xi, \eta)$ varían continuamente y definen una orientación de la superficie S si para cada P_0 sobre S

$$\text{(41e)}[1] \qquad [\xi(P), \eta(P); \xi(P_0), \eta(P_0)] > 0$$

para todos los puntos P sobre S lo suficientemente próximos a P_0.

Por ejemplo, sea S la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Para cualquier punto (x, y, z) sobre S que no sea uno de los polos $(0, 0, \pm 1)$, los vectores

$$\xi = (xz, yz, z^2 - 1), \quad \eta = (-y, x, 0)$$

son independientes y tangenciales, ya que son perpendicualres al vector de posición $\mathbf{X} = (x, y, z)$. Con la elección adicional de

$$\xi = (1, 0, 0), \quad \eta = (0, \varepsilon, 0)$$

en el polo $(0, 0, \varepsilon)$, donde $\varepsilon = \pm 1$, las orientaciones $\Omega(\xi, \eta)$ son continuas en cada punto P_0 de S. Esto es evidente cuando P_0 no es uno de los polos, dado que entonces los propios ξ y η son continuos y diferentes de cero. Así, sólo tiene que verificarse la condición (41e) cuando P_0 es un polo. Por ejemplo, para el "polo norte" $P_0 = (0, 0, 1)$ y para cualquier punto $P = (x, y, z)$ en el "hemisferio norte",

---

[1] A partir de la fórmula (85c), p. 241, puede deducirse directamente que (41e) es una relación entre $\Omega(\pi^*(P))$ y $\Omega(\pi^*(P_0))$ únicamente y no depende de los vectores particulares $\xi(P)$, $\eta(P)$, $\xi(P_0)$, $\eta(P_0)$ usados para representar las orientaciones de esos planos tangentes.

$$[\xi(P), \eta(P); \xi(P_0), \eta(P_0)] = \begin{vmatrix} \xi(P)\cdot\xi(P_0) & \xi(P)\cdot\eta(P_0) \\ \eta(P)\cdot\xi(P_0) & \eta(P)\cdot\eta(P_0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} xz & yz \\ -y & x \end{vmatrix} = (x^2 + y^2)\, z > 0$$

excepto para $P = P_0$. Pero, por supuesto, también

$$[\xi(P_0), \eta(P_0); \xi(P_0), \eta(P_0)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

b. Orientación de curvas sobre superficies orientadas

Se vio que es posible distinguir una cara positiva y una negativa en una superficie orientada S^* que se encuentre en el espacio, con una cierta orientación del sistema coordenado. En la misma forma, pueden definirse los lados positivo y negativo de una curva orientada, C^*, que se encuentre sobre una superficie orientada, S^*. Sea ξ un vector tangencial a la curva en un punto P y que apunta en la dirección determinada por la orientación de C^*:[1]

$$\Omega(\xi) = \Omega(C^*). \tag{41f}$$

Sea η un vector tangencial a la superficie en P y linealmente independiente de ξ. Se dice que η apunte hacia el lado positivo de C^* si

$$\Omega(\eta, \xi) = \Omega(S^*). \tag{41g}$$

Recíprocamente, puede orientarse una curva C que se encuentra sobre una superficie orientada S^* requiriendo que un vector dado, η, no tangencial a C, apunta hacia el lado positivo de C.[2]

[1] Si $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ es una representación paramétrica de C^* y $\Omega(C^*)$ corresponde a la t creciente, el vector ξ debe tener la misma orientación que $d\mathbf{X}/dt$.

[2] A fin de lograr una mayor consistencia para las dimensiones superiores, la notación para los lados *positivo* y *negativo* de una curva se ha cambiado respecto a la usada en el Volumen I (p. 342). Considérese el caso especial donde S^* es el plano con la orientación usual, contraria al movimiento de las manecillas del reloj cuando se observa desde un lado determinado. Si C^* es un arco orientado con el vector tangente ξ apuntando en la dirección dada por la orientación de C^*, entonces, por (41g), un vector η apunta hacia el lado *positivo* de C^* si una rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj en un ángulo menor que 180° lleva a η sobre ξ; esto es, η apunta hacia el lado *derecho* de C^* si se mira en la dirección de ξ.

Existe una forma natural de orientar una curva C cuando ésta forma parte de la frontera de una región σ que está sobre una superficie orientada S^*, si se requiere que σ quede sobre el lado negativo de la curva orientada C^*. Más precisamente, se dice que C^* está orientada positivamente con respecto a σ si un vector η tangencial a S^* en un punto P de C^* y que apunta hacia afuera de σ, apunta hacia el lado positivo de C^*. Inversamente, puede indicarse la orientación de una superficie S^* gráficamente, tomando una región σ sobre S^* y marcando la orientación positiva de su curva frontera (ver la Fig. 5.11).[1]

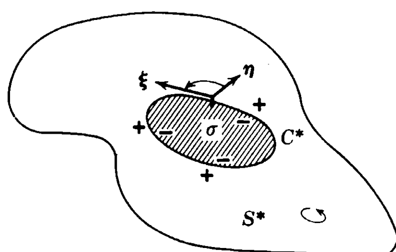


Figura 5.11 Curva orientada C^* sobre la superficie orientada S^*.

Si una superficie orientada S^* se divide en las porciones $S_1, S_2, \ldots, S_n$, entonces cualquier arco C que separe una porción S_i de una porción S_k recibe orientaciones opuestas cuando se orienta positivamente con respecto a esas porciones. Esto se deduce inmediatamente a partir del hecho de que cualquier vector η tangencial a S en un punto P de C y que apunta hacia S_i, apunta hacia afuera de S_k (ver la Fig. 5.12).

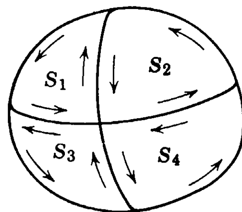


Figura 5.12

[1] En esta forma de indicar la orientación de una superficie S^* por medio de la de una curva C^* sobre ella, se tiene que especificar claramente el conjunto σ con respecto al cual la curva C^* va a tener la orientación positiva. Por lo general, C^* es una "pequeña" curva simple cerrada que divide a S en dos porciones, una de las cuales también es pequeña y entonces se toma como σ

Ejercicios 5.7

1. Sea S la superficie bidimensional ("producto de dos círculos") en el espacio cuatro dada por

$$\mathbf{X} = (\cos u, \operatorname{sen} u, \cos v, \operatorname{sen} v).$$

Probar que los vectores

$$\xi = (-x_2, x_1, -x_4, x_3), \quad \eta = (-x_2, x_1, x_4, -x_3)$$

determinan una orientación sobre S.

2. Sea S^* el toro con la representación paramétrica dada en el Capítulo 3 (p. 334) y que está orientado positivamente con respecto a los parámetros θ, ϕ. Probar que S^* está orientada positivamente con respecto a su interior.

3. Sea S la cinta de Möbius representada paramétricamente como en (40u).
   (a) Demostrar que la línea $v = a/2$ divide a S en un conjunto orientable y uno no orientable.
   (b) Demostrar que la línea $v = 0$ no divide a S, es decir, que el conjunto S_1 de puntos obtenido al eliminar de S todos los puntos con $v = 0$ aún es conexo.
   (c) Demostrar que S_1 es orientable.

4. Sean ξ, η, vectores independientes en el plano π. Póngase $a = |\xi|^2$, $b = \xi \cdot \eta$, $c = |\eta|^2$ y fórmese, para cualquier t, el vector

$$\mathbf{R}(t) = \left(\cos t - \frac{b}{\sqrt{ac - b^2}} \operatorname{sen} t\right) \xi + \frac{a \operatorname{sen} t}{\sqrt{ac - b^2}} \eta.$$

Probar que se obtiene $\mathbf{R}(t)$ haciendo girar el vector ξ en el plano π un ángulo t en el sentido dado por la orientación $\Omega(\xi, \eta)$.

5.8 Integrales de formas diferenciales y de escalares sobre superficies

a. Integrales dobles sobre regiones planas orientadas

En las definiciones originales de integrales simples y múltiples, digamos, como límites de sumas de Riemann, la *orientación* no juega papel alguno. La integral de una función f se basa en el uso de longitudes, áreas, volúmenes y así sucesivamente, de figuras elementales que, naturalmente, reciben valores positivos. Sin embargo, el uso de cantidades con signo, lo que equivale a la introducción de orientaciones, se impone inmediatamente si se desea tener reglas simples para operar con integrales. [1] Así, la integral definida

[1] Generalmente, las matemáticas se volverían intolerablemente complicadas si nos restringiéramos a usar únicamente cantidades positivas, por ejemplo, distancias

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se define como el límite de sumas de Riemann para $a < b$. Si se desea que se cumpla la regla de aditividad

$$\int_a^b f(x)\;dx + \int_b^c f(x)\;dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

sin restringir las posiciones relativas de a, b, c, se tiene que definir

$$\int_a^b f\,dx$$

también para $a \geqq b$ por medio de la fórmula

(42a) $$\int_a^b f(x)\;dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

(ver el Volumen I, p. 136). Geométricamente, la pareja ordenada de números a, b determina un intervalo orientado I^* sobre el eje x, con punto "inicial" a y punto "final" b. Aquí el valor de

(42b) $$\int_a^b f\,dx = \int_{I^*} f\,dx$$

es el dado por el límite de las sumas de Riemann (el cual es positivo para f positiva) cuando la orientación de I^* corresponde al sentido de la x creciente, es decir, para $a < b$. Es el negativo de ese límite para $a > b$. Intercambiando los puntos extremos I^* se convierte en el intervalo $-I^*$, con la orientación opuesta, de modo que la fórmula (42c) también se puede escribir como

(42c) $$\int_{-I^*} f\,dx = -\int_{I^*} f\,dx.$$

---

positivas en lugar de distancias *con signo* como coordenadas. Esto requeriría una cantidad innumerable de distinciones entre casos diferentes, en la demostración y enunciado de teoremas sencillos. La *positividad* es un elemento esencial en el planteamiento de *desigualdades* entre entes matemáticos, pero complica el planteamiento de la mayoría de las *identidades*, las cuales por lo común se basan en la irrestricta manipulación algebraica de las cantidades.

Se tiene una situación semejante para la integral sobre un conjunto orientado R^* (mensurable según Jordan) en el plano x, y.[1] Cuando R^* está orientado positivamente con respecto a las coordenadas x, y, $\Omega(R^*) = \Omega(x, y)$, la integral doble

$$\iint_{R^*} f(x, y)\, dx\, dy$$

debe sobrentenderse en el sentido definido en el Capítulo 4. Esto es, la integral es el límite de las sumas obtenidas a partir de subdivisiones del plano en cuadrados de área 2^{-2n}. La integral tendrá un valor no negativo para f no negativa. En el caso $\Omega(R^*) = -\Omega(x, y) = \Omega(y, x)$, se define la integral de f sobre R^* por

$$\iint_{R^*} f\, dx\, dy = -\iint_{R^*} f\, dy\, dx,$$

donde ahora

$$\int_{R^*} f\, dy\, dx$$

tiene el significado ordinario de límite de sumas. Cono consecuencia se tiene la regla de que

$$\iint_{-R^*} f\, dx\, dy = -\iint_{R^*} f\, dx\, dy, \tag{43}$$

donde $-R^*$ se obtiene cambiando la orientación de R^*. Con esta convención se cumple la regla de sustitución [ver (16b), p. 459], en la forma

$$\iint_{R^*} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{T^*} f(\phi(u, v), \psi(u, v)) \frac{d(x, y)}{d(u, v)}\, du\, dv, \tag{43a}$$

para las aplicaciones suaves uno a uno:

$$x = \phi(u, v),\ y = \psi(u, v)$$

---

[1] La orientación de R^* se define aquí de acuerdo con la definición general de la orientación de superficies. Se determina asociando con cada punto de R^* una orientación (descrita, por ejemplo, por medio de una pareja de vectores) variando las orientaciones continuamente de punto a punto. Para un conjunto conexo sólo son posibles dos orientaciones distintas.

de T^* sobre R^*, mientras el jacobiano $d(x, y)/d(u, v)$ sea positivo en todo T^*, o bien, negativo en todo T^*. Aquí la orientación de T^* tiene que ser la correspondiente a la de R^* bajo la aplicación.[1] Si, por ejemplo, $\Omega(R^*) = -\Omega(x, y)$ y si $d(x, y)/d(u, v) < 0$, entonces $\Omega(T^*) = \Omega(u, v)$. Podría decirse que la orientación de R^* atribuye un cierto signo a la forma diferencial $dx\, dy$: el signo positivo si el sistema coordenado x, y tiene la orientación de R^*, el negativo en caso contrario. Entonces, el signo atribuído por la orientación de T^* a la forma $du\, dv$ es el que concuerda con la relación

$$dx\, dy = \frac{d(x, y)}{d(u, v)}\, du\, dv.$$

En la misma forma pueden definirse las integrales triples

$$\iiint_{R^*} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

sobre conjuntos orientados en el espacio x, y, z y, de modo semejante, en dimensiones superiores.

b. Integrales de superficies de formas diferenciales de segundo orden

Ahora se puede dar una definición general para la integral de cualquier forma diferencial de segundo orden ω sobre una superficie orientada, S^*, en el espacio. Sea ω una forma diferencial dada por la expresión

$$(44) \qquad \omega = a(x, y, z)\, dy\, dz + b(x, y, z)\, dz\, dx + c(x, y, z)\, dx\, dy.$$

Supóngase primero que la superficie S^* completa bajo consideración puede representarse paramétricamente en la forma

[1] Para encontrar esa orientación fórmense, de acuerdo con (40 o, p), los vectores

$$\mathbf{X}_u = (x_u, y_u),\ \mathbf{X}_v = (x_v, y_v)$$

y póngase

$$\Omega(R^*) = \varepsilon\, \Omega(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v) = \varepsilon \left(\operatorname{sgn} \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right) \Omega(x, y).$$

donde $\varepsilon = \pm 1$ tiene el valor determinado por

$$\Omega(R^*) = \Omega(T^*) = \varepsilon\Omega(u, v).$$

$$(45) \qquad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

donde (u, v) varía sobre un conjunto R^* en el plano u, v. Aquí R^* tiene una cierta orientación determinada por la de S^* (ver la p. 646).[1]

Puede escribirse ω en la forma

$$\omega = K\, du\, dv,$$

donde

$$(46) \qquad K = \frac{\omega}{du\, dv} = a\frac{d(y, z)}{d(u, v)} + b\frac{d(z, x)}{d(u, v)} + c\frac{d(x, y)}{d(u, v)},$$

y definirse

$$(46a) \qquad \iint_{S^*} \omega = \iint_{R^*} K\, du\, dv$$
$$= \iint_{R^*} \left(a\frac{d(y, z)}{d(u, v)} + b\frac{d(z, x)}{d(u, v)} + c\frac{d(x, y)}{d(u, v)}\right) du\, dv.$$

El valor obtenido de esta manera para la integral de ω sobre la superficie orientada S^* es independiente de la representación paramétrica particular que tenga S^*. Si la superficie también puede referirse a los parámetros u', v', se tiene (ver la p. 358)

$$\omega = K'\, du'\, dv',$$

donde

$$K' = K\frac{d(u, v)}{d(u', v')}.$$

Entonces la orientación de la región de integración R'^* en el plano u', v' es tal que la regla de sustitución (43a) es aplicable y

$$\iint_{R^*} K\, du\, dv = \iint_{R'^*} K\frac{d(u, v)}{d(u', v')}\, du'\, dv' = \iint_{R'^*} K'\, du'\, dv'.$$

[1] La regla para orientar a R^* es como sigue: $\Omega(R^*) = \varepsilon\Omega(u,v)$ con $\varepsilon = \pm 1$ si $\Omega(S^*) = \varepsilon\Omega(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v)$, donde $\mathbf{X} = (x, y, z)$ es el vector de posición.

Supóngase, por ejemplo, que S^* es representable no paramétricamente en la forma $z = f(x, y)$, siendo (x, y) variable sobre la proyección vertical R^*, de S^* en el plano x, y. La orientación de S^* determina una orientación para R^*. La orientación de S^* puede describirse especificando el vector normal a S^* que apunta hacia el lado positivo de S^*, cuando la orientación del espacio es la del sistema coordenado x, y, z. Cuando ese vector normal forma un ángulo agudo con eje z positivo, la orientación de R^* es la del sistema x, y; en caso contrario, la del sistema y, x.[1] En cualquiera de los dos casos se tiene

$$\iint_{S^*} \omega = \iint_{S^*} (a\, dy\, dz + b\, dz\, dx + c\, dx\, dy)$$
$$= \iint_{R^*} (c - af_x - bf_y)\, dx\, dy.$$

Ahora resulta fácil deshacerse de la hipótesis especial de que la superficie S^* completa se puede representar por medio de una única representación paramétrica. Supóngase que la superficie orientada S^* se puede dividir en un número finito de porciones orientadas S_1^*, $S_2^*, \ldots, S_N^*$, de manera tal que cada porción tenga una representación paramétrica del tipo discutido. Se forma la integral de superficie de la forma ω para cada una de las porciones, de acuerdo con la definición anterior, y se define la integral de ω sobre S^* como la suma de las integrales sobre las S_i^*. Por supuesto, se tiene que demostrar que la integral sobre S^* definida de esta manera no depende de la subdivisión particular de S^* en porciones S_i^*. Con relación a las hipótesis exactas necesarias para que ésto sea cierto, y la demostración, ver el Apéndice a este capítulo.

c. *Relación entre las integrales de formas diferenciales sobre superficies orientadas y las integrales de escalares sobre superficies no orientadas*

En el Capítulo 4 (p. 482) se introdujo el área, A, de una superficie S en el espacio, sin referencia alguna a su orientación. Si S tiene la representación paramétrica

[1] Ver la p. 642. En el primer caso, con S^* referida a los parámetros x, y el vector normal positivo ζ tiene la dirección del vector $(-f_x, -f_y, 1)$ y, por tanto, $(\zeta, \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v) > 0$.

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$$

y si ξ, η, ζ denotan las componentes del vector normal

$$\xi = \frac{d(y, z)}{d(u, v)},\quad \eta = \frac{d(z, x)}{d(u, v)},\quad \zeta = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \tag{46b}$$

[ver (30a), p. 485], el área de S está dada por

$$A = \iint_R \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\, du\, dv.$$

Aquí la integral se extiende sobre el conjunto R en el plano u, v, correspondiente a S. Se interpreta la integral en el sentido original de una integral doble en la que el elemento de superficie

$$dS = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\, du\, dv$$

se trata como una cantidad positiva o, lo que es equivalente, en la que se da a R la orientación positiva con respecto al sistema u, v.[1] La orientabilidad de S no es esencial para la definición de A. El lector puede, por ejemplo, expresar fácilmente como una integral el área total de la no orientable cinta de Möbius, con la representación paramétrica dada en la p. 647.

Más generalmente, para una función $f(x, y, z)$ definida sobre la superficie S, puede formarse la integral de f sobre la superficie:

$$\iint_S f\, dS = \iint_R f\ \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\, du\, dv. \tag{47a}$$

El valor de la integral es independiente de la representación paramétrica usada para S y no involucra orientación alguna de S. Es positivo para f positiva.

Con el fin de relacionar la integral de una forma diferencial de segundo orden,

[1] Si se introduce el vector de posición $\mathbf{X} = (x, y, z)$, la cantidad $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ representa la longitud del producto vectorial de los vectores $\mathbf{X}_u$ y $\mathbf{X}_v$. Por (30b), p. 428, también puede escribirse como

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{(\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u)(\mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_v) - (\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v)^2} = \sqrt{[\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v; \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v]}.$$

La diferencial dS tiene las mismas propiedades de invariancia que una forma diferencial alternante de segundo orden, bajo las sustituciones paramétricas con jacobiano *positivo*, pero cambia de signo bajo las sustituciones con jacobiano negativo.

$$\omega = a(x, y, z)\, dy\, dz + b(x, y, z)\, dz\, dx + c(x, y, z)\, dx\, dy,$$

sobre una superficie orientada S^*, con las integrales de superficie de funciones sobre la superficie S no orientada, como acaban de definirse, se introducen los cosenos directores del vector normal positivo de S^*:

$$\cos\alpha = \frac{\varepsilon\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}},\ \cos\beta = \frac{\varepsilon\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}},\ \cos\gamma = \frac{\varepsilon\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$$

donde ξ, η, ζ están dados por (46b) y $\varepsilon = \pm 1$, $\Omega(S^*) = \varepsilon\Omega(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v)$. Entonces, por (46),

$$K = \frac{\omega}{du\, dv} = \varepsilon\,(a \cos\alpha + b \cos\beta + c \cos\gamma)\, \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Ahora, por (46a),

$$\iint_{S^*} \omega = \iint_{R^*} K\, du\, dv = \varepsilon \iint_R K\, du\, dv.$$

Consecuentemente, (47a) proporciona la identidad

$$\text{(47b)}\quad \iint_{S^*} \omega = \iint_{S^*} a\, dy\, dz + b\, dz\, dx + c\, dx\, dy$$
$$= \iint_S (a \cos\alpha + b \cos\beta + c \cos\gamma)\, dS$$
$$= \iint_R (a \cos\alpha + b \cos\beta + c \cos\gamma)\, \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\, du\, dv,$$

que expresa la integral de la forma diferencial ω sobre la superficie orientada S^* como una integral sobre la superficie S no orientada o sobre la región no orientada R en el plano de los parámetros. Sin embargo, aquí el *integrando* depende de la orientación de S^*, puesto que $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores del vector normal, $\mathbf{n}$, de S^* que apunta hacia el lado positivo de S^* (usando una orientación positiva del espacio con respecto a las coordenadas x, y, z).

Si la superficie orientada S^* consiste de varias porciones, S_k^* cada una de las cuales admite una representación paramétrica de la forma (45), se aplica la identidad (47b) a cada porción y, sumando sobre las diferentes porciones, se obtiene la misma identidad para la integral de ω sobre la superficie S^* completa.

Los cosenos directores del vector normal **n** que apunta hacia el lado positivo de S^* se pueden identificar con las derivadas de x, y, z en la dirección de **n**:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{dn}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{dn}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{dn}.$$

Por tanto,

$$\text{(47c)} \qquad \iint_{S^*} \omega = \iint_S \left(a\frac{dx}{dn} + b\frac{dy}{dn} + c\frac{dz}{dn}\right) dS.$$

En notación vectorial la fórmula se reduce a

$$\text{(47d)} \qquad \iint_{S^*} \omega = \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

donde $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ es el vector normal unitario sobre el lado positivo de S^* y $\mathbf{V}$ es el vector con componentes a, b, c.

El concepto de integral de superficie se puede interpretar intuitivamente en términos del movimiento de un fluido incompresible, (esta vez, en tres dimensiones) cuya densidad se toma como unidad. Sea $\mathbf{V} = (a, b, c)$ el vector velocidad de este flujo. Entonces, en cada punto de la superficie S^* el producto $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ da la componente de la velocidad del flujo en la dirección normal a la superficie. Por lo tanto, la expresión

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS = (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)\, dS$$

se puede identificar con la cantidad de fluido que pasa en la unidad de tiempo a través del elemento de superficie dS, del lado negativo de S^* hacia el lado positivo (por supuesto, esta cantidad puede ser negativa).[1] Por consiguiente, la integral de superficie

$$\text{(48)} \qquad \iint_{S^*} (a\, dy\, dz + b\, dz\, dx + c\, dx\, dy) = \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

[1] Ver la interpretación bidimensional análoga en la p. 634. Aquí se imagina la superficie en la vecindad de un punto como si fuese aproximada por una porción plana de área ΔS y el vector velocidad $\mathbf{V}$ como si fuera remplazado por un vector constante. Eligiendo adecuadamente el paso al límite se obtiene la representación integral para la cantidad de líquido que cruza S^*.

representa la cantidad total de fluido que pasa a través de la superficie S^*, del lado negativo hacia el lado positivo, en la unidad de tiempo. Nótese aquí que la distinción entre los lados positivo y negativo de una superficie, es decir, el concepto de orientación, juega una parte importante en la descripción matemática del movimiento del fluido.

En otras aplicaciones físicas el vector **V** denota la fuerza debida a un campo, que actúa en un punto (x, y, z). Entonces la dirección del vector **V** da la dirección de las *líneas de fuerza* y su magnitud da la *magnitud* de la fuerza. En esta interpretación, la integral

$$\iint_{S^*} (a\,dy\,dz + b\,dz\,dx + c\,dx\,dy)$$

se llama *flujo total de fuerza* a través de la superficie, del lado negativo hacia el lado positivo.

5.9 Teoremas de Gauss y de Green en el espacio

a. Teorema de Gauss

El concepto de integral de superficie permite extender a tres dimensiones el teorema de Gauss, que se probyo en la p. 607 para dos dimensiones. El punto esencial en el enunciado del teorema en dos dimensiones es que una integral sobre una región plana se reduce a una integral de línea calculada a lo largo de la frontera de la región. Considérese ahora una región tridimensional R, cerrada y acotada, en el espacio x, y, z, limitada por una superficie S que se intersecta con toda paralela a uno de los ejes coordenados en, cuando más, dos puntos. Posteriormente se eliminará esta última hipótesis.

Supóngase que las tres funciones $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$ y sus primeras derivadas parciales son continuas en R. Considérese la integral

$$\iiint_R \frac{\partial c(x, y, z)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

calculada sobre la región R orientada positivamente con respecto a las coordenadas x, y, z. La región R puede describirse mediante las desigualdades

$$z_0(x, y) \leqq z \leqq z_1(x, y),$$

donde (x, y) varía sobre la proyección, B, de R sobre el plano x, y. Supóngase que B tiene un área y que las funciones $z_0(x, y)$ y $z_1(x, y)$ son continuas y tienen primeras derivadas continuas en B. La integral de volumen sobre R puede transformarse por medio de la fórmula (ver la p. 592)

$$\iiint_R f\,dx\,dy\,dz = \iint_B dx\,dy \int_{z_0}^{z_1} f\,dz.$$

Como aquí $f = \partial c/\partial z$, puede realizarse la integración con respecto a z, dando

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial c}{\partial z}\,dz = c(x, y, z_1) - c(x, y, z_0) = c_1 - c_0,$$

de modo que

$$\iiint_R \frac{\partial c(x, y, z)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_B c_1\,dx\,dy - \iint_B c_0\,dx\,dy.$$

Si se supone que la frontera S está orientada positivamente con respecto a la región R, entonces la porción de la superficie frontera orientada, S^*, que consiste de los puntos de entrada $z = z_0(x, y)$ tiene una orientación negativa con respecto a las coordenadas x, y cuando se proyecta sobre el plano x, y,[1] mientras que la porción $z = z_1(x, y)$ que consiste de los puntos de salida tiene una orientación positiva. De aquí que las dos últimas integrales se combinan para formar la integral

$$\iint_{S^*} c\,(x, y, z)\,dx\,dy$$

evaluada sobre la superficie S^* completa. Así se obtiene la fórmula

$$\iiint_R \frac{\partial c\,(x, y, z)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_{S^*} c\,(x, y, z)\,dx\,dy.$$

La fórmula sigue siendo válida si S^* contiene porciones cilíndricas perpendiculares al plano x, y, porque éstas no contribuyen a la integral. Si, por ejemplo, una de tales porciones S'^*, de S^* tiene la representación $y = \phi\,(x)$, para S'^* se tiene la representación paramétrica

[1] Ver la p. 658. Sobre $z = z_0(x, y)$ el vector normal positivo (el exterior a R) apunta hacia abajo.

$$x = u, \qquad y = \phi(u), \qquad z = v$$

y, por tanto, en efecto se cumple

$$\iint_{S^*} c\,dx\,dy = \iint c\,\frac{d(x,\,y)}{d(u.\,v)}\,du\,dv = \iint c \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \phi' & 0 \end{vmatrix} du\,dv = 0.$$

Si se deducen las fórmulas correspondientes para las componentes a y b y se suman las tres fórmulas, se obtiene la fórmula general

$$(49) \qquad \iiint_R \left[\frac{\partial a(x,\,y,\,z)}{\partial x} + \frac{\partial b(x,\,y,\,z)}{\partial y} + \frac{\partial c(x,\,y,\,z)}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz$$
$$= \iint_{S^*} [a(x,\,y,\,z)\,dy\,dz + b(x,\,y,\,z)\,dz\,dx + c(x,\,y,\,z)\,dx\,dy],$$

que se conoce como *teorema de Gauss.* Usando la fórmula (47b) de la p. 595, esto también se puede escribir en la forma

$$(50) \qquad \iiint_R (a_x + b_y + c_z)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \iint_S (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma)\,dS$$
$$= \iint_S \left(a\frac{dx}{dn} + b\frac{dy}{dn} + c\frac{dz}{dn}\right) dS.$$

Aquí correspondiendo a la orientación positiva de S^* con respecto a R, en α, β, γ se tienen los ángulos que el vector *normal dirigido hacia afuera,* $\mathbf{n}$, forma con los ejes coordenados positivos.

Esta fórmula se puede extender con facilidad a regiones más generales. Sólo se requiere que la región R pueda subdividirse, por medio de un número finito de porciones de superficies con planos tangentes que gíren de modo continuo, en subregiones R_i, cada una de las cuales tenga las propiedades arriba supuestas (en particular, que cada R_i tenga una frontera que consista de superficies que se intersecten con toda paralela a un eje coordenado en, cuando más, dos puntos o que sean porciones de cilindros con generatrices paralelas a uno de los ejes coordenados). El teorema de Gauss se cumple para cada región R_i. Al sumar se obtiene, a la izquierda, una integral triple sobre la región R completa; a la derecha, algunas de las integrales de superficie se combinan para formar la integral sobre la superficie orientada S, mientras que las otras (a saber, aquéllas

tomadas sobre las superficies que subdividen a R) se cancelan entre sí, como ya se ha visto en el caso del plano (p. 611).[1]

Como un caso especial del teorema de Gauss se obtiene la fórmula para el volumen de una región R limitada por una superficie S^* orientada positivamente con respecto a R. Si, por ejemplo, en (49) se pone $a = 0$, $b = 0$, $c = z$, inmediatamente se obtiene la expresión

$$V = \iiint_R dx\,dy\,dz = \iint_{S^*} z\,dx\,dy$$

para el volumen. De la misma manera, se encuentra[2] que

$$V = \iint_{S^*} x\,dy\,dz = \iint_{S^*} y\,dz\,dx.$$

Si **A** es el vector con componentes a, b, c, entonces $a_x + b_y + c_z$ es la divergencia de **A** y

$$a\frac{dx}{dn} + b\frac{dy}{dn} + c\frac{dz}{dn}$$

---

[1] La demostración para R general que se ha dado aquí utiliza una definición de la integral sobre una superficie cerrada S que, en realidad, no se ha demostrado independiente de la manera particular de dividir S en porciones con representaciones paramétricas simples. La demostración de que para S *suave* la integral sobre S es independiente de la subdivisión se dará en el Apéndice, p. 704. Sin embargo, en la extensión del teorema de Gauss a regiones R más generales, dada arriba, necesariamente se hace uso de subregiones R_i limitadas por superficies S_i que tienen *aristas* y no son perfectamente suaves. Por esa razón es más conveniente usar una técnica de demostración un tanto diferente, que no requiera de la descomposición de R en subconjuntos *ajenos* R_i, que quizá no puedan tener fronteras suaves. Esto se logra por medio del método de *partición de la unidad*, en el que, efectivamente, se representa R como la unión de regiones R_i *que se traslapan*, con fronteras suaves, a cada una de las cuales se aplica directamente el teorema. Ver el Apéndice a este capítulo, pp. 708-711.

[2] Es notable que el intercambio *cíclico* de x, y, z en estas expresiones para V no produce cambios de signo, en contraste con las fórmulas correspondientes para el área de una región bidimensional limitada por una curva orientada C^*:

$$A = \int_{C^*} x\,dy = -\int_{C^*} y\,dx.$$

Esto es así porque en dos dimensiones un intercambio entre la dirección x positiva y la dirección y positiva invierte la orientación del plano: $\Omega(x, y) = -\Omega(y, x)$, mientras que un intercambio cíclico de las coordenadas en el espacio tres conserva la orientación del espacio:

$$\Omega(x, y, z) = \Omega(y, z, x) = \Omega(z, x, y).$$

es el producto escalar de los vectores **A** y **n**, es decir, la componente normal, A_n del vector **A**. De aquí que, en notación vectorial, el teorema de Gauss se convierte en[1]

$$\iiint_R \operatorname{div} \mathbf{A}\, dx\, dy\, dz = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S A_n\, dS. \tag{52}$$

Más notable es la formulación del teorema de Gauss (49) en términos de formas diferenciales exteriores. La forma diferencial de segundo orden

$$\omega = a(x, y, z)\, dy\, dz + b(x, y, z)\, dz\, dx + c(x, y, z)\, dx\, dy$$

tiene precisamente por derivada [ver (58c), p. 364] la forma de tercer orden

$$d\omega = (a_x + b_y + c_z)\, dx\, dy\, dz.$$

Denotando por S^* la frontera de R orientada positivamente con respecto a R, se tiene simplemente

$$\iiint_R \partial\omega = \iint_{S^*} \omega. \tag{53}$$

Hasta aquí se ha supuesto que la región tridimensional R está orientada positivamente con respecto a las coordenadas x, y, z. Nos podemos liberar de esta suposición observando que ω en (53) representa una forma diferencial arbitraria de segundo orden y que la relación entre ω y $d\omega$ es independiente de las coordenadas que se usen. Denótese por R^* una región orientada en el espacio y por ∂R^* su frontera orientada positivamente con respecto a R^*. Siempre puede elegirse un sistema x, y, z con respecto al cual R^* esté orientada positivamente, de modo que (53) se cumple con $S^* = \partial R^*$ (ver la p. 656). Con estas convenciones se tiene, para cualquier orientación de R^*,

$$\iiint_{R^*} d\omega = \iint_{\partial R^*} \omega. \tag{53a}$$

[1] Nótese que en las integrales de superficie la orientación dada a S sólo afecta al integrando.

Como se verá, fórmulas análogas se cumplen con mayor generalidad para conjuntos de cualquier número de dimensiones. [1]

Ejercicios 5.9a

1. Evaluar la integral de superficie

$$\iint \frac{z}{p}\, dS$$

sobre la mitad del elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, para la cual z es positiva, donde $1/p = lx/a^2 + my/b^2 + nz/c^2$, siendo l, m, n los cosenos directores del vector normal dirigido hacia afuera.

2. Evaluar la integral de superficie

$$\iint H\, dS$$

sobre la esfera de radio unitario con centro en el origen, donde

$$H = a_1x^4 + a_2y^4 + a_3z^4 + 3a_4x^2y^2 + 3a_5y^2z^2 + 3a_6x^2z^2.$$

b. Aplicación del teorema de Gauss al movimiento de fluidos

Como en el caso del plano, una interpretación física del teorema de Gauss en el espacio puede obtenerse tomando el vector $\mathbf{A} = (a, b, c)$ como el *vector momento lineal* en el movimiento de un fluido de densidad ρ cuya velocidad está dada por el vector $\mathbf{V} = (u, v, w)$. Aquí ρ y las componentes de la velocidad, u, v, w, dependen del punto (x, y, z) y del instante t considerado. El vector momento lineal (por unidad de volumen) se define por $\mathbf{A} = \rho\mathbf{V}$. Si R es una región fija en el espacio, limitada por la superficie S, entonces la masa total del fluido que pasa en la unidad de tiempo a través de una pequeña porción de S de área ΔS, del interior hacia el exterior de R, está dada

---

[1] Generalmente, para un conjunto orientado n dimensional, R^* en el espacio euclidiano de n o más dimensiones, el símbolo ∂R^* denota la frontera de R^* orientada positivamente con respecto a R^*; es decir, ∂R^* está orientada de tal manera que

$$\Omega(R^*) = \Omega(\mathbf{B}, \mathbf{A}^1, \cdots, \mathbf{A}^{n-1})$$

donde $\mathbf{A}^1, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}$ son vectores tangenciales en algún punto a la frontera de ∂R^*, con

$$\Omega(\partial R) = \Omega(\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \cdots, \mathbf{A}^{n-1}),$$

y donde $\mathbf{B}$ es un vector tangencial a R^* y que apunta hacia afuera de R^*.

aproximadamente por la expresión $\rho V_n \Delta S$, donde V_n es la componente del vector velocidad **V** en la dirección del vector normal hacia afuera, **n**, en un punto del elemento de superficie. En consecuencia, la cantidad total del fluido que pasa a través de la frontera S de R, del interior hacia el exterior, en la unidad de tiempo está dada por la integral

$$\iint_S \rho V_n \, dS = \iint_S A_n \, dS$$

evaluada sobre la frontera S completa. Así por la identidad de Gauss (52), la cantidad de fluido que sale de R en la unidad de tiempo a través de su frontera es:

$$\iiint_R \operatorname{div} \mathbf{A} \, dx \, dy \, dz = \iiint_R \operatorname{div} (\rho \mathbf{V}) \, dx \, dy \, dz.$$

Por otra parte, la masa total de fluido contenida en R en cualquier instante está dada por la integral triple

$$\iiint_R \rho(x, y, z, t) \, dx \, dy \, dz,$$

y la disminución por unidad de tiempo de la masa de fluido contenida en R es

$$-\frac{d}{dt} \iiint_R \rho(x, y, z, t) \, dx \, dy \, dz = - \iiint_R \rho_t(x, y, z, t) \, dx \, dy \, dz.$$

Si se cumple la ley de conservación de la masa y si no existen fuentes ni sumideros de masa en R, entonces la cantidad total de masa del fuido que sale de R a través de la superficie S debe ser exactamente igual a la pérdida de masa del fluido contenido en R. Entonces debe tenerse

$$\iiint_R \operatorname{div} (\rho \mathbf{V}) \, dx \, dy \, dz = - \iiint_R \rho_t \, dx \, dy \, dz$$

en cualquier instante t para cualquier región R. Dividiendo ambos miembros de esta identidad entre el volumen de R y reduciendo esta región hasta un punto (es decir, aplicando la derivación en el espacio) se obtiene la *ecuación tridimensional de continuidad:*

$$\operatorname{div} (\rho \mathbf{V}) = -\rho_t,$$

o bien,

(55) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0,$$

la cual expresa la *ley de conservación de la masa* para el movimiento de fluidos, en forma de ecuación diferencial.

Si no se invoca la ley de conservación de la masa, la expresión

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V})$$

es una medida de la cantidad de masa creada (o aniquilada, cuando es negativa) en la unidad de tiempo por unidad de volumen.

Particularmente interesante es el caso de un fluido homogéneo e incompresible, para el cual la densidad ρ tiene el mismo valor en todas partes y no cambia con el tiempo. Como entonces ρ es constante, de (55) se deduce que

(56) $$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

si se conserva la masa. Entonces de (52) se concluye que

(57) $$\iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$$

siempre que la superficie S limite la región R. Considérense, en particular, dos superficies, S_1 y S_2, limitadas por la misma curva orientada, C^*, en el espacio y que, en conjunto, forman la frontera, S, de una región tridimensional, R. De (57) se encuentra que

(58) $$0 = \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{S_1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{S_2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

donde, tanto sobre S_1 como sobre S_2, $\mathbf{n}$ denota el vector normal que apunta hacia afuera de R. Puede convertirse tanto a S_1 como a S_2 en las superficies orientadas S_1^* y S_2^* de manera tal que la orientación de C^* sea positiva tanto con respecto a S_1^* como con respecto a S_2^*. Sobre estas dos superficies, sea $\mathbf{n}^*$ el vector normal unitario que apunta hacia el lado positivo. (Para una orientación "derecha" del espacio esto significa que $\mathbf{n}^*$ apunta hacia ese lado de la superficie desde el cual la orientación de C^* se ve en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj). Entonces, necesariamente,

$\mathbf{n}^* = \mathbf{n}$ sobre una de las superficies S_1, S_2 y $\mathbf{n}^* = -\mathbf{n}$ sobre la otra.[1] De (58) se concluye que

$$\iint_{S_1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^* \, dS = \iint_{S_2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^* \, dS. \tag{59}$$

O, expresado en palabras, *si el fluido es incompresible y homogéneo y se conserva la masa, entonces la misma cantidad de fluido pasa a través de dos superficies cualesquiera que tienen la misma curva frontera C^* y que, en conjunto, limitan una región tridimensional en el espacio.* Esta cantidad de fluido no depende de la forma precisa de las superficies; es razonable admitir que debe estar determinada sólo por la curva frontera C^*.[2] Se llega entonces a la cuestión de cómo puede expresarse la cantidad de fluido en términos de la curva C^* únicamente. A esto se da respuesta en la sección siguiente (p. 681, por medio del teorema de Stokes.

c. *El teorema de Gauss aplicado a fuerzas en el espacio y a fuerzas superficiales*

Las fuerzas que actúan en un medio continuo pueden considerarse ya sea como fuerzas en el espacio (como las fuerzas de atracción gravitacional, electrostáticas) o como fuerzas superficiales (tales como las presiones, fuerzas de arrastre). La relación entre estos dos puntos de vista está dada por el teorema de Gauss.

Sólo se considerará el caso especial de la fuerza de un fluido de densidad $\rho = \rho(x, y, z)$, en el cual existe una presión $p(x, y, z)$ que, en general, depende del punto (x, y, z). Esto significa que la fuerza que actúa sobre una porción R del líquido, ejercida por la parte restante del mismo, puede considerarse como una fuerza que actúa en

[1] El vector normal $\mathbf{n}$ determina una orientación sobre la superficie S completa si se requiere, por ejemplo, que $\mathbf{n}$ apunte hacia el lado positivo de S. Orientando a S_1 y S_2 con relación a $\mathbf{n}$, la curva C recibe sentidos opuestos si se requiere que esté orientada positivamente con respecto a S_1 o a S_2 (ver la p. 653). Sin embargo, como C^* tiene el sentido positivo con respecto tanto a S_1^* como a S_2^* se concluye que las orientaciones dadas por $\mathbf{n}^*$ y por $\mathbf{n}$ sólo concuerdan sobre una de las superficies.

[2] La cantidad de fluido que cruza una superficie limitada por la curva cerrada C, en la unidad de tiempo, es independiente del tiempo si se establece la hipótesis adicional de que el flujo es estacionario, es decir, que el vector velocidad $\mathbf{V}$ es independiente del tiempo.

cada punto de la superficie, S, de R en la dirección del vector normal interior y de magnitud p por unidad de área de la superficie. Denotando por dx/dn, dy/dn, dz/dn los cosenos directores del vector normal *exterior* en un punto de la superficie S de R, las componentes de la fuerza por unidad de área están dadas por

$$-p\frac{dx}{dn}, \qquad -p\frac{dy}{dn}, \qquad -p\frac{dz}{dn}.$$

Por lo tanto, la resultante de las fuerzas superficiales que actúan sobre R es una fuerza con componentes

$$X = -\iint_S p\frac{dx}{dn}dS, \quad Y = -\iint_S p\frac{dy}{dn}dS, \quad Z = -\iint_S p\frac{dz}{dn}dS.$$

Por el teorema de Gauss, (50), p. 665, X, Y, Z se pueden escribir como las integrales de volumen

$$X = -\iiint_R p_x\, dx\, dy\, dz, \qquad Y = -\iiint_R p_y\, dx\, dy\, dz,$$

$$Z = -\iiint_R p_z\, dx\, dy\, dz.$$

En notación vectorial, la resultante es una fuerza $\mathbf{F}$ dada por

(60) $$\mathbf{F} = -\iiint_R \operatorname{grad} p\, dx\, dy\, dz.$$

Este resultado se puede expresar como sigue. Por una parte, las fuerzas en un fluido debidas a una presión $p(x, y, z)$ pueden considerarse como fuerzas superficiales (presión) que actúan con densidad $p(x, y, z)$, perpendiculares a cada elemento de superficie que pasa por el punto (x, y, z) y, por otra parte, como fuerzas en un volumen, es decir, como fuerzas que actúan sobre cada elemento de volumen, con densidad volumétrica grad p.

Si un fluido está en equilibrio bajo las fuerzas debidas a la presión y a la atracción gravitacional, el vector $\mathbf{F}$ debe equilibrar la fuerza total de atracción, $\mathbf{G}$, que actúa sobre el líquido contenido en R:

$$\mathbf{F} + \mathbf{G} = 0.$$

Si la fuerza gravitacional que actúa sobre una masa unitaria en el punto (x, y, z) está dada por el vector $\Gamma(x, y, z)$, se tiene

$$\mathbf{G} = \iiint_R \Gamma\rho \, dx \, dy \, dz.$$

Por la relación $\mathbf{F} + \mathbf{G} = 0$, válida para cualquier porción R del fluido, se concluye, derivando en el espacio, que se cumple la relación correspondiente para los integrandos, es decir, que en cada punto del fluido se cumple la ecuación

$$-\operatorname{grad} p + \rho\Gamma = 0\,. \tag{61}$$

Como el gradiente de un escalar es perpendicular a las superficies de nivel para ese escalar, se concluye que *para un fluido en equilibrio bajo la presión y la atracción gravitacional, atracción en cada punto de una superficie de presión constante p (superficie "isobárica") es perpendicular a la superficie.* Si se establece la hipótesis acostumbrada de que la fuerza gravitacional por unidad de masa cerca de la superficie de la Tierra está dada por el vector $\Gamma = (0, 0, -g)$, donde g es la aceleración de la gravedad, de (61) se encuentra que [1]

$$p_x = 0, \qquad p_y = 0, \qquad p_z = -g\rho. \tag{62}$$

Considérese en particular un líquido homogéneo de densidad constante, ρ, limitado por una *superficie libre* de presión 0. Por (62), sobre toda esta supersicie libre se tiene

$$0 = dp = p_x \, dx + p_y \, dy + p_z \, dz = -g\rho \, dz.$$

De aquí que $dz = 0$, lo cual significa que *la superficie libre tiene que ser un plano $z =$ constante $= z_0$.* Entonces, para cualquier punto (x, y, z) del líquido, el valor de la presión es

$$p(x, y, z) = -\int_z^{z_0} p_z(x, y, \zeta) d\zeta = g\rho \, (z_0 - z).$$

Así, a la profundidad $z_0 - z = h$ la presión tiene el valor $g\rho h$. Para un sólido sumergido parcial o completamente en el líquido, denotemos por R la porción del sólido que se encuentra por debajo de la superficie libre $z = z_0$. Apliquemos la fórmula (60)a la región R con el fin de determinar la fuerza total de presión que actúa sobre el

[1] Esta fórmula se dedujo en el Volumen I (p. 226), en la descripción de las variaciones de la presión en la atmósfera.

sólido. [1] A partir de (60) y (62) se encuentra que la resultante de las fuerzas de presión que actúan sobre el sólido es igual a una fuerza (de flotación) con componentes

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = \iiint_R g\rho\, dx\, dy\, dz;$$

esta fuerza está dirigida verticalmente hacia arriba y su magnitud es igual al peso del líquido desplazado (principio de Arquímedes).

d. La integración por partes y el teorema de Green en tres dimensiones

Precisamente como en el caso de dos variables independientes (p. 619), el teorema de Gauss (50), p. 622, aplicado a los productos au, bv, cw proporciona una *fórmula para integración por partes:*

$$(63) \qquad \iiint_R (au_x + bv_y + cw_z)\, dx\, dy\, dz = \iint_S \left(au\frac{dx}{dn} + bv\frac{dy}{dn} + cw\frac{dz}{dn}\right) dS - \iiint_R (a_x u + b_y v + c_z w)\, dx\, dy\, dz.$$

Si aquí $u = v = w = U$ y si a, b, c son de la forma $a = V_x$, $b = V_y$, $c = V_z$ para algún escalar V, se obtiene el *primer teorema de Green:*

$$(64) \qquad \iiint_R (U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z)\, dx\, dy\, dz = \iint_S U\frac{dV}{dn}\, dS - \iiint_R U\,\Delta V\, dx\, dy\, dz.$$

Aquí se usa el conocido símbolo Δ para el *operador de Laplace,* definido por

$$\Delta V = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} \,,$$

y se denota por dV/dn la derivada de V en la dirección del vector normal *exterior:*

---

[1] Cualesquiera porciones de la frontera de R que se encuentren en el plano $z = z_0$ no contribuyen en lo absoluto, puesto que, por hipótesis, $p = 0$ en esos puntos.

$$\frac{dV}{dn} = V_x \frac{dx}{dn} + V_y \frac{dy}{dn} + V_z \frac{dz}{dn}.$$

Intercambiando U y V en la fórmula (64) y restando de (64) se llega al *segundo teorema de Green:*

(65) $$\iiint_R (U\,\Delta V - V\,\Delta U)\,dx\,dy\,dz = \iint_S \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) dS.$$

e. Aplicación del teorema de a la transformación de U a coordenadas esféricas

Si se hace $V = 1$ en el teorema de Green (65), se obtiene

(66) $$\iiint_R \Delta U\,dx\,dy\,dz = \iint_S \frac{dU}{dn}\,dS = \iint_S (\text{grad } U)\cdot \mathbf{n}\,dS.$$

Precisamente como en el plano, puede usarse esta fórmula para transformar ΔU a otros sistemas de coordenadas, en particular, a las coordenadas esféricas r, ϕ, θ definidas por

$$x = r \cos\phi \operatorname{sen}\theta, \qquad y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \qquad z = r\cos\theta.$$

Se aplica la fórmula (66) a una región R en forma de cuña, descrita por desigualdades de la forma

(67) $$r_1 < r < r_2, \quad \phi_1 < \phi < \phi_2, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2.$$

La frontera S de R consiste de seis caras sobre cada una de las cuales una de las coordenadas r, ϕ, θ tiene un valor constante. Aplicando la fórmula para la transformación de las integrales triples, se escribe el primer miembro de la ecuación (66) en la forma

(68) $$\begin{aligned}\iiint_R \Delta U\,dx\,dy\,dz &= \iiint \Delta U \frac{d\,(x, y, z)}{d\,(r, \theta, \phi)}\,dr\,d\theta\,d\phi \\ &= \iiint \Delta U\, r^2 \operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\phi,\end{aligned}$$

donde la integral en el espacio r, θ, ϕ se extiende sobre la región (67). Para transformar la integral de superficie dada en (66), se introduce el vector de posición

$$\mathbf{X} = (x, y, z) = (r\cos\phi \operatorname{sen}\theta,\; r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta,\; r\cos\theta)$$

y se observa que sus primeras derivadas satisfacen las relaciones

(68a) $\quad \mathbf{X}_r \cdot \mathbf{X}_\theta = 0, \qquad \mathbf{X}_\theta \cdot \mathbf{X}_\phi = 0, \qquad \mathbf{X}_\phi \cdot \mathbf{X}_r = 0,$

(68b) $\quad \mathbf{X}_r \cdot \mathbf{X}_r = 1, \qquad \mathbf{X}_\theta \cdot \mathbf{X}_\theta = r^2, \qquad \mathbf{X}_\phi \mathbf{X}_\phi = r^2 \operatorname{sen}^2\theta.$

A partir de estas relaciones se deduce que, en cada punto, el vector X_r es normal a la superficie coordenada $r =$ constante que pasa por ese punto, el vector $\mathbf{X}_\theta$ es normal a la superficie $\theta =$ constante y el vector $\mathbf{X}_\phi$ lo es a la superficie $\phi =$ constante. Más concretamente, sobre una de las caras $r =$ constante $= r_i$ (donde i tiene el valor 1 ó 2) el vector unitario normal hacia afuera, **n**, está dado por $(-1)^i\mathbf{X}_r$. De donde, sobre esas caras

$$(\operatorname{grad} U) \cdot \mathbf{n} = (-1)^i (\operatorname{grad} U) \cdot \mathbf{X}_r = (-1)^i \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Además, usando θ y ϕ como parámetros a lo largo de una cara $r = r_i$, para el elemento de área se tiene la expresión [ver (30e), p. 486]

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{EG - F^2}\, d\theta\, d\phi = \sqrt{(X_\theta \cdot X_\theta)\ (X_\phi \cdot X_\phi) - (X_\theta \cdot X_\phi)^2}\, d\theta\, d\phi \\ &= r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi. \end{aligned}$$

Se concluye que la contribución de las dos caras $r = r_1$ y $r = r_2$ a la integral de dU/dn sobre S está representada por la expresión

$$\iint_{r=r_2} r^2 \operatorname{sen}\theta \frac{\partial U}{\partial r}\, d\theta\, d\phi - \iint_{r=r_1} r^2 \operatorname{sen}\theta \frac{\partial U}{\partial r}\, d\theta\, d\phi,$$

donde las integraciones se toman sobre el rectángulo

$$\theta_1 < \theta < \theta_2, \qquad \phi_1 < \phi < \phi_2.$$

Puede escribirse la diferencia de estas integrales como la integral triple

$$\iiint \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \operatorname{sen}\theta \frac{\partial U}{\partial r}\right) dr\, d\theta\, d\phi$$

extendida sobre la región (67).

De manera semejante, se encuentra que sobre una cara $\theta =$ constante $= \theta_i$,

$$\mathbf{n} = (-1)^i \frac{1}{r} \mathbf{X}_\theta, \qquad dS = r \operatorname{sen}\theta\, d\phi\, dr, \qquad \frac{dU}{dn} = \frac{(-1)^i}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta},$$

y sobre una cara ϕ = constante $= \phi_i$,

$$\mathbf{n} = (-1)^i \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \mathbf{X}_\phi, \qquad dS = r\ dr\ d\theta, \qquad \frac{dU}{dn} = \frac{(-1)^i}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi}.$$

Aquí también, combinando las contribuciones de las caras opuestas θ = constante o ϕ = constante, se encuentra la expresión para la in-

$$\iint_S \frac{dU}{dn} dS = \iiint \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \operatorname{sen} \theta \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi}\right)\right] dr\, d\theta\, d\phi.$$

tegral total de superficie. Comparando con la expresión (68), dividiendo entre el volumen de la cuña R y reduciendo esta cuña a un punto se llega a la expresión deseada para el operador de Laplace en coordenadas esféricas:

$$(69) \qquad \Delta U = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \operatorname{sen} \theta \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi}\right)\right\}.$$

Ejercicios 5.9e

1. Supóngase que las ecuaciones

$$x_i = x_i(p_1, p_2, p_3) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

definen un sistema coordenado ortogonal arbitrario p_1, p_2, p_3; es decir, si se pone $a_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial p_k}$, entonces se cumplen las ecuaciones

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0$$
$$a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0$$
$$a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0$$

(a) Probar que

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(p_1, p_2, p_3)} = \sqrt{e_1 e_2 e_3}\ ,$$

donde

$$e_i = a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + a_{3i}^2.$$

(b) Probar que

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{1}{e_i} \frac{\partial x_k}{\partial p_i} = \frac{1}{e_i} a_{ki}.$$

(c) Expresar $\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}$ en términos de p_1, p_2, p_3, usando el teorema de Gauss.

(d) Expresar Δu en las coordenadas focales t_1, t_2, t_3 definidas en el Ejercicio 9, Sección 3.3d, p. 303.

5.10 Teorema de Stokes en el espacio

a. Enunciado y demostración del teorema

Ya se ha visto el teorema de Stokes en dos dimensiones (p. 617). El teorema análogo en tres dimensiones relaciona la integral de la componente normal del rotacional de un vector sobre una superficie curva con la integral de la componente tangencial del vector sobre la curva frontera de la superficie. Mientras que en dos dimensiones se pasa del teorema de Gauss al teorema de Green, e inversamente, por un cambio en la notación, en tres dimensiones son teoremas esencialmente diferentes.

Sea S una superficie orientable en el espacio tres limitada por una curva cerrada C. La elección de una orientación para S la convierte en la superficie orientada S^*. Sea C^* la curva frontera de S^*, orientada positivamente con respecto a esta última. Suponiendo que el espacio está orientado positivamente con respecto a las coordenadas x, y, z, denotemos por n el vector normal unitario que en cada punto de S^* [1] apunta hacia el lado positiva de S^*. Sea t el vector tangente unitario sobre C^*, que apunta en la dirección correspondiente a la orientación de C^*. Sea $\mathbf{A} = (a, b, c)$ un vector definido cerca de S. El teorema de Stokes afirma[2] que

$$(70) \qquad \iint_S (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}\, ds.$$

Denotando por dx/dn, dy/dn, dz/dn las componentes del vector $\mathbf{n}$ y por dx/ds, dy/ds, dz/ds las de $\mathbf{t}$, el teorema de Stokes se escribe en la forma[3]

$$(71) \qquad \iint_S \left[(c_y - b_z)\frac{dx}{dn} + (a_z - c_x)\frac{dy}{dn} + (b_x - a_y)\frac{dz}{dn}\right] dS$$

[1] En efecto, esto significa que cuando se mueve un punto de S^* hacia el origen de manera tal que $\mathbf{n}$ coincida con el eje z positivo, el sentido de la rotación sobre S^* será el de la rotación de 90° que lleva al eje x positivo sobre el eje y positivo.

[2] En el Apéndice a este capítulo, p. 713, se dan las hipótesis precisas de regularidad para S, C, $\mathbf{A}$ bajo las cuales puede probarse el teorema.

[3] Ver (94c), p. 253, en relación con la definición del rotacional de un vector.

$$= \int_C \left(a\frac{dx}{ds} + b\frac{dy}{ds} + c\frac{dz}{ds}\right) ds.$$

Usando la fórmula (47c), p. 662, se tiene, de modo equivalente,

$$\text{(72)} \quad \iint_{S^*} (c_y - b_z)\, dy\, dz + (a_z - c_x)\, dz\, dx + (b_x - a_y)\, dx\, dy$$
$$= \int_{C^*} a\, dx + b\, dy + c\, dz.$$

Introduciendo la forma diferencial de primer orden

$$\text{(73a)} \qquad L = a\, dx + b\, dy + c\, dz$$

y

$$\text{(73b)} \qquad \omega = (c_y - b_z)\, dy\, dz + (a_z - c_x)\, dz\, dx + (b_x - a_y)\, dx\, dy,$$

se observa (ver la p. 363) que ω es precisamente la diferencial de L:

$$\text{(73c)} \qquad \omega = dL.$$

Si ∂S^* es la frontera positivamente orientada C^* de S^*,[1] el teorema de Stokes queda simplemente como

$$\text{(74)} \qquad \iint_{S^*} dL = \int_{\partial S^*} L.$$

En esta forma es completamente análogo al teorema de Gauss escrito como en la fórmula (53), p. 667.

La veracidad del teorema de Stokes surge inmediatamente del hecho de que el teorema ya ha sido probado para las superficies planas [ver la fórmula (10), p. 617]. Consecuentemente, si S es una superficie poliédrica compuesta de superficies poligonales planas, de modo que la curva frontera C es un polígono, puede aplicarse el teorema de Stokes a cada una de las porciones planas y sumar las fórmulas correspondientes. En este proceso las integrales de línea a lo largo de todas las aristas interiores del poliedro se cancelan e, inmediatamente, se obtiene el teorema de Stokes para la superficie poliédrica. Para obtener el enunciado general del teorema de Stokes sólo se necesita pasar al límite, yendo de los poliedros de aproxi-

---

[1] Esto concuerda con la definición general dada en la nota 2 al pie de la p. 652, para el caso $n = 2$.

mación a las superficies arbitrarias S limitadas por las también arbitrarias curvas C.

Sin embargo, la justificación rigurosa de este paso al límite es complicada; por lo tanto, habiendo hecho estas observaciones heurísticas se llevará a cabo la demostración *transformando la superficie completa* S en una superficie plana y observando que se preserva el teorema bajo tales transformaciones.

Supóngase que existe una representación paramétrica[1],

$$x = \phi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \chi(u, v)$$

para S, donde ϕ, ψ, χ son funciones con primeras derivadas continuas para las cuales el vector con componentes

$$(75) \qquad \xi = \frac{d(y, z)}{d(u, v)}, \qquad \eta = \frac{d(z, x)}{d(u, v)}, \qquad \zeta = \frac{d(x, y)}{d(u, v)}$$

no se anula. Supóngase que existe un conjunto orientado $\sum^*$ en el plano u, v, limitado por una curva cerrada orientada Γ^* tal que $\sum^*$ se aplica biunívocamente sobre la superficie S^* y, en forma correspondiente, $\sum^*$ se aplica biunívocamente sobre C^*.[2]

Ahora L determina una forma diferencial en du y dv:

$$\begin{aligned} L &= a\,(x_u\,du + x_v\,dv) + b\,(y_u\,du + y_v\,dv) + c\,(z_u\,du + z_v\,dv) \\ &= (ax_u + by_u + cz_u)\,du + (ax_v + by_v + cz_v)\,dv \end{aligned}$$

y

$$\int_{C^*} L = \int_{\Gamma^*} L,$$

donde en el segundo miembro se considera expresada en términos de du y dv. De modo semejante, ω da lugar a una forma de segundo orden en du y dv,

$$\omega = \frac{\omega}{du\,dv}\,du\,dv$$

[1] En el Apéndice a este capítulo se probará con mayor generalidad el teorema para superficies S que puedan ser construídas a partir de porciones con una representación paramétrica del tipo mencionado.

[2] Si el vector (ξ, η, ζ) tiene la dirección de $\mathbf{n}$, se tiene $\Omega(\sum^*) = \Omega(u, v)$; si (ξ, η, ζ) tiene la dirección de $-\mathbf{n}$, se tiene $\Omega(\sum^*) = -\Omega(u, v)$ En cualquier caso la curva Γ^* está orientada positivamente con respecto a $\sum^*$. Ver la p. 652

$$= [(c_y - b_z)\xi + (a_z - c_x)\eta + (b_x - a_y)\zeta]\; du\, dv,$$

y, nuevamente [ver (46a), p. 658]

$$\iint_{S^*} \omega = \iint_{\Sigma^*} \omega .$$

Además, como se probó en la p. 373, la relación $\omega = dL$ no depende de la elección de las variables independientes x, y, z o u, v.[1] Como consecuencia, la demostración de la identidad (74) se ha reducido al caso de una forma diferencial de primer orden, L, en du y dv y una región $\sum^*$ con frontera Γ^* en el plano u, v. Como se sabe que el teorema de Stokes se cumple en el plano u, v, ahora se concluye para la superficie curva S.

El teorema de Stokes da respuesta a la cuestión planteada en la p. 671. Se ha visto que para un campo vectorial dado, $\mathbf{V}(x, y, z)$, con div $\mathbf{V} = 0$, la integral

$$\iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

sobre una superficie S con normal unitario $\mathbf{n}$ sólo depende de la curva frontera C de S y no de la naturaleza particular de S. Por otra parte, en la p. 366 se encontró que un campo vectorial $\mathbf{V}$ con divergencia que se anula puede representarse como el rotacional de un vector $\mathbf{A} = (a, b, c)$ —al menos si nos restringimos a campos vectoriales definidos en un paralelepípedo con aristas paralelas a los ejes coordenados. Ahora el teorema de Stokes nos permite expresar

$$\iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

en la forma

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}\, ds,$$

la cual sólo depende de la curva frontera C de S.

[1] Esto también puede verificarse directamente probando la identidad

$$(c_y - b_z)\xi + (a_z - c_x)\eta + (b_x - a_y)\zeta = (ax_v + by_v + cz_v)_u - (ax_u + by_u + cz_u)_v,$$

donde ξ, η, ζ están definidas en (75).

Ejercicios 5.10a

1. Sea

$$I = \iint_{S^*} z\,dx\,dy - x\,dy\,dz\,,$$

donde S^* es el casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x > 1/2$, orientado positivamente con respecto al vector normal que apunta hacia el infinito.

(a) Calcular I directamente usando y, z como parámetros sobre S^*.

(b) Calcular I a partir de la fórmula de Stokes (74), p. 679, observando que

$$z\,dx\,dy - x\,dy\,dz = dL\,,$$

con

$$L = -yz\,dx - xy\,dz.$$

b. Interpretación del teorema de Stokes

La interpretación física del teorema de Stokes en tres dimensiones es semejante a la que ya se dio (p. 635) en dos dimensiones. Una vez más se interpreta el campo vectorial $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ como el campo de velocidades del movimiento de un fluido. A la integral

$$\int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}\,ds = \int_{C^*} v_1\,dx + v_2\,dy + v_3\,dz,$$

evaluada para una curva cerrada orientada C^*, se le da el nombre de *circulación* del flujo a lo largo de esta curva. El teorema de Stokes afirma que la circulación a lo largo de C^* es igual a la integral

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}\,dS,$$

donde S es cualquier supeficie orientable limitada por C, y $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario sobre S, elegido de manera tal que la cuerda (de tornillo) determinada por $\mathbf{n}$ y el sentido de la rotación de C^* sea la misma ("derecha" o "izquierda") que la determinada por el sistema x, y, z. Supóngase que se divide la circulación alrededor de C entre el área de la superficie S limitada por C, y se pasa al límite haciendo que C se reduzca a un punto sin abandonar la superficie. Este proceso de derivación en el espacio da como límite de la integral doble de la componente normal de rot $\mathbf{V}$ dividida entre el área, el valor de (rot $\mathbf{V}$)$\cdot$ $\mathbf{n}$ en el punto límite. Por lo tanto, se ve que la componente de rot $\mathbf{V}$ en la dirección del vector normal a la superficie se puede considerar como la *circulación específica* o *densidad de cir-*

culación del flujo en la superficie, en el punto correspondiente.[1]

El vector rot **V** se llama *vorticidad* del movimiento del fluido. Así, la circulación alrededor de una curva C es igual a la integral de la componente normal de la vorticidad sobre una superficie limitada por C. Se dice que el movimiento es *irrotacional* si el vector vorticidad es 0 en todo punto ocupado por el fluido, es decir, si el vector velocidad satisface las relaciones

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0.$$

Como una consecuencia del teorema de Stokes, la circulación en un movimiento irrotacional se anula a lo largo de cualquier curva C que limite una superficie contenida en la región llena por el fluido.

Si se interpreta el vector **V** como el campo de una fuerza mecánica o eléctrica, la integral de línea

$$\int_{C^*} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}\, ds$$

representa el *trabajo* realizado por el campo sobre una partícula, cuando a ésta se le hace describir la curva C^* en el sentido indicado por su orientación. Por el teorema de Stokes, la expresión para este trabajo se transforma en una integral sobre la superficie S limitada por C, siendo el integrando la componente normal del rotacional del campo de fuerza. Si el rotacional del campo de fuerzas, se anula, el trabajo realizado sobre una partícula que regresa al punto de partida es cero y se dice que el campo es *conservativo*.

Del teorema de Stokes se obtiene una nueva demostración para el teorema principal sobre las integrales de línea en el espacio (p. 135). El problema central es describir la naturaleza del campo vectorial $\mathbf{A} = (a, b, c)$ si la integral

$$\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}\, ds = \int a\, dx + b\, dy + c\, dz$$

debe anularse alrededor de una curva cerrada arbitraria C. El teorema de Stokes proporciona una nueva demostración del hecho de

[1] Estas consideraciones también demuestran que el rotacional de un vector tiene un significado independiente del sistema coordenado y, por lo tanto, es a su vez un vector, mientras no se cambie la orientación del sistema coordenado (y, por tanto, el vector **n**).

que se asegura la anulación de la integral de línea si rot $\mathbf{A} = 0$, siempre que C forme la frontera de una superficie S contenida en la región donde $\mathbf{A}$ está definido. Por lo tanto, la anulación de rot $\mathbf{A}$—o, como se dirá, la naturaleza *irrotacional* de $\mathbf{A}$— es una condición suficiente para la anulación de la integral de línea de la componente tangencial de $\mathbf{A}$ alrededor de cualquier curva cerrada que limite una superficie S en el dominio de definición de $\mathbf{A}$. Por lo discutido en la p. 127 ya se sabe que la condición también es necesaria. Si se satisface la condición rot $A = 0$ se puede representar A como el gradiente de una función $f(x, y, z)$:

$$\mathbf{A} = \operatorname{grad} f.$$

Si se toma $\mathbf{A}$ como el vector velocidad, $\mathbf{V}$, de una fluido en movimiento, la irrotacionalidad del flujo, es decir, la ecuación rot $\mathbf{V} = 0$, en una región simplemente conexa, implica que existe un *potencial de velocidad* $f(x, y, z)$ tal que

$$\mathbf{V} = \operatorname{grad} f.$$

Si, además, el fluido es homogéneo e incompresible se tiene (ver la p. 670) la relación

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0.$$

En este caso se concluye que el potencial de velocidad, f, satisface la ecuación

$$0 = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz},$$

que es la *ecuación de Laplace*, ya mencionada con anterioridad.

Ejercicios 5.10b

1. Sean φ, a y b funciones continuamente diferenciables de un parámetro t, para $0 \leqq t \leqq 2\pi$, con $a(2\pi) = a(0)$, $b(2\pi) = b(0)$, $\varphi(2\pi) = \varphi(0) + 2n\pi$ (n un entero racional), y sean x, y constantes. Interpretando las ecuaciones

$$\xi = x \cos \varphi - y \operatorname{sen} \varphi + a, \qquad \eta = x \operatorname{sen} \varphi + y \cos \varphi + b$$

como las ecuaciones paramétricas (con parámetro t) de una curva plana cerrada, Γ, probar que

$$\frac{1}{2} \int_\Gamma (\xi \, d\eta - \eta \, d\xi) = A\,(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D,$$

donde

$$A = \frac{1}{2}\int d\varphi, \qquad B = \int_\Gamma (a \cos\varphi + b \operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi,$$

$$C = \int_\Gamma (-a \operatorname{sen}\varphi + b \cos\varphi) d\varphi, \qquad D = \frac{1}{2}\int_\Gamma (a\, db - b\, da).$$

2. Supóngase que un plano rígido, P, describe un movimiento "cerrado" con respecto a un plano fijo Π con el cual coincide. Cada punto M de P describirá una curva cerrada de Π que limita un área de valor algebraico $S(M)$. Denótese por $2n\pi$ (n un entero racional) la rotación total de P con respecto a Π. Probar los resultados siguientes:
   (a) Si $n \neq 0$, existe en P un punto C tal que para cualquier otro punto M de P se tiene

   $$S(M) = \pi n \overline{CM}^2 + S(C);$$

   (b) Si $n = 0$, entonces pueden presentarse dos casos: primero, existe en P una recta orientada, Δ, tal que para todo punto M de P

   $$S(M) = \lambda\, d(M),$$

   donde $d(M)$ es la distancia de M a Δ y λ es un factor constante positivo; segundo, $S(M)$ tiene el mismo valor para todos los puntos M del plano P (teorema de Steiner).
3. Un segmento rectilíneo rígido AB describe en un plano Π un movimiento cerrado de biela: B realiza un movimiento circular cerrado en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, con centro C, mientras que A ejecuta un movimiento rectilíneo (cerrado) sobre una recta que pasa por C. Aplicar los resultados del ejemplo anterior para determinar el área de la curva cerrada en Π descrita por un punto M rígidamente conectado al segmento rectilíneo AB.
4. Los puntos extremos A y B de un segmento rectilíneo rígido AB describen una vuelta completa sobre una curva convexa cerrada, Γ. Como resultado de este movimiento, un punto M sobre AB, donde $AM = a$, $MB = b$, describe una curva cerrada Γ'. Probar que el área entre las curvas Γ y Γ' es igual a πab (teorema de Holditch).
5. Probar que si a cada elemento ds de una curva alabeada, cerrada y rígida, Γ: se le aplica una fuerza de magnitud ds/ρ en la dirección del vector normal principal (Capítulo 2, p. 257), la curva Γ permanece en equilibrio; $1/\rho$ es la curvatura de Γ en ds y se supone que es finita y continua en todo punto de Γ. (Por los principios de la estática de un cuerpo rígido, se tiene que probar que

   $$\int_\Gamma \frac{\mathbf{n}}{\rho}\, ds = 0, \qquad \int_\Gamma \frac{\mathbf{x} \times \mathbf{n}}{\rho}\, ds = 0.$$

   donde $\mathbf{n}$ denota el vector unitario normal principal de Γ en ds y $\mathbf{x}$ es el vector de posición de ds.)
6. Probar que una superficie rígida cerrada, Σ, permanece en equilibrio bajo una presión uniforme sobre todos sus elementos de superficie, dirigida hacia adentro. Si se denota por $\mathbf{n}'$ el vector normal unitario

dirigido hacia adentro para el elemento de superficie $d\sigma$, y por $\mathbf{x}$ el vector de posición de $d\sigma$ la proposición se vuelve equivalente a las ecuaciones vectoriales

$$\iint_\Sigma \mathbf{n}'\, d\sigma = 0, \qquad \iint_\Sigma \mathbf{x} \times \mathbf{n}'\, d\sigma = 0.)$$

7. Un cuerpo rígido de volumen V, limitado por la superficie Σ está completamente sumergido en un fluido de gravedad específica unitaria. Probar que el efecto estático de la presión del fluido sobre el cuerpo es el mismo que el de una sola fuerza f de magnitud V, dirigida verticalmente hacia arriba, aplicada en el centroide del volumen V.
8. Denotemos por p la distancia del centro del elipsoide Σ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

al plano tangente en el punto $P(x, y, z)$, y por dS el elemento de área en este punto. Probar las relaciones

(i) $$\iint_\Sigma p\, dS = 4\pi abc,$$

(ii) $$\iint_\Sigma \frac{1}{p}\, dS = \frac{4\pi}{3abc}(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2).$$

9. Un ángulo plano ordinario se mide por la longitud del arco que sus lados interceptan sobre un círculo unitario con centro en el vértice. Puede extenderse esta idea a un *ángulo sólido* limitado por una superficie cónica con vértice A, del modo siguiente: por definición, la magnitud del ángulo sólido es igual al área que intercepta sobre una esfera unitaria con centro en A. Así, la medida del ángulo sólido del dominio $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ es $4\pi/8 = \pi/2$. Sea ahora Γ una curva cerrada, Σ una superficie limitada por Γ y A un punto fijo fuera tanto de Γ, como de Σ. Un elemento de áreas dS en un punto M de Σ define un cono elemental con su vértice en A; fácilmente se encuentra, por medio de un sencillo argumento, que el ángulo sólido de este cono es

$$\frac{\cos\theta}{r^2}\, dS,$$

donde $r = AM$ y θ es el ángulo entre el vector $\overrightarrow{MA}$ y la normal a Σ en M. Este ángulo sólido elemental es positivo o negativo, según que θ sea agudo u obtuso. Interpretar la integral de superficie

$$\Omega = \iint_\Sigma \frac{\cos\theta}{r^2}\, dS$$

geométricamente como un ángulo sólido y demostrar que

$$\Omega = \iint_\Sigma \frac{(a-x)\, dy\, dz + (b-y)\, dz\, dx + (c-z)\, dx\, dy}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{3/2}},$$

donde (a, b, c) y (x, y, z) son las coordenadas cartesianas de A y M, respectivamente.

10. Probar, primero directamente y después interpretando la integral como un ángulo sólido, que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}=2\pi.$$

11. Probar que el ángulo sólido que subtiende la superficie completa del hiperboloide de un manto $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)-(z^2/c^2)=1$, desde su centro $(0, 0, 0)$, es

$$8c\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{b^2\cos^2\varphi+a^2\operatorname{sen}^2\varphi}{a^2b^2+b^2c^2\cos^2\varphi+a^2c^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\,d\varphi.$$

12. Demostrar que el valor de la integral

$$\Omega=\iint_\Sigma\frac{(a-x)\,dy\,dz+(b-y)\,dz\,dx+(c-z)\,dx\,dy}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{3/2}}$$

es independiente de la elección de la superficie Σ, siempre que se mantenga fija su frontera Γ. A partir de este resultado, integrando sobre el exterior de la superficie, probar que si Σ es una superficie cerrada, entonces $\Omega=4\pi$ ó 0, según que $A(a, b, c)$ esté en el interior del volumen limitado por Σ o fuera de este volumen.

13. Sea la superficie limitada por la curva cerrada Γ y considérese la integral

$$\Omega(a,b,c)=\iint_\Sigma\frac{(a-x)\,dy\,dz+(b-y)\,dz\,dx+(c-z)\,dx\,dy}{r^3},$$
$$[r^2=(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2],$$

como una función de a, b, c. Probar que las componentes del gradiente de Ω pueden expresarse como integrales de línea, como sigue:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a}=\int_\Gamma\frac{(z-c)\,dy-(y-b)\,dz}{r^3},\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial b}=\int_\Gamma\frac{(x-a)\,dz-(z-c)\,dx}{r^3},$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial c}=\int_\Gamma\frac{(y-b)\,dx-(x-a)\,dy}{r^3}.$$

Estas fórmulas, que tienen una importante interpretación en electromagnetismo, se pueden expresar por medio de la siguiente ecuación vectorial:

$$\operatorname{grad}\Omega=-\int_\Gamma\frac{\mathbf{x}\times\mathbf{dx}}{|\mathbf{x}|^3},$$

donde $\mathbf{x}$ es el vector con componentes $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$.

14. Verificar que la expresión

$$\frac{-4xy\,dx+2(x^2-y^2-1)\,dy}{(x^2+y^2-1)^2+4y^2}$$

es la diferencial total del ángulo que subtiende el segmento $-1\leqq x\leqq 1$,

$y = 0$ desde el punto (x, y). Usando este hecho, probar el resultado siguiente por medio de un argumento geométrico: sea Γ una curva orientada cerrada en el plano x, y, que no pasa por ninguno de los puntos $(-1, 0)$, $(1, 0)$. Sea p el número de veces que Γ cruza el segmento rectilíneo $-1 < x < 1$, $y = 0$ desde el semiplano superior $y > 0$ hacia el semiplano inferior $y < 0$, y sea n el número de veces que Γ cruza este segmento rectilíneo desde $y < 0$ hacia $y > 0$. Entonces,

$$\theta = \int_\Gamma \frac{-4xy\,dx + (x^2 - y^2 - 1)\,dy}{(x^2 + y^2 - 1) + 4y^2} = 2\pi(p - n).$$

Así, si Γ es la curva $r = 2\cos 2\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$, en coordenadas polares, $\theta = 0$.

15. Considérese el círculo unitario C,

$$x' = \cos\varphi, \quad y' = \operatorname{sen}\varphi, \quad z' = 0 \qquad (0 \leqq \varphi \leqq 2\pi),$$

en el plano x, y. Denótese por Ω el ángulo sólido que el disco circular $x^2 + y^2 \leqq 1$, $z = 0$, subtiende en el punto $P = (x, y, z)$. Supóngase ahora que P describe una curva cerrada orientada, Γ, que no corta al círculo C. Sea p el número de veces que Γ cruza el disco circular $x^2 + y^2 < 1$, $z = 0$, desde el semiespacio superior $z > 0$ hacia el semiespacio inferior $z < 0$ y sea n el número de veces que Γ cruza este disco desde $z < 0$ hacia $z > 0$. Si P parte de un punto P_0 sobre Γ con $\Omega = \Omega_0$, entonces al recorrer Γ (mientras Ω varía continuamente con P) P regresará a P_0 con un valor $\Omega = \Omega_1$. Por medio de un argumento geométrico probar que

$$\Omega_1 - \Omega_0 = \int_\Gamma d\Omega = 4\pi(p - n).$$

Usando la ecuación vectorial encontrada anteriormente,

$$\operatorname{grad}\Omega = -\int_\sigma \frac{\overrightarrow{PP'} \times dP'}{|PP'|^3}$$

(Ejercicio 13), probar que

$$\int_C \int_\Gamma \frac{1}{|PP'|^3} \begin{vmatrix} x' - x & dx & dx' \\ y' - y & dy & dy' \\ z' - z & dz & dz' \end{vmatrix}$$

$$= \int_\Gamma \int_C \frac{(x' - z)(dy\,dz' - dz\,dy') + (y' - y)(dz\,dx' - dx\,dz') + (z' - z)(dx\,dy' - dy\,dz')}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{3/2}}$$

$$= 4\pi(p - n).$$

[Esta integral de línea repetida, que se debe a Gauss, da el número de veces que Γ da vueltas alrededor de C. Debe hacerse notar que su anulación es necesaria si las dos curvas Γ y C (imaginadas como dos cuerdas) son separables, pero la condición no es suficiente, como se muestra en el ejemplo de la Fig. 5.13, donde $p = n = 1$ y sin embargo Γ y C no pueden separarse.]

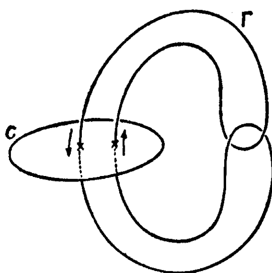


Figura 5.13

16. Sea Γ una curva cerrada en el espacio, a la cual se ha asignado un sentido definido de recorrido. Probar que existe un vector **a** con la siguiente propiedad característica: para cualquier vector unitario **n** el producto escalar **a·n** es igual al valor algebraico del área encerrada por la proyección ortogonal de Γ sobre el plano Π ortogonal a **n**. (Nótese que **n** da la orientación de Π, y Γ da la orientación de su proyección sobre Π.) En particular, la proyección de Γ sobre cualquier plano paralelo a **a** tiene un área algebraica igual a cero. (El vector **a** puede llamarse *vector de área* de Γ.)
17. Sea $f(x, y)$ una función continua con primeras y segundas derivadas continuas. Probar que si
$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0,$$
la transformación
$$u = f_x(x, y), \qquad v = f_y(x, y), \qquad w = -z + xf_x(x, y) + yf_y(x, y)$$
tiene una inversa única, que es de la forma
$$x = g_u(u, v), \qquad y = g_v(u, v), \qquad z = -w + ug_u(u, v) + vg_v(u, v).$$
18. Representar el campo vectorial gravitacional
$$X = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \qquad Y = \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$$
$$Z = \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}},$$
como un rotacional.

5.11 Indentidades de integrales en dimensiones superiores

Todas las fórmulas de Gauss y de Stokes discutidas en las secciones anteriores pueden considerarse como extensiones a dimensiones superiores del *teorema fundamental del cálculo*

(76) $$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Este teorema expresa la integral de la derivada de una función de una sola variable sobre un intervalo, en términos de los valores de la función en los puntos frontera del intervalo. De modo semejante, el teorema de Gauss

$$(77) \qquad \iiint_R (f_x + g_y + h_z)\, dx\, dy\, dz = \iint_S \left(f \frac{dx}{dn} + g \frac{dy}{dn} + h \frac{dz}{dn}\right) dS$$

($\mathbf{n}$ = normal dirigido hacia afuera) expresa una integral sobre un conjunto R en términos de cantidades tomadas sobre la frontera de R. En forma vectorial, con $\mathbf{A} = (f, g, h)$ el teorema de la divergencia se convierte en

$$\iiint_R \operatorname{div} \mathbf{A}\, dx\, dy\, dz = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Es obvio que la expresión div $\mathbf{A}$ juega el papel de la derivada f' en la fórmula simple (76).

En tres dimensiones se obtuvieron además las fórmulas que dan las integrales de expresiones diferenciales sobre curvas o superficies, en términos de integrales de frontera. Las integrales de línea consideradas tenían la forma

$$(78) \qquad \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}\, ds,$$

($\mathbf{t}$ = vector unitario tangente a la curva C) y las integrales de superficie, la forma

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

($\mathbf{n}$ = vector unitario normal a la superficie S). Existen ciertas restricciones sobre el vector $\mathbf{A}$, si las integrales de este tipo han de ser expresables en una forma que sólo involucre puntos frontera de C o de S. La razón es que hay muchas curvas o superficies en el espacio tres con la misma frontera. Una identidad que expresa una integral en términos de funciones sobre la frontera únicamente, implica que la integral no depende de la curva o superficie elegida y éste sólo puede ser el caso para vectores $\mathbf{A}$ de tipos especiales..

Así, se encoentró que si la integral de línea de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}$ sobre una curva C debe depender únicamente de los puntos extremos, P y Q, de C, entonces el campo vectorial $\mathbf{A}(x, y, z)$ tiene que ser *irrotacional;* es decir, rot $\mathbf{A} = 0$. Si se satisface esta condición en un conjunto sim-

plemente conexo que contenga a C, puede encontrarse un escalar $U = U(x, y, z)$ tal que $\mathbf{A} = \text{grad } U = (U_x, U_y, U_z)$; en ese caso, en efecto, se tiene una identidad entre integrales del tipo deseado:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}\, ds = \int_C dU = U(Q) - U(P).$$

De manera semejante, para que la integral de superficie

$$\iint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

sólo dependa de la curva frontera C de S, el vector $\mathbf{A}$ tiene que satisfacer la condición necesaria[1] div $\mathbf{A} = 0$. Si se satisface la condición div $\mathbf{A} = 0$ puede representarse $\mathbf{A}$ en la forma $\mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{B}$ (ver la p. 365) y es posible expresar, por medio del teorema de Stokes, la integral de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ sobre la superficie S en términos de una integral sobre C,

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S (\text{ rot } \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{t}\, ds. \tag{79}$$

En vista de estos ejemplos, es de esperar que existan fórmulas más generales que expresen combinaciones apropiadas de derivadas de funciones sobre un conjunto m dimensional en el espacio euclidiano M dimensional, como integrales de funciones sobre la frontera $(m - 1)$ dimensional del conjunto. Para $m = M$ el teorema de Gauss (77) sugiere una generalización obvia:

$$\iint_R \cdots \int (f^1_{x_1} + f^2_{x_2} + \cdots + f^M_{x_M})\, dx_1 \cdots dx_M$$
$$= \int_S \cdots \int \left(f^1 \frac{dx_1}{dn} + \cdots + f^M \frac{dx_M}{dn}\right) dS.$$

[1] Supóngase que la integral doble de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ sobre cualquier superficie S sólo depende de la frontera C de S. Entonces la integral es la misma para dos superficies cualesquiera con la misma frontera, si se define la dirección de $\mathbf{n}$ consistentemente sobre las dos superficies (es decir, de modo que los vectores normales $\mathbf{n}$ se conviertan uno en el otro si se deforma paulatinamente una de las superficies hasta convertirse en la otra). En caso de que las dos superficies en conjunto formen la frontera σ de un conjunto R en el espacio, la integral de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{N}$ sobre σ es 0 si $\mathbf{N}$ denota el vector normal unitario a σ que apunta hacia afuera de R. Por el teorema de la divergencia, se concluye entonces que la integral de div $\mathbf{A}$ sobre R se anula. Puesto que R es arbitraria, por derivación en el espacio se encuentra que div $\mathbf{A} = 0$.

Aquí R en un conjunto en el espacio M, limitado por la hipersuperficie $(M-1)$ dimensional, S, con normal exterior $\mathbf{n}$, y $f^1, f^2, \ldots, f^M$ son funciones de $x_1, \ldots, x_M$. Por otra parte, la fórmula de Stokes en la forma (79) no tiene una análoga tan obvia de este tipo. Sin embargo, el cálculo de las formas diferenciales *exteriores* o *alternantes* conduce inmediatamente a conjeturar la *fórmula general de Stokes*

$$\int \cdots \int_{S^*} d\omega = \int \cdots \int_{\partial S^*} \omega \tag{80}$$

para formas diferenciales arbitrarias, ω, de orden $m-1$ y superficies orientadas m dimensionales arbitrarias, S^*, son frontera $(m-1)$ dimensional, ∂S^*, apropiadamente orientada. En el Apéndice a este capítulo se probará la fórmula general (80) sin aplicar otras ideas aparte de las que ya surgieron en la demostración rigurosa de los casos especiales (77) y (79).

Apéndice: Teoría general de las superficies y de las integrales de superficie

Las demostraciones rigurosas de los teoremas de Gauss y de Stokes y sus extensiones a dimensiones superiores requieren un análisis más cuidadoso de las nociones de superficie, de orientación de superficies y de integrales sobre superficies. En este apéndice se presentan tales análisis.

A.1 Superficies e integrales de superficie en tres dimensiones

a. Superficies elementales

Las superficies elementales son esencialmente las análogas a los arcos simples definidos en el Volumen I, p. 334. Estas forman las partes constitutivas de superficies de estructura más complicada.

Una superficie elemental, σ, en el espacio x, y, z es un conjunto de puntos $P = (x, y, z)$ representado paramétricamente por las tres funciones

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v) \tag{1a}$$

donde (1) el dominio U de las funciones es un conjunto acotado abierto en el plano u, v; (2) f, g, h son continuas y tienen primeras

derivadas continuas en U; (3) se satisface la desigualdad

$$(1b)\quad W = \sqrt{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} h_u & h_v \\ f_u & f_v \end{vmatrix}^2}$$
$$= \sqrt{(f_u g_v - f_v g_u)^2 + (g_u h_v - g_v h_u)^2 + (h_u f_v - h_v f_u)^2} > 0$$

en todos los puntos de U; y (4) la aplicación del conjunto U en el plano u, v sobre el conjunto σ en el espacio x, y, z es biunívoca y la aplicación inversa de σ sobre U también es continua.

La cantidad W representa la longitud del vector con componentes

$$(2)\quad A = g_u h_v - g_v h_u, \qquad B = h_u f_v - h_v f_u, \qquad C = f_u g_v - f_v g_u,$$

que es el producto vectorial de los dos vectores

$$(3)\qquad (f_u, g_u, h_u) \qquad \text{y} \qquad (f_v, g_v, h_v).$$

Los dos vectores en (3) son tangenciales a la superficie, mientras que el vector (A, B, C) es perpendicular a aquéllos dos y, por tanto, normal a la superficie. La ecuación (1b) garantiza que sólo existen dos direcciones normales a la superficie, a saber, la del vector (A, B, C) y la de su opuesto $(-A, -B, -C)$.

En cada punto de σ, al menos una de las tres cantidades A, B, C no se anula. Si, digamos, $C \neq 0$ en un punto $P_0 = (x_0, y_0\ z_0)$ correspondiente a un punto paramétrico (u_0, v_0) en U, puede hallarse, para un número positivo ε lo suficientemente pequeño, un número $\delta > 0$ tal que cada pareja (x, y), con

$$(4)\qquad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

es representable de modo único en la forma

$$(5)\qquad x = f(u, v), \qquad y = g(u, v),$$

con

$$(6)\qquad \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} < \varepsilon.$$

Los valores u, v determinados por x, y son las funciones

$$(7)\qquad u = \phi(x, y), \qquad v = \psi(x, y),$$

continuas y con primeras derivadas continuas para los (x, y) que satisfacen (4). Por la supuesta dependencia continua de (u, v) respecto

de P, se ve que todo punto P sobre la superficie σ que esté lo suficientemente próximo a P_0 tiene parámetros (u, v) que satisfacen (6). Si, además, la distancia de P a P_0 es $< \delta$, las coordenadas x, y de P satisfarán (4). De donde, para todo P sobre σ lo suficientemente próximo a P_0, pueden expresarse los valores paramétricos u, v en términos de x, y por medio de (7). Entonces, al sustituir estos valores en la ecuación $z = h(u, v)$, se tiene una *representación no paramétrica*

$$z = h(\phi(x, y), \psi(x, y)) = H(x, y), \tag{8}$$

aplicable a todos los puntos de la superficie σ que estén lo suficientemente próximos a P_0. De modo semejante, si la cantidad B no se anula se obtiene una representación local de la forma $y = G(x, z)$ y, en el caso de $A \neq 0$, una representación de la forma $x = F(y, z)$.

La misma superficie elemental σ tiene muchas representaciones paramétricas diferentes, que sin embargo, están todas relacionadas de una manera sencilla. Supóngase que

$$\bar{x} = \bar{f}(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{y} = \bar{g}(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{z} = \bar{h}(\bar{u}, \bar{v}) \qquad \text{para} \qquad (\bar{u}, \bar{v}) \text{ en } \bar{U} \tag{9}$$

es una segunda representación paramétrica de σ que también satisface los cuatro requerimientos. La correspondencia biúnica y bicontinua entre U y σ y entre $\bar{U}$ y σ establece entonces una aplicación continua uno a uno, con inversa continua, del conjunto $\bar{U}$ sobre el conjunto U:

$$u = \alpha(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = \beta(\bar{u}, \bar{v}) \qquad \text{para} \qquad (\bar{u}, \bar{v}) \text{ en } \bar{U}. \tag{10}$$

Si para una cierto $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ en $\bar{U}$ los valores correspondientes (u_0, v_0) son tales que la cantidad $C(u_0, v_0)$ no es cero, entonces se aplica la representación (7) para todos los (u, v) cerca de (u_0, v_0), y, de aquí, usando (9) se encuentra que

$$u = \alpha(\bar{u}, \bar{v}) = \phi(\bar{f}(\bar{u}, \bar{v}), \bar{g}(\bar{u}, \bar{v}))$$
$$v = \beta(\bar{u}, \bar{v}) = \psi(\bar{f}(\bar{u}, \bar{v}), \bar{g}(\bar{u}, \bar{v}))$$

para todo $(\bar{u}, \bar{v})$ lo suficientemente próximo a $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$. Como ϕ, ψ, f, g son todas funciones con primeras derivadas continuas, se concluye que las funciones α, β que describen el cambio de parámetros (10) no sólo son continuas sino que también tienen primeras derivadas continuas.

Poniendo

$$(11) \qquad \Delta = \frac{d(u, v)}{d(\bar{u}, \bar{v})} = \frac{\partial\alpha}{\partial\bar{u}}\frac{\partial\beta}{\partial\bar{v}} - \frac{\partial\alpha}{\partial\bar{v}}\frac{\partial\beta}{\partial\bar{u}},$$

de las reglas para el jacobiano del producto de dos aplicaciones [ver (31b), p. 258] se encuentra que

$$(12a) \qquad \bar{C} = \frac{d(x, y)}{d(\bar{u}, \bar{v})} = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \cdot \frac{d(u, v)}{d(\bar{u}, \bar{v})} = C\Delta$$

y, de manera sumejante, que

$$(12b) \qquad \bar{B} = B\Delta, \qquad \bar{A} = A\Delta.$$

En particular, se encuentra que el jacobiano de la aplicación (10) entre las dos regiones paramétricas no se anula, dado que, por (12a, b),

$$(13) \qquad \bar{W} = \sqrt{\bar{A}^2 + \bar{B}^2 + \bar{C}^2} = \sqrt{\Delta^2(A^2 + B^2 + C^2)} = |\Delta|\, W$$

y, por hipótesis, $\bar{W} \neq 0$.

Por supuesto, se cumplen las mismas proposiciones para las expresiones de $\bar{u}, \bar{v}$ en términos de u, v. El hecho importante es que *la relación entre dos sistemas paramétricos para la misma superficie elemental satisface todas las hipótesis establecidas en las demostraciones de las leyes de transformación para las áreas e integrales.*

b. Integral de una función sobre una superficie elemental

Nada difícil hay en la noción de *una función continua F definida en los puntos P de una superficie elemental σ.* Sólo se requiere que con cada $P \in \sigma$ exista asociado un valor $F = F(P)$ de manera tal que para una sucesión de puntos P_n sobre σ que converja a un punto P de σ, se tenga

$$\lim_{n\to\infty} F(P_n) = F(P).$$

En cualquier representación paramétrica particular (1a) F se convierte en una función de u, v en el dominio U, y la continuidad de F sobre σ se vuelve equivalente[1] a la continuidad de F como una función de u y v.

Nos restringiremos aquí a las funciones continuas, F, sobre σ que sean cero fuera de algún subconjunto compacto (es decir, cerrado y

[1] Aquí se aplica el carácter bicontinuo de la relación entre σ y U.

acotado) s de σ. Los puntos paramétricos correspondientes (u, v) forman entonces un subconjunto compacto[1], S, de U. Entonces se define la integral de F sobre la superficie elemental σ por medio de la fórmula

$$(14) \qquad \iint_\sigma F\,dA = \iint FW\,du\,dv,$$

donde W es la expresión dada por (1b). Aquí FW es una función continua de u, v, que se define como 0 para (u, v) fuera de S; por lo tanto, FW es integrable. Todavía tiene que demostrarse que la integral de superfice de F sobre σ definida por (14) no depende de la representación paramétrica particular (1a). Esto se deduce inmediatamente de la ley de transformación (13) para W y de la fórmula general (16b), p. 403, para la transformación de las integrales dobles bajo un cambio de variables de u, v a $\bar{u}$, $\bar{v}$. En efecto,

$$\iint FW\,du\,dv = \iint FW\left|\frac{d(u, v)}{d(\bar{u}, \bar{v})}\right| d\bar{u}\,d\bar{v}$$
$$= \iint FW\,|\Delta|\,d\bar{u}\,d\bar{v} = \iint F\bar{W}\,d\bar{u}\,d\bar{v}\,.$$

La independencia de la integral de FW respecto de la representación paramétrica particular significa que *la forma diferencial* $W\,du\,dv = dA$ es invariante; ésta puede identificarse con el *elemento de área.*

Sería fácil extender la noción de integral sobre una superficie elemental a funciones más generales, aunque no lo haremos en lo que sigue. Esto incluye la extensión de la noción de mensurabilidad segun Jordan a un conjunto s cuya cerradura esté contenida en la superficie elemental σ; simplemente se requiere que el conjunto correspondiente, S, de puntos (u, v) en el plano paramétrico sea un conjunto mensurable según Jordan cuya cerradura esté en U. De las relaciones entre representaciones paramétricas diferentes, inmediatamente se ve que la mensurabilidad según Jordan de s no depende de la represen-

---

* Para $(u_n, v_n) \in S$ y $(u_n, v_n) \to (u, v)$ los puntos correspondientes P_n de σ están en S. La compacidad de s implica que una subsucesión de los P_n converge a un punto P de s. Por la continuidad, la convergencia de los P_n a P implica la convergencia de los (u_n, v_n) hacia el punto parámetro correspondiente en S. Por tanto, $(u, v) \in S$, lo cual prueba que S es cerrado. Es acotado por ser un subconjunto del conjunto acotado U.

tación paramétrica particular.[1] Lo mismo se cumple para el área de s, que puede definirse como

$$A(s) = \iint_S dA = \iint_S W\, du\, dv.$$

De importancia particular son los conjuntos s cuya cerradura está sobre σ y que tienen área 0. Estos corresponden a conjuntos S en el plano u, v de área 0; lo que significa que S puede ser cubierto por un número finito de cuadrados contenidos en U de área total arbitrariamente pequeña.

c. *Superficies elementales orientadas*

Se dice que una representación paramétrica particular (la) de la superficie elemental σ define una *orientación* particular de σ (aquélla que es positiva con respecto al sistema u, v). Se dice también que dos conjuntos de parámetros, u, v y $\bar{u}$, $\bar{v}$ para la superficie elemental σ dan a ésta la misma orientación si el jacobiano

$$\frac{d(\bar{u}, \bar{v})}{d(u, v)}$$

es positivo en todos los puntos de los dominios paramétricos, y que le dan orientaciones opuestas si el jacobiano es negativo en todos esos puntos. La combinación de la superficie elemental σ con una orientación particular se conoce como *superficie elemental orientada* σ^*.

Por las hipótesis establecidas, el jacobiano no puede anularse. Dado que también es una función *continua* de los parámetros, puede asegurarse que tiene signo constante cuando el dominio de los parámetros es un conjunto *conexo*. En ese caso sólo existen dos orientaciones posibles para una superficie elemental, σ, que pueden distinguirse como σ^* y $-\sigma^*$. No obstante, es evidente que el número de orientaciones posibles es mayor para los conjuntos no conexos, donde pueden cambiarse independientemente entre sí las orientaciones de las partes de σ correspondientes a las diferentes componentes de U.

La orientación de la superficie elemental está íntimamente relacionada con la selección de una dirección normal sobre σ o con la "distinción entre los lados" de σ. Una representación paramétrica particular (1a) de σ define, por medio de las fórmulas (2), en cada

[1] Ver la p. 601.

punto P las cantidades A, B, C que pueden considerarse como las componentes de un vector perpendicular a σ en P. Este vector tiene la misma dirección que el *vector unitario* con componentes

(15) $$\xi = \frac{A}{W}, \qquad \eta = \frac{B}{W}, \qquad \zeta = \frac{C}{W}.$$

Cuando se cambian los parámetros de u, v a $\bar{u}, \bar{v}$ las cantidades A, B, C cambian y son remplazadas por las cantidades proporcionales $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, de acuerdo con las leyes (11) y (12a). Aquí el factor de proporcionalidad es precisamente la cantidad

$$\Delta = \frac{d(u, v)}{d(\bar{u}, \bar{v})}$$

Por tanto, *el vector normal unitario* (ξ, η, ζ) *es el mismo para orientaciones iguales de* σ *y opuesto para orientaciones opuestas*. De modo equivalente, la orientación de σ^* determina en cada punto un cierto *lado* de σ, a saber, aquel hacia el cual apunta el vector normal (ξ, η, ζ).[1]

La orientación de σ^* también puede asignar un sentido definido a toda curva simple cerrada, C, que se encuentre sobre σ; basta atribuir a C ese sentido que, sobre la curva cerrada γ que se encuentra en el plano u, v y que corresponde a C, es positivo con respecto a la región finita encerrada por γ.

La especificación de una orientación para la superficie elemental es inprescindible cuando en lugar de integrales de la forma $\iint F\,dA$, donde F es un escalar, se considera la integral de una forma diferencial

(16) $$\omega = a\,dy\,dz + b\,dz\,dx + c\,dx\,dy,$$

donde, digamos, a, b, c son funciones continuas sobre σ que se anulan fuera de un subconjunto cerrado y acotado. Por supuesto, aquí la interpretación natural para la integral, sugerida por las fórmulas de sustitución, es

$$\iint \omega = \iint \left[a\frac{d(y, z)}{d(u, v)} + b\frac{d(z, x)}{d(u, v)} + c\frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right] du\,dv$$

[1] Este es el lado *positivo* de σ^*, el cual depende de la orientación del sistema coordenado x, y, z- ver la p. 644. En la notación usada en la p. 646, se tiene

$$\Omega(\sigma^*) = \Omega(u, v).$$

$$= \iint (aA + bB + cC)\, du\, dv$$

$$= \iint (a\xi + b\eta + c\zeta)\, W du\, dv = \iint (a\xi + b\eta + c\zeta)\, dA,$$

donde se han aplicado las relaciones (15) y (14). Aquí ξ, η, ζ son los cosenos directores del vector normal determinado por la selección de los parámetros u, v; su signo depende de la orientación de la superficie σ. Así, primero se define la integral de ω sobre una de las superficies *orientadas*, σ^*, que se obtienen de σ. Se pone

$$(17) \qquad \iint_{\sigma^*} \omega = \iint \left[a \frac{d(y, z)}{d(u, v)} + b \frac{d(z, x)}{d(u, v)} + c \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right] du\, dv$$

$$= \iint (a\xi + b\eta + c\zeta)\, dA,$$

donde u, v debe ser uno de los sistemas paramétricos usados para definir la orientación de σ^*, o bien, estar relacionado con tal sistema por medio de una sustitución con jacobiano positivo, y donde ξ, η, ζ es la dirección normal inducida por la orientación de σ^*. Si $-\sigma^*$ es la superficie elemental con la orientación opuesta, se tiene (18)

$$(18) \qquad \iint_{-\sigma^*} \omega = - \iint_{\sigma^*} \omega.$$

d. Superficies simples

Sea σ una superficie elemental con una representación paramétrica (1a), donde el punto paramétrico (u, v) varía sobre el conjunto abierto U. Si U' es cualquier subconjunto abierto de U, evidentemente los puntos de σ con (u, v) restringido a U' forman una superficie elemental, σ', contenida en σ. En efecto, las cuatro condiciones dadas inmediatamente se aplican a σ', usando los mismos parámetros u, v. Como un ejemplo, se observa que los puntos de σ que están a una distancia $< \varepsilon$ de un punto dado (x_0, y_0, z_0) forman nuevamente una superficie elemental (si no se trata de un conjunto vacío), porque esos son los puntos cuyos valores paramétricos u, v satisfacen

$$(19) \qquad [f(u, v) - x_0]^2 + [g(u, v) - y_0]^2 + [h(u, v) - z_0]^2 < \varepsilon^2,$$

y como f, g, h son funciones continuas en U, el conjunto U' de tales puntos (u, v) es abierto.

Es menos obvio que *la superficie elemental más general* σ' *contenida en la superficie elemental* σ *puede obtenerse restringiendo el dominio de los parámetros* σ *a un conjunto abierto apropiado.*

Para demostrarlo, supóngase que la superficie elemental σ tiene la representación paramétrica (1a) para $(u, v) \in U$. Sea σ' una superficie elemental con la representación paramétrica (9), donde $(\bar{u}, \bar{v})$ varían sobre el conjunto $\bar{U}$. Sea σ' un subconjunto de σ. Entonces todo $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{U}$ determina un punto $P \in \sigma$, que, a su vez, determina un punto $(u, v) \in \bar{U}$ cuyas coordenadas son funciones de $\bar{u}$, $\bar{v}$:

$$(20) \qquad u = \alpha(\bar{u}, \bar{v}), \qquad v = \beta(\bar{u}, \bar{v}) \qquad \text{para} \qquad (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{U}.$$

Por medio de (20), el conjunto $\bar{U}$ se aplica sobre un subconjunto U' de U. Es evidente entonces que el conjunto σ' proviene de σ al restringirse los puntos paramétricos (u, v) al subconjunto U' de U. Sólo falta ver que U' es *abierto*. Sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de σ' que corresponde, respectivamente, a los puntos paramétricos $(\bar{u}_0, \bar{y}_0)$ en $\bar{U}$ y (u_0, v_0) en U'. Sean $\bar{C}$ y C diferentes de 0 en ese punto.[1] Entonces, por medio de

$$x = \bar{f}(\bar{u}, \bar{v}), \qquad y = \bar{g}(\bar{u}, \bar{v})$$

una vecindad de $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ es aplicada sobre un conjunto en el plano x, y, que cubre una vecindad de (x_0, y_0); los puntos correspondientes (u, v) obtenidos a partir de (7) cubren entonces una vecindad de (u_0, v_0), de modo que se ve que U' es un conjunto abierto.

Además, se ve que en una vecindad lo suficientemente pequeña de P_0 las dos superficies σ y σ', concuerdan, ya que todo P sobre σ suficientemente cerca de P_0 tiene valores paramétricos (u, v) arbitrariamente próximos a (u_0, v_0); así, para P lo suficientemente próximo a P_0, se tiene $(u, v) \in U'$, dado que (u_0, v_0) es un punto interior de U' y, por tanto, se ve que $P \in \sigma'$. Se ha demostrado que:

Si la superficie elemental σ' *está contenida en la superficie elemental* σ *y si* P_0 *es un punto de* σ'*, entonces puede encontrarse una vecindad de* P_0 *lo suficientemente pequeña en la que* σ *y* σ' *concuerden.*

[1] Puede suponerse que las tres cantidades $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C} \neq 0$ en P_0, aplicando, si es necesario, una rotación apropiada del espacio x, y, z. Al menos una de las cantidades A, B, C no se anula en P_0; supóngase que es C.

Cualquier orientación impuesta sobre la superficie elemental σ inmediatamente determina una orientación única sobre cualquier superficie elemental σ' contenida en σ. Sólo se necesita referir σ' al mismo sistema paramétrico que define la orientación de σ y tomar ese sistema para fijar la orientación de σ'.

Ahora estamos en posición de dar un significado preciso a la noción más general de superficie simple, como un objeto constituído por porciones reunidas de superficies elementales:

Se dice que un conjunto τ *en el espacio* x, y, z *es una superficie simple si para cada punto* P_0 *sobre* τ *existe un* $\varepsilon > 0$ *tal que los puntos de* τ *que se encuentran a una distancia menor que* ε *de* P_0 *forman una superficie elemental.*

Así, para todo $P_0 \in \tau$ existe una superficie elemental σ que concuerda con τ cerca de P_0 y está contenida en τ. Puede demostrarse que la intersección de dos superficies elementales, σ' y σ'', contenidas en la superficie simple τ es, a su vez, una superficie elemental (si no se trata de un conjunto vacío), porque si P_0 es un punto común a σ' y σ'', puede encontrarse una vecindad ε N_ε de P_0 tal que $\sigma = N_\varepsilon \cap \tau$ sea una superficie elemental. Aquí σ contiene a las dos superficies elementales $N_\varepsilon \cap \sigma'$ y $N_\varepsilon \cap \sigma''$ Consecuentemente, σ' y σ'' concuerdan con σ, y, por tanto, entre sí, en todos los puntos suficientemente cercanos a P_0. Si se refiere σ' a los parámetros u, v con u_0, v_0 correspondiendo a P_0, todo (u, v) lo suficientemente próximo a (u_0, v_0) corresponderá a puntos de σ' que están en σ''. De aquí que los puntos parámetro (u, v) correspondientes a puntos (x, y, z) en $\sigma' \cap \sigma''$ forman un conjunto abierto. Así, $\sigma' \cap \sigma''$ es una superficie elemental.

Análogamente se define una *superficie simple orientada:*

La superficie simple τ *está orientada si se representa como la unión de superficies elementales a cada una de las cuales se le ha dado una orientación, siempre que las orientaciones concuerden en la intersección de cualesquiera dos de las superficies elementales. Dos orientaciones de* τ *se consideran idénticas si conducen a las mismas orientaciones en los puntos comunes a cualesquiera dos de las superficies elementales orientadas que se usaron al definir las orientaciones de* τ. *De modo equivalente, dos orientaciones son idénticas si conducen a la misma selección de una dirección normal en cada punto de* τ.

Se presenta un caso de importancia especial cuando la superficie simple τ es la frontera de un conjunto R en el espacio x, y, z. Aquí

se supone que R es la cerradura de un conjunto abierto acotado.[1] En ese caso, puede asignarse una orientación a τ para la cual el sentido positivo asignado por la orientación a cada normal de τ sea el "que apunta hacia afuera de R" o bien, el del vector "normal exterior". De hecho, para cada punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sobre τ, puede hallarse una vecindad en la que τ coincida con una superficie elemental. Incluso puede elegirse la vecindad tan pequeña que τ pueda representarse no paramétricamente en esa vecindad, digamos, por una ecuación

$$(21) \qquad z = F(x, y) \quad \text{válida para} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$$

Si dos puntos P y P' en el espacio pueden unirse por medio de un arco que no contenga punto alguno de la frontera τ de R, ambos están en R o ninguno de ellos está en R. Evidentemente, éste es el caso para dos puntos cualesquiera que satisfagan una de las dos condiciones

$$(22a) \qquad F(x, y) < z < F(x, y) + \delta, \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$$

o

$$(22b) \qquad F(x, y) - \delta < z < F(x, y), \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2,$$

siempre que δ sea un número positivo suficientemente pequeño. Así, cada uno de los dos conjuntos (22a) y (22b) está completamente contenido en R, o bien, no tiene puntos en común con R. Ambos conjuntos no pueden estar contenidos en R, porque entonces el conjunto (21) también pertenecería a R, puesto que R es cerrado, y P_0 no sería un punto frontera de R. Ni ambos conjuntos pueden estar libres de puntos de R, ya que entonces P_0 no podría ser un límite de los puntos interiores de R. Por tanto, uno de los conjuntos (22a) y (22b) está contenido en R. Si (22b) es ese conjunto, elíjanse los parámetros $u = x, v = y$ para asignar una orientación a la superficie elemental (21), escribiendo

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = F(u, v).$$

La dirección normal correspondiente tiene los cosenos directores [ver (2) y (15)]

[1] Esto significa que R es cerrado y acotado y que todo punto frontera de R es el límite de los puntos interiores.

$$\xi = -\frac{F_u}{W}, \qquad \eta = -\frac{F_v}{W}, \qquad \zeta = \frac{1}{W}.$$

Puesto que $\zeta > 0$, la normal en cualquier punto de la superficie *apunta* hacia afuera de R, en el sentido de que cualquier punto sobre la normal considerada en un punto de (21), que esté lo suficientemente próximo a la superficie, estará en el conjunto (22a) y, por tanto, fuera de R. De manera semejante, si el conjunto (22a) pertenece a R se define la orientación de (21) mediante la representación paramétrica

$$x = v, \qquad y = u, \qquad z = F(u, v),$$

la cual conduce a $\zeta = -1/W < 0$ y nuevamente, singulariza la normal dirigida hacia afuera de R.

Así, se ha representado τ como la unión de superficies simples orientadas. Cuando, debido al significado geométrico de la orientación en relación con el conjunto R, las orientaciones concuerdan al traslapar superficies simples, se dice que τ está orientada positivamente con respecto a R.

e. Particiones de la unidad e integrales sobre superficies simples

Dada una superficie simple τ, se desea definir

$$\iint_\tau F\, dA$$

bajo la hipótesis de que F es una función continua sobre τ que se anula fuera de algún subconjunto cerrado y acotado, s, de τ. (En caso de que la superficie completa τ sea cerrada y acotada, la definición proporcionará la integral sobre τ de una función continua *arbitraria* sobre τ misma). Se aplicará al artificio conocido como *partición de la unidad* para reducir estas integrales a integrales sobre subconjuntos compactos de superfcies elementales, que ya se han definido.

Una partición de la unidad consiste de un número finito de funciones $\chi_1(P), \chi_2(P), \ldots, \chi_N(P)$ definidas y continuas en los puntos P

[1] Aquí se supone que R tiene la orientación del sistema coordenado x, y, z.

del conjunto s, con las propiedades:

1. $\chi_i(P) \geqq 0$ para todo $P \in s$ e $i = 1, \ldots, N$;
2. $\chi_1(P) + \chi_2(P) + \cdots + \chi_N(P) = 1$ para todo $P \in s$
3. para cada $i = 1, \ldots, N$ existe una superficie elemental, σ_i contenida en τ tal que $\chi_i(P) = 0$ para P en s, fuera de un cierto subconjunto compacto de σ_i.

(Por supuesto, la propiedad 2 es la que da origen al nombre de *partición de la unidad.*)

Supóngase que se tiene una partición de la unidad de este tipo para s. Para $P \in s$ puede escribirse

$$F(P) = F(P)\,\chi_1(P) + F(P)\,\chi_2(P) + \cdots + F(P)\,\chi_N(P). \tag{23a}$$

Aquí cada término está definido y es continuo para P en s. Sin embargo, como se supuso que $F(P)$ está definida y es continua sobre toda la superficie τ y se anula fuera del conjunto s, puede extenderse cada término $F(P)\,\chi_i(P)$ sobre la totalidad de τ como una función continua, simplemente definiendo $F\,\chi_i$ como cero para los puntos de τ que no estén en s.

Entonces la integral de F sobre τ se define por la fórmula

$$\iint_\tau F\,dA = \sum_{i=1}^{N} \iint_{\sigma_i} F\,\chi_i\,dA \tag{23b}$$

Aquí las integrales de la derecha tienen un significado, puesto que $F\,\chi_i$ es continua sobre la superficie elemental σ_i y se anula fuera de un subconjunto compacto de σ_i.

Para completar la definición, se tiene que demostrar que la expresión (23b) para la integral de F sobre τ no depende de la partición de la unidad *particular* usada. Supóngase que se tiene una segunda partición que consiste de las funciones $\chi_1'(P)$, $\chi_2'(P), \ldots, \chi_m'(P)$, que se anulan, respectivamente, fuera de subconjuntos compactos de las superficies elementales $\sigma_1', \ldots, \sigma_m'$. Para cada $i = 1, \ldots, N$ y cada $k = 1, \ldots, m$, el conjunto

$$\sigma_i \cap \sigma_k'$$

es, a su vez, una superficie elemental (si no se trata de un conjunto vacío), puesto que tanto las σ_i como las σ_k' están sobre τ. Es más, la función $F\,\chi_i\,\chi_k'$ se anula fuera de un subconjunto compacto de esa

superficie. De aquí que la fórmula (23b) da

$$\begin{aligned}\iint_{\tau} F\,dA &= \sum_i \iint_{\sigma_i} F\chi_i\,dA\\ &= \sum_{i,k} \iint_{\sigma_i} F\chi_i\chi_k'\,dA\\ &= \sum_{i,k} \iint_{\sigma_i\cap\sigma_k} F\chi_i\chi_k'\,dA\\ &= \sum_{i,k} \iint_{\sigma_k} F\chi_i\chi_k'\,dA\\ &= \sum_{k} \iint_{\sigma_{k'}} F\chi_k'\,dA,\end{aligned}$$

lo cual demuestra que una partición diferente conduce al mismo valor para la integral.

Sólo falta exhibir una partición específica de la unidad. Por definición, para todo punto Q de la superficie simple τ existe un número $\varepsilon_Q > 0$ tal que los puntos de τ que se encuentran dentro de una distancia ε_Q de Q forman una superficie elemental σ_Q. Asóciese a Q la función de P definida por

$$\text{(24a)} \qquad \psi_Q(P) = \begin{cases} \varepsilon_Q - 2\overline{PQ} \text{ para } \overline{PQ} < \dfrac{1}{2}\varepsilon_Q \\ 0 \text{ para } \overline{PQ} \geqq \dfrac{1}{2}\varepsilon_Q. \end{cases}$$

Aquí $\overline{PQ}$ denota la distancia entre los puntos P y Q. La función $\psi_Q(P)$ está definida y es continua para todo P en el espacio y, por tanto, en particular, es continua sobre σ_Q. El número ε_Q puede elegirse tan pequeño que el conjunto de los puntos P sobre σ_Q para los cuales $\overline{PQ} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_Q$ sea cerrado.[1] Estos puntos forman entonces un subconjunto compacto de σ_Q fuera del cual la función $\psi_Q(P)$ se anula.

Tómese ahora para cada Q sobre τ la bola abierta de radio $\frac{1}{2}\varepsilon_Q$ en la que la función ψ_Q sea positiva. Por el teorema de Heine-Borel,

[1] La razón es que todos los puntos P en la cerradura de una superficie elemental σ que estén lo suficientemente cerca de un punto dado Q de σ tienen que pertenecer al propio conjunto σ: supóngase que σ corresponde al conjunto abierto U en el plano paramétrico, con Q correspondiendo a un punto σ. Sea P_n una sucesión de puntos sobre σ con imágenes p_n en U, y supóngase que $P_n \to P$. Para P_n lo suficientemente próximo a Q los p_n están en un disco cerrado alrededor de q, contenido en U. Una subsucesión de los p_n converge a un punto p de U. El punto sobre

un número finito de estas bolas, digamos, aquéllas con centros en Q_1, . . ., Q_N, cubre al conjunto cerrado y acotado s. Entonces se definen las funciones de partición χ_i para $i = 1, \ldots, N$ por

$$\chi_i(P) = \frac{\psi_{Q_i}(P)}{\psi_{Q_1}(P) + \cdots + \psi_{Q_n}(P)} \tag{24b}$$

Aquí el denominador es diferente de cero para cada P en s, de modo que $\chi_i(P)$ está definida y es continua en s. Es evidente que en s las $\chi_i(P)$ son no negativas y suman 1. Además, $\chi_i(P) = 0$ fuera de un subconjunto compacto de la superficie elemental σ_{Q_i}. Así, las $\chi_i(P)$ forman una partición de la unidad.

Habiendo definido la integral de una función F sobre una superficie simple, inmediatamente se puede obtener la integral de una forma diferencial,

$$\omega = a\,dy\,dz + b\,dz\,dx + c\,dx\,dy\,, \tag{25a}$$

sobre una *superficie simple orientada* τ^*, suponiendo que los coeficientes a, b, c se anulan fuera de un subconjunto compacto s de τ^*. Sencillamente tómese

$$\iint_{\tau^*} \omega = \iint_{\tau} (a\xi + b\eta + c\zeta)\,dA, \tag{25b}$$

donde τ es la superficie no orientada y ξ, η, ζ son los cosenos directores de la normal determinada por la orientación de τ^* con respecto a los ejes coordenados.

A.2 El teorema de la divergencia

a. Enunciado del teorema y su invariancia

En el caso de varias variables, el papel del teorema fundamental del cálculo, que relaciona las operaciones de derivación e integra-

---

σ que corresponde a p es precisamente P. Ahora bien, por la definición de τ existe un δ_Q positivo tal que los puntos P de τ, con $\overline{PQ} < \varepsilon_Q$ forman una superficie elemental σ. Entonces existe un $\varepsilon_Q \leqq \delta_Q$, positivo, (que depende de la elección de δ_Q) tal que los puntos P de la cerradura de σ para los cuales $\overline{PQ} \leqq \frac{1}{2}\varepsilon_Q$ pertenecen a σ. Denotemos por $\sigma_Q \subset \sigma$ el conjunto de los puntos P de τ con $\overline{PQ} < \varepsilon_Q$. Entonces la cerradura del conjunto de los puntos P de σ_Q, con $\overline{PQ} \leqq \frac{1}{2}\varepsilon_Q$, pertenece a σ, y, por tanto, también a σ_Q dado que $\frac{1}{2}\varepsilon_Q < \varepsilon_Q$.

ción, es desempeñado por el *teorema de la divergencia de Gauss.* Bajo hipótesis apropiadas, para un conjunto R en el espacio x, y, z, con superficie frontera τ, el teorema toma la forma

$$\text{(26)} \qquad \iiint_R (a_x + b_y + c_z)\, dx\, dy\, dz = \iint_\tau (a\xi + b\eta + c\zeta)\, dA,$$

donde ξ, η, ζ denotan los cosenos directores del vector normal *exterior* (es decir, del vector normal que apunta hacia afuera de R) en los diferentes puntos de τ.

Aquí se probará el teorema bajo las hipótesis de que R es la cerradura de un conjunto abierto y acotado en el espacio x, y, z y de que la frontera de R es una superficie simple. Las funciones $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$ serán continuas en R y tendrán primeras derivadas continuas y acotadas en los puntos interiores de R.

Una característica importante de la fórmula (26) es su *invariancia* bajo movimientos rígidos del espacio. Este hecho se verifica con mayor facilidad si se usan subíndices, en lugar de letras diferentes, para distinguir a las variables. Remplacemos las cantidades x, y, z por x_1, x_2, x_3 a, b, c por a_1, a_2, a_3 y ξ, η, ζ por ξ_1, ξ_2, ξ_3. La fórmula (26) queda entonces así:

$$\text{(27a)} \qquad \iiint_R \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \iint_\tau \sum_i a_i\, \xi_i\, dA,$$

donde $i = 1, 2, 3$. Por supuesto, la fórmula análoga, con i variando desde 1 hasta n, se cumple en n dimensiones.

Un movimiento rígido está dado por una transformación lineal de las variables x a las y, de la forma

$$\text{(27b)} \qquad x_i = \sum_k c_{ik}\, y_k + d_i\,,$$

donde los c_{ik} y d_i son constantes y los c_{ik} satisfacen las *relaciones de ortogonalidad* [ver (47), p. 192]

$$\text{(27c)} \qquad \sum_i c_{ij}\, c_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ para } j \neq k \\ 1 \text{ para } j = k. \end{cases}$$

La misma ley de transformación, pero omitiendo los términos "no homogéneos" d_i, se aplica a los vectores, puesto que sus componentes son precisamente diferencias de las coordenadas de sus puntos extremos. Así, con las a_i se asocian las componentes b_k del mismo vec-

tor en el nuevo sistema:

$$a_i = \sum_k c_{ik} b_k$$

También se aplica esta ley de transformación a los cosenos directores del vector normal sobre la frontera, que son precisamente las componentes del vector normal unitario exterior. Los nuevos cosenos directores η_k están relacionados con los ξ_i por medio de las fórmulas

$$\xi_i = \sum_k c_{ik} \eta_k.$$

Entonces, obviamente,

$$\sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \sum_{i,k} c_{ik} \frac{\partial b_k}{\partial x_i} = \sum_{i,k} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \frac{\partial b_k}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial b_k}{\partial y_k},$$

donde se ha aplicado la *regla de la cadena de la derivación* (ver las pp. 251-252). De modo semejante, usando (27c),

$$\sum_i a_i \xi_i = \sum_{i,j,k} c_{ik} b_k c_{ij} \eta_j = \sum_k b_k \eta_k$$

De aquí que (27a) implica que

$$\iiint \sum_k \frac{\partial b_k}{\partial y_k} dy_1\, dy_2\, dy_3 = \iint \sum_k b_k \eta_k\, dA$$

y, por tanto, representa una relación que es invariante bajo los movimientos rígidos del espacio.[1]

b. Demostración del teorema

Una vez más, la demostración de la fórmula general (26) se simplifica considerablemente aplicando *particiones de la unidad.* Este artificio nos permite, para una región R dada con frontera τ reducir la fórmula para a, b, c generales al caso en que a, b, c son nulos excepto en la vecindad de un punto. Se probará lo siguiente:

---

[1] La invariancia del elemento de volumen se debe a que el jacobiano de la transformación (27b), es decir, el determinante de los c_{ik}, tiene el valor ± 1 (ver la p. 175), mientras que la invariancia del elemento de superficie $dA = W\,du\,dv$ se deduce transformando la expresión (1b) para W.

Si todo punto Q en R tiene una vecindad de radio ε_Q tal que (26) se cumple para todos los a, b, c que se anulan fuera de esa vecindad,[1] *entonces la fórmula se cumple para a, b, c en general.*

Para demostrar esta aseveración se usan las funciones auxiliares $\psi_Q(P)$ definidas por

$$\psi_Q(P) = \begin{cases} (\varepsilon_Q{}^2 - 4\overline{PQ}^2)^2 & \text{for } \overline{PQ} < \frac{1}{2}\varepsilon_Q \\ 0 \text{ para } \overline{PQ} \geqq \frac{1}{2}\varepsilon_Q \end{cases}$$

que son continuas y tienen primeras derivadas continuas para todo P. Como R es cerrada y acotada, se puede seleccionar un número finito de puntos Q, digamos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$, tales que las bolas correspondientes $\overline{PQ}_i < \frac{1}{2}\varepsilon_{Q_i}$ cubran por completo a R. Una vez más se introducen las funciones

$$\chi_i(P) = \frac{\psi_{Q_i}(P)}{\psi_{Q_1}(P) + \cdots + \psi_{Q_n}(P)}$$

que están definidas y tienen primeras derivadas continuas en todos los puntos P de R y, además, satisfacen las condiciones requeridas para una partición de la unidad,

(a) $$\chi_i(P) \geqq 0 \quad \text{in } R$$

(b) $$\sum_i \chi_i(P) = 1$$

(c) $$\chi_i(P) = 0 \quad \text{for} \quad \overline{PQ}_i > \frac{1}{2}\varepsilon_{Q_i}$$

Entonces puede descomponerse la función a en

$$a = \sum_i a\,\chi_i$$

donde, nuevamente, los términos individuales $a\,\chi_i$ son continuos en R y tienen primeras derivadas continuas en los puntos interiores de R. De modo semejante pueden descomponerse b y c. Entonces, puesto

[1] Sólo se consideran funciones a, b, c que satisfacen las hipótesis enunciadas: son continuas en R y tienen derivadas continuas en los puntos interiores de R.

que la fórmula (26) se aplica a los términos individuales es obvio que se aplica a la expresión completa.

De aquí que (26) sólo se tiene que probar para funciones a, b, c que se anulan fuera de una vecindad arbitrariamente pequeña de un punto Q. Se distinguen los casos de Q en el interior de R y Q sobre la superficie frontera τ.

Para un punto Q interior a R elíjase ε_Q tan pequeño que la bola de radio $2\varepsilon_Q$ y centro en Q esté en R. Cuando a, b, c se anulan fuera de la bola de radio ε_Q, la integral de superficie se anula y sólo se tiene que probar que

$$\iiint (a_x + b_y + c_z)\, dx\, dy\, dz = 0 \tag{28}$$

Aquí a, b, c están definidas y tienen primeras derivadas continuas en el espacio completo si se definen $a = b = c = 0$ fuera de R. Las primeras derivadas de a, b, c son integrables sobre toda paralela a los ejes coordenados. Aplicando la fórmula (29), p. 592, para la reducción de una integral triple a integrales simples se encuentra, por ejemplo,

$$\iiint c_z\, dx\, dy\, dz = \iint h(x, y)\, dx\, dy$$

donde

$$h(x, y) = \int c_z(x, y, z)\, dz = 0.$$

De esta manera se establece (28).

Considérese ahora el caso en que Q es un punto frontera de R. Puede suponerse que el vector normal a la superficie τ en Q no es paralelo a ninguno de los tres planos coordenados; esto siempre se puede lograr por medio de un movimiento rígido apropiado del espacio, que no cambie la fórmula que debe probarse. En una vecindad de Q de radio ε_Q, suficientemente pequeño, ningún vector normal será paralelo a uno de los planos coordenados; es decir, ninguno de los cosenos directores ξ, η, ζ se anulará. Si la vecindad es lo suficientemente pequeña, la porción de τ contenida en ella puede representarse no paramétricamente expresando cualquiera de las tres variables x, y, z como una función de las otras dos. Por ejemplo, puede representarse τ por medio de una ecuación

$$z = F(x, y)$$

El conjunto R en esa vecindad se caracterizará ya sea por $z \leqq F(x, y)$ por $z \geqq F(x, y)$; (ver la p. 701). Se supondrá, sin pérdida de generalidad, que R está caracterizada localmente por $z \leqq F(x, y)$; entonces, el vector normal exterior de τ tiene los cosenos directores ξ, η, ζ donde $\zeta > 0$. Cuando a, b, c se anulan fuera de la vecindad, usando $u = x$ y $v = y$ como parámetros de la superficie se tiene

$$\iint_\tau c\zeta\, dA = \iint c\, dx\, dy, \tag{29}$$

que concuerda con la orientación. Por otra parte, definiendo a c como 0 donde antes no estaba definida, [1]

$$\iiint_R c_z\, dx\, dy\, dz = \iiint_{z \leqq F(x,y)} c_z\, dx\, dy\, dz = \iint h(x, y)\, dx\, dy,$$

donde

$$h(x, y) = \int_{-\infty}^{F(x,y)} c_z(x, y, z)\, dz = c(x, y, F(x, y)).$$

Sólo los puntos cercanos a Q contribuyen a las integrales, de modo que la función $F(x, y)$ también tiene que estar definida sólo para (x, y, z) próximo a Q. Comparando con (29) se llega a establecer que

$$\iint_\tau c\zeta\, dA = \iiint_R c_z\, dx\, dy\, dz.$$

De manera semejante, con y, z o x, z como parámetros también se deduce que

$$\iint_\tau a\xi\, dA = \iiint_R a_x\, dx\, dy\, dz, \qquad \int_\tau b\eta\, dA = \iiint_R b_y\, dx\, dy\, dz.$$

Esto completa la demostración del teorema de la divergencia (26).

[1] Entonces la función correspondiente c_z es acotada y continua, excepto en el conjunto de los puntos (x, y, z) cercanos a Q para los cuales $z = F(x, y)$. Este último conjunto tiene medida de Jordan cero. De aquí que $c_z(x, y, z)$ es integrable según Riemann como un función de x, y, z, y también como una función de z únicamente, para x, y fijas. (Ver la nota 2 al pie de la la página 464). Así, es aplicable la fórmula (29), p. 592.

A.3 Teorema de Stokes

Considérese una superficie simple, τ, no necesariamente cerrada. Dado un subconjunto σ de τ se define el *interior relativo* de σ (es decir, "relativo" a la superficie τ) como el conjunto de puntos P de τ con la propiedad de que, en alguna vecindad apropiada de P, todos los puntos de τ pertenecen a σ. De modo semejante, la *frontera relativa* de σ consiste de los puntos P de τ para los cuales toda vecindad contiene puntos de τ que pertenecen a σ así como puntos de τ que no pertenecen a σ. El conjunto σ es *relativamente abierto* si cada uno de sus puntos es un punto relativamente interior.

Ahora se considerará un subconjunto cerrado y acotado, s, de τ que consistirá de un conjunto relativamente abierto, σ y de su frontera relativa. Esta frontera relativa será una curva simple cerrada, C, dada paramétricamente en la forma

$$x = \alpha(t), \quad y = \beta(t), \quad z = \gamma(t), \tag{30}$$

donde α, β, γ son funciones de período p con primeras derivadas continuas para las cuales $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 > 0$ para todo t. Se supondrá que la superficie τ está orientada y que ξ, η, ζ son los cosenos directores del vector normal positivo sobre la superficie orientada τ^*. Entonces puede asignarse una orientación especial a la curva C, determinada por la orientación de τ y por el "lado" de C sobre el cual está σ y, por tanto, convertir a C en una curva orientada C^*. Esta orientación "positiva" en C con respecto a τ^* puede definirse en dos formas equivalentes. En el espacio x, y, z- el vector tangente a C correspondiente a la dirección de t creciente apunta en la dirección dada por el vector $(\alpha'(t),\ \beta'(t),\ \gamma'(t))$. El producto exterior de este vector tangente y del vector normal a la superficie, (ξ, η, ζ) es el vector con componentes

$$\beta'\zeta - \gamma'\eta, \quad \gamma'\xi - \alpha'\zeta, \quad \alpha'\eta - \beta'\xi. \tag{31}$$

Su dirección, que es perpendicular a la del vector tangente a C y tangencial a la superficie, da una dirección normal marcada para C, relativa a la superficie. La orientación asignada a C será ahora la de t creciente si el vector (31) apunta hacia afuera de s y la de t decreciente si apunta hacia s.

Una manera diferente de llegar a la misma orientación se basa en la representación paramétrica para τ en la vecindad del punto P:

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v) \tag{32}$$

donde se supone que los parámetros u, v son aquéllos que definen la orientación de τ cerca de P, es decir, que el vector (A, B, C) definido por (2), p. 692, apunta en la dirección de la normal marcada de τ. La porción de la curva C cerca de P se aplicará sobre un arco γ en el plano u, v- el conjunto s cerca de P se aplicará sobre un conjunto ρ en el plano u, v. Puede definirse la orientación de C como la correspondiente a la orientación positiva de γ con respecto al conjunto ρ, en el sentido impartido por la orientación. También se puede decir que la orientación de γ es la de la t creciente si el vector con componentes dv/dt y $-du/dt$ apunta hacia afuera de ρ.

Dadas ahora tres funciones $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$, que están definidas y tienen primeras derivadas continuas en una vecindad del conjunto s, el *teorema de Stokes* se expresa mediante la fórmula

$$\text{(33)} \qquad \iint_S [(c_y - b_z)\,\xi + (a_z - c_x)\eta + (b_x - a_y)\,\zeta]\, dA = \int_{C^*} (a\, dx + b\, dy + c\, dz).$$

La demostración del teorema sigue un patrón que ya debe ser conocido por el lector. Usando una partición apropiada de la unidad, podemos restringirnos al caso en que las funciones a, b, c se anulan fuera de una vecindad arbitrariamente pequeña de un punto Q de s. Cerca de este punto la superficie τ tiene una representación paramétrica de la forma (32) para la cual el vector normal con componentes A, B, C dadas por (2), p. 693, tiene la dirección fijada por la orientación de τ*. Puede escribirse

$$\iint_{S^*} [(c_y - b_z)\,\xi + (a_z - c_x)\eta + (b_x - a_y)\zeta]\, dA$$
$$= \iint_\rho [(c_y - b_z)A + (a_z - c_x)B + (b_x - a_y)\, C]\, du\, dv$$
$$= \iint_\rho (\lambda_u + \mu_v)\, du\, dv,$$

donde

$$\lambda = ax_v + by_v + cz_v, \qquad -\mu = ax_u + by_u + cz_u,$$

* La representación paramétrica (32) de τ sólo es *local* (es decir, válida cerca del punto P).

como se verifica con facilidad algebraicamente sustituyendo las expresiones (2), p. 693, para A, B, C y aplicando la regla de la cadena de la derivación,

$$a_u = a_x f_u + a_y g_u + a_z h_u,$$

y así sucesamente.[1]

Si ahora Q es un punto en el interior relativo de s, entonces las funciones $\lambda(u, v)$ y $\mu(u, v)$ se anulan cerca de la frontera γ de ρ, y, por el *teorema de la divergencia* para dos dimensiones, se encuentra que

$$\iint_\rho (\lambda_u + \mu_v)\, du\, dv = 0.$$

Por otra parte, si Q está sobre la frontera relativa de s, el punto correspondiente en el plano u, v, está sobre γ y λ, μ se anulan fuera de una pequeña vecindad de ese punto. En este caso, nuevamente, el teorema de la divergencia bidimensional da

$$\iint_\rho (\lambda_u + \mu_v)\, du\, dv = \int_\gamma (\lambda p + \mu q)\, d\gamma,$$

donde $d\gamma$ es el elemento de longitud y p, q son los cosenos directores del vector normal que apunta hacia afuera de ρ sobre la curva γ Recorriendo γ en el sentido positivo con respecto a ρ, se tiene

$$\begin{aligned}\int_\gamma (\lambda p + \mu q)\, d\gamma &= \int_{\gamma^*} (\lambda\, dv - \mu du)\\ &= \int_{\gamma^*} (ax_u + by_u + cz_u)\, du + (ax_v + by_v + cz_v)\, dv\\ &= \int_{C^*} (a\, dx + b\, dy + c\, dz),\end{aligned}$$

que era lo que se debía demostrar.

A.4 Superficies e integrales de superficie en espacios euclidianos de dimensiones superiores

a. Superficies elementales

Sea E_M un espacio euclidiano M dimensional referido a las coordenadas cartesianas $x_1, \ldots, x_M$. Primero se definirán las superficies

[1] La fórmula (63b), p. 372, es otra versión de esta identidad, con $L = a\,dx + b\,dy + c\,dz$, $\lambda = L/dv$, $\mu = L/du$.

elementales m dimensionales en E_M como conjuntos de puntos que pueden representarse "muy bien" con la ayuda de m parámetros. Se dice que un conjunto S en E_M es una superficie elemental m xi dimensional si pueden encontrarse M funciones $f^1(u_1, \ldots, u_m)$, $f^2(u_1, \ldots, u_m), \ldots, f^M(u_1, \ldots, u_m)$ definidas en un conjunto abierto U del espacio $u_1, u_2, \ldots, u_m$- con las propiedades siguientes:

1. Las ecuaciones

$$x_1 = f^1(u_1, \ldots, u_m), \ldots, x_M = f^M(u_1, \ldots, u_m)$$

definen una aplicación biunívoca continua de U sobre S cuya inversa también es continua.

2. Las funciones $f^i(u_1, \ldots, u_m)$ tienen primeras derivadas continuas en U.

3. Para cualquier punto $(u_1, \ldots, u_m)$ en U y para $i = 1, \ldots, m$, defínase $\mathbf{A}^i = \mathbf{A}^i(u_1, \ldots, u_m)$ como el vector en E_M con componentes $(f_{u_i}{}^1, f_{u_i}{}^2, \ldots, f_{u_i}{}^M)$. Se requiere que los m vectores A^i sean independientes, es decir, que

$$W = \sqrt{\Gamma(\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^m)} > 0, \tag{34}$$

donde Γ es el *determinante de Gram* definido por (81a), p. 236.

Se prueba, como en la p. 694, que si se representa S de la misma manera con la ayuda de algunos otros parámetros $v_1, \ldots, v_m$, existe una relación uno a uno, continuamente diferenciable, entre los puntos paramétricos $(u_1, \ldots, u_m)$ y $(v_1, \ldots, v_m)$ correspondientes, siendo el jacobiano no nulo:

$$\frac{d(u_1, \ldots, u_m)}{d(v_1, \ldots, v_m)} \neq 0. \tag{35}$$

Si $F(x_1, \ldots, x_M)$ es una función definida y continua sobre la superficie elemental S, la cual tiene además un *soporte compacto* sobre S (es decir, F se anula fuera de un subconjunto cerrado y acotado de S), se define* la integral de F sobre S por medio de

---

* El cubo con aristas de longitud h paralelas a los ejes coordenados en el espacio $u_1, \ldots, u_m$- se aplica hasta términos de orden superior sobre un paralelepípedo en el espacio $x_1, \ldots, x_M$, generado por los vectores $h\mathbf{A}^1, \ldots, h\mathbf{A}^m$ y, por tanto, de volumen m-dimensional

$$\sqrt{\Gamma(h\mathbf{A}^1, \ldots, h\mathbf{A}^M)} = h^m W.$$

Esto hace plausible el que dS deba ser identificado con el elemento de volumen en el espacio $u_1, \ldots, u_m$- multiplicado por el factor W.

(36) $$\iint_S \cdots \int F\,dS = \iint \cdots \int_U FW\,du_1 \cdots du_m.$$

La integral definida de esta manera no depende[1] de la representación paramétrica particular usada para S.

En un punto P_0 de S fórmense los vectores correspondientes $\mathbf{A}^i$, dándoles el punto inicial P_0, y denotando sus puntos finales por P_i, de modo que $\mathbf{A}^i = \overrightarrow{P_0P_i}$. Los $m + 1$ puntos P_0, $P_1, \ldots, P_m$ están en un plano m dimensional, p_0, el *plano tangente* a S en P_0. Si se asigna una orientación a p_0 (ver la p. 242) convirtiéndolo en el plano tangente orientado p_0^* se tiene

(37a) $$\Omega(p_0^*) = \varepsilon(p_0)\, \Omega(\mathbf{A}^1, \ldots, \mathbf{A}^m),$$

donde $\varepsilon(p_0)$ tiene el valor $+1$ ó el -1. Se dice que la superficie S está orientada si en todo punto P de S se orienta el plano tangente $p^* = p^*(P)$ de modo tal que la orientación dependa *continuamente* de P; es decir, para

$$\Omega(p^*) = \Omega(\mathbf{B}^1, \ldots, \mathbf{B}^m)$$

con los vectores apropiados $\mathbf{B}^1, \ldots, \mathbf{B}^m$ en p^*, se requiere que[2]

$$[\mathbf{B}^1(P), \ldots, \mathbf{B}^m(P); \mathbf{B}^1(P_0), \ldots, \mathbf{B}^m(P_0)] > 0$$

para todos los puntos P sobre S lo suficientemente próximos a un punto P_0. Dado que los vectores A^i varían continuamente con el punto P de contacto, la orientación de p^* varía continuamente con el punto de contacto si el factor $\varepsilon(P)$ definido por (37a) varía continuamente con P sobre S. Como ε sólo puede tomar los valores $+1$ ó -1, se concluye, como en la p. 643, que *para una superficie elemental conexa sólo existen dos orientaciones posibles*. En cualquier caso, la superficie orientada S^* determina una orientación del conjunto U en el espacio de parámetros $u_1, \ldots, u_m$, a saber, la dada por

(37b) $$\Omega(U) = \varepsilon(P)\, \Omega(u_1, \ldots, u_m)$$

---

[1] Para probar esto se observa que bajo los cambios de parámetros W se multiplica por el valor absoluto del jacobiano de la transformación paramétrica, porque tal transformación resulta en una sustitución lineal para los vectores $\mathbf{A}^i$ lo cual cambia el volumen W del paralelepípedo generado por los vectores sólo en un factor igual al determinante de la sustitución (ver la p. 244).

[2] El símbolo entre corchetes representa el determinante definido por (85a), p. 198.

[ver (40n o, p), pp. 645]. Aquí, bajo un cambio de parámetro de $u_1, \ldots, u_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ la cantidad ε sólo es multiplicada por el signo del jacobiano (35).

b. *Integral de una forma diferencial sobre una superficie elemental orientada*

Después de estos preliminares, estamos ahora listos para definir la integral de una forma diferencial de m-ésimo orden ω sobre una superficie elemental orientada m dimensional, S^*. La forma ω es alguna combinación lineal de productos ordenados de m de las diferenciales $dx_1, \ldots, dx_M$, por ejemplo,

$$\omega = a\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_m + b\, dx_2\, dx_3 \cdots dx_{m+1} + c\, dx_1\, dx_3 \cdots dx_m + \cdots,$$

donde se supone que los coeficientes $a(x_1, \ldots, x_M)$, $b(x_1, \ldots, x_M)$, $\ldots$ son continuos y tienen soporte compacto sobre S^*.[1] Supóngase que S^* se representa paramétricamente con ayuda de los parámetros $u_1, \ldots, u_m$ que varían sobre el conjunto U^* orientado de acuerdo con la orientación de S^*. Entonces se define

$$\int \underset{S^*}{\cdots} \int \omega = \int \underset{U^*}{\cdots} \int \frac{\omega}{du_1 \cdots du_m}\, du_1 \cdots du_m$$
$$= \int \underset{U^*}{\cdots} \int \left[a \frac{d(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{d(u_1, u_2, \ldots, u_m)} + b \frac{d(x_2, x_3, \ldots, x_{m+1})}{d(u_1, u_2, \ldots, u_m)} + \cdots \right] du_1 \cdots du_m.$$

Se ha arreglado la notación[2] de manera tal que el valor de la integral

[1] Es decir, $a, b, c, \ldots$ se anulan fuera de algún subconjunto cerrado y acotado de S^*.

[2] Aquí, para un integrando continuo $F(u_1, \ldots, u_m)$, la integral de F sobre un conjunto orientado U^* con orientación

$$\Omega(U^*) = \varepsilon\Omega(u_1, \ldots, u_m)$$

($\varepsilon = \pm 1$ y continuo), se define por

$$\iint \underset{U^*}{\cdots} \int F\, du_1 \cdots du_m = \iint \underset{U}{\cdots} \int F\varepsilon\, du_1 \cdots du_m$$

donde la integral del segundo miembro tiene el significado ordinario que da valores positivos para integrandos positivos.

no dependa de la representación paramétrica particular usada para S^*.

c. *Superficies simples m dimensionales*

Precisamente como en el espacio tres, uniendo superficies elementales pueden obtenerse superficies *simples*. Se dice que un conjunto τ en el espacio euclidiano M dimensional es una superficie simple m dimensional, si cada punto P_0 de τ tiene una vecindad que se intersecta con τ en una superficie elemental m dimensional. Si cada una de las superficies elementales que se presentan en la caracterización de una superficie simple está orientada, y si concuerdan las orientaciones de dos de estas superficies elementales cuando se traslapan, se dice que la superficie simple τ ha sido orientada.

En cada punto de una superficie simple orientada m dimensional τ^* pueden elegirse m vectores $\mathbf{A}^1(P), \ldots, \mathbf{A}^m(P)$ tales que

$$\Omega(\tau^*) = \Omega[\mathbf{A}^1(P), \ldots, \mathbf{A}^m(P)]$$

y

$$[\mathbf{A}^1(P), \ldots, \mathbf{A}^m(P); \mathbf{A}^1(Q), \ldots, \mathbf{A}^m(Q)] > 0$$

para Q lo suficientemente próximo a P.

Para los subconjuntos s, de una superficie simple m dimensional, τ puede definirse la *frontera relativa*[1] de s, es decir, la frontera de s relativa a la superficie τ. La frontera relativa de s consiste de aquellos puntos de s para los cuales cada vecindad contiene puntos de s y puntos de τ que no pertenecen a s. La *cerradura relativa*[2] de s consiste de s y de los puntos frontera relativos de s. Se dice que el conjunto s es *relativamente abierto* si no tiene puntos en común con su frontera relativa, y se dice que es *relativamente* cerrado si contiene a su frontera relativa.

Particularmente interesante es el caso en que s es un subconjunto de la superficie simple m dimensional τ cuya frontera relativa es a su vez una superficie simple $(m-1)$, dimensional, ∂s. Se supondrá

[1] Esta noción es necesaria cuando se desea discutir, digamos, la curva frontera de una superficie bidimensional s en espacios de dimensiones $M > 2$. La frontera ("absoluta") de la superficie s tomada con respecto al espacio completo siempre contiene a la superficie s. completa.

[2] La cerradura relativa de s es también el conjunto de todos los puntos de τ que son límites de sucesiones formadas con puntos de s.

además que s es la cerradura relativa de un conjunto relativamente abierto. En la vecindad de un punto P de ∂s siempre pueden representarse ∂s y τ "no paramétricamente"; esto es, pueden usarse algunas de las coordenadas cartesianas $x_1, \ldots, x_M$ en el espacio como variables independientes; entonces después de renumerar adecuadamente las coordenadas, se tiene para τ cerca de P, la representación paramétrica

$$x_i = f_i(x_1, \ldots, x_m) \qquad (i = m + 1, \ldots, M),$$

y sobre ∂s se tiene la condición adicional

$$x_1 = g(x_2, \ldots, x_m)$$

f_i y g son funciones continuamente diferenciables. Además, los puntos de s son caracterizados cerca de P por una de las desigualdades

$$g(x_2, \ldots, x_m) \leqq x_1$$

o bien,

$$g(x_2, \ldots, x_m) \geqq x_1.$$

Si se trata de una superficie orientada s^*, puede asignarse una orientación única a la frontera relativa ∂s. Considérense $m - 1$ vectores independientes $\mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^m$ en un punto P de ∂s que sean tangenciales a ∂s y un vector más $\mathbf{A}^1$ que sea tangencial a τ pero no a ∂s en P y que apunte hacia afuera de s^*. Entonces se tiene

$$\Omega(s^*) = \varepsilon\Omega(\mathbf{A}^1, \ldots, \mathbf{A}^{m-1}, \mathbf{A}^m) \tag{38}$$

donde ε tiene el valor $+1$ -1. Entonces se dice que la frontera ∂s^* está *orientada positivamente* con respecto a s^* si

$$\Omega(\partial s^*) = \varepsilon\Omega(\mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^m). \tag{39}$$

En particular, sean $m = M$ y τ el espacio M dimensional completo. Sea s la cerradura de un conjunto abierto y sea la frontera de s una superficie simple $(m - 1)$-dimensional ∂s. Supóngase que en una vecindad de un punto P la superficie ∂s tiene la representación

[1] Aquí, se puede omitir la palabra *relativo*.

no paramétrica

$$x_1 = g(x_2, \ldots, x_m).$$

Puede definirse una cantidad $\delta = \pm 1$ de modo que

(40a) $$[x_1 - g(x_2, \ldots, x_m)]\delta \leqq 0$$

para los puntos $(x_1, \ldots, x_m)$ en s cerca de P. Elijamos como $\mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^m$ los vectores

$$\mathbf{A}^2 = (g_{x_2}, 1, 0, \ldots, 0, 0), \ldots, \mathbf{A}^m = (g_{x_m}, 0, \ldots, 0, 1)$$

tangenciales a ∂s, y como $\mathbf{A}^1$ el vector

$$\mathbf{A}_1 = (\delta, 0, \ldots, 0)$$

que apunta hacia afuera de s. Entonces, en las coordenadas $x_1, \ldots, x_m$.

$$\det(\mathbf{A}^1, \ldots, \mathbf{A}^{m-1}, \mathbf{A}^m) = \delta,$$

de modo que [ver (83a, b), p. 239]

$$\Omega(\mathbf{A}^1, \ldots, \mathbf{A}^{m-1}, \mathbf{A}^m) = \delta\Omega(x_1, \ldots, x_m).$$

Para el conjunto orientado s^* defínase $\varepsilon = \pm 1$ cerca de P por (38). Entonces

(40b) $$\Omega(s^*) = \varepsilon\delta\Omega(x_1, \ldots, x_m),$$

mientras que para la frontera ∂s^* orientada positivamente con respecto a s^*, se cumple la relación (39). Consecuentemente, si se consideran $x_2, \ldots, x_m$ como parámetros para la superficie ∂s^* cerca de P, entonces la orientación del espacio $x_2, \ldots, x_m$ determinada por ∂s^* es

(40c) $$\varepsilon\Omega(x_2, \ldots, x_m)$$

(ver (37b), p. 716). *Por lo tanto, para un conjunto s^* orientado positivamente con respecto a las coordenadas $x_1, \ldots, x_m$ ($\varepsilon\delta = 1$), la frontera orientada positivamente tiene la orientación del sistema $x_2, \ldots, x_m$ donde s esté "por debajo de" la frontera, y la orientación opuesta donde s esté "por encima de" la frontera* (ver la p. 702).

A.5 Integrales sobre superficies simples, teorema de la divergencia de Gauss y fórmula general de Stokes en dimensiones superiores

Se definen las integrales sobre superficies simples por medio de *particiones de la unidad,* exactamente como en la p. 704. En particular, si τ^* es una superficie simple orientada m dimensional y ω es una forma diferencial de m-ésimo orden, la integral

$$\int \underset{\tau^*}{\cdots} \int \omega$$

está definida siempre que los coeficientes de ω sean continuos y se anulen fuera de un sub-conjunto cerrado y acotado de τ^*.

Sea ahora τ una superficie simple m dimensional en el espacio M y s^* un subconjunto orientado cerrado y acotado de τ. Se supondrá que s^* es la cerradura de un conjunto relativamente abierto y que la frontera relativa de s^*, orientada positivamente con respecto a s^*, es una superficie simple orientada $(m-1)$-dimensional, ∂s^*. Sea ω una forma diferencial de orden $m-1$ con coeficientes que tienen primeras derivadas continuas. El *teorema general de Stokes* afirma que

$$\int \underset{\partial s^*}{\cdots} \int \omega = \int \underset{s^*}{\cdots} \int d\omega. \tag{41}$$

Primero se tratará el caso especial donde $m = M$, que es el *teorema de la divergencia de Gauss* en m dimensiones. En este caso se considera a τ como el espacio completo y a s^* como un conjunto orientado que es la cerradura de un conjunto abierto limitado por una superficie simple $(m-1)$-dimensional, ∂s^* orientada positivamente con respecto a s^*. La forma ω de grado $m-1$ puede escribirse como

$$a_1\, dx_2\, dx_3 \cdots dx_m + a_2\, dx_3\, dx_4 \cdots dx_m\, dx_1 + \cdots + a_m\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_{m-1},$$

donde las a_i son funciones de $x_1, \ldots, x_m$. Entonces,

[1] No sólo relativamente cerrado.

$$d\omega = da_1\, dx_2\, dx_3 \cdots dx_m + da_2\, dx_3\, dx_4 \cdots dx_m\, dx_1 + \cdots + da_m\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_{m-1} \tag{42a}$$

$$= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1\, dx_2 \cdots dx_m + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} dx_2\, dx_3 \cdots dx_m\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial a_m}{\partial x_m} dx_m\, dx_1 \cdots dx_{m-1}$$

$$= K\, dx_1 \cdots dx_m,$$

donde

$$K = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + (-1)^{m-1}\frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} + (-1)^{m-1}\frac{\partial a_4}{\partial x_4} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{\partial a_m}{\partial x_m} \tag{42b}$$

La demostración de la fórmula (41) para este caso se desarrolla exactamente como en el caso especial $m = 3$ que se discutió en las pp. 708-711, y no es necesario repetir los pasos individuales. Lo único que se debe comprobar es el *signo* en la fórmula final. En última instancia, la demostración se reduce al caso en que $a_2, \ldots, a_m$ se anulan idénticamente y a_1 se anula fuera de una vecindad de un punto P de la superficie σ^*. Aquí, cerca de P la superficie está dada por la ecuación

$$x_1 = g(x_2, \ldots, x_m)$$

y s^* está dada por la desigualdad

$$[x_1 - g(x_2, \ldots, x_m)]\delta \leqq 0,$$

donde $\delta = \pm 1$ Defínase el número $\varepsilon = \pm 1$ en P por

$$\Omega(s^*) = \varepsilon\delta\Omega(x_1, \ldots, x_m)$$

ver (40b). Entonces, por (42a, b),

$$\int\cdots\int_{s^*} d\omega = \varepsilon\delta \int\cdots\int \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 \cdots dx_m = \varepsilon \int\cdots\int_{x_1=g} a_1\, dx_2 \cdots dx_m.$$

Por otra parte [ver (40b) y (40c)], también se tiene

$$\int \underset{\partial s^*}{\cdots} \int \omega = \varepsilon \int \underset{x_1 = g}{\cdots} \int a_1 \, dx_2 \cdots dx_m.$$

Esto completa la demostración del teorema de la divergencia.

La fórmula general de Stokes para $m < M$ arbitrario es una consecuencia inmediata. Usando particiones de la unidad, nuevamente basta con establecerla para formas diferenciales que se anulen fuera de una vecindad de un punto P sobre la superficie simple τ. En esa vecindad τ es idéntica a una superficie elemental. Introduciendo los parámetros locales $u_1, \ldots, u_m$ para describir τ, la identidad (41) se convierte en la identidad correspondiente en el espacio paramétrico m dimensional, donde ahora todo se reduce al teorema de la divergencia de Gauss, discutido anteriormente. De esta manera se establece el teorema general de Stokes.

Este tipo de argumentos hace ver claramente que el hecho de que la superficie m dimensional considerada, τ esté enclavada en un espacio euclidiano de dimensión M no tiene importancia. Todo lo que cuenta son las representaciones paramétricas locales que aplican a τ sobre un conjunto en el espacio m euclidiano. Esto sugiere la validez de fórmulas semejantes en *variedades abstractas* m dimensionales más generales que puedan describirse por medio de parámetros cerca de todo punto. Sin embargo, para evitar consideraciones topológicas que están mas allá del alcance de este libro nos hemos restringido a superficies *simples* en espacios euclidianos.

CAPITULO 6

Ecuaciones diferenciales

En el Volumen I, capítulo 9, se estudiaron casos especiales de ecuaciones diferenciales. Dentro de los alcances de este libro no es posible desarrollar detalladamente la teoría general; sin embargo, en este capítulo, partiendo de más ejemplos de la mecánica, se dará al menos un esquema de los principios de esta materia, aplicando el cálculo de funciones de varias variables.

6.1 Las ecuaciones diferenciales para el movimiento de una partícula en tres dimensiones

a. Las ecuaciones de movimiento

En el Volumen I (Capítulo 4, pp. 397-423) se estudió el caso de una partícula restringida a moverse en el plano x, y Ahora se eliminará esta restricción y se considerará una masa m concentrada en un punto con coordenadas (x, y, z). El vector de posición de la partícula con respecto al origen tiene las componentes x, y, z y se denota por **R**. Entonces, el movimiento de la partícula se podrá representar matemáticamente si (x, y, z) o **R** pueden expresarse como funciones del tiempo, t. Si, como antes, se denota la derivación con respecto al tiempo por medio de un punto, entonces el vector $\dot{\mathbf{R}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ de longitud

$$(1) \qquad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

representa la *velocidad* y el vector $\ddot{\mathbf{R}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$, la *aceleración* de la partícula.

La herramienta fundamental para determinar el movimiento es la *segunda ley de Newton*[1], según la cual el producto del vector aceleración $\ddot{\mathbf{R}}$, y la masa m, es igual al vector fuerza $\mathbf{F} = (x, y, z)$ que actúa sobre la partícula:

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}, \tag{2a}$$

o, en componentes,

$$m\ddot{x} = X, \qquad m\ddot{y} = Y, \qquad m\ddot{z} = Z. \tag{2b}$$

Pueden usarse estas relaciones[2] para encontrar el movimiento, siempre que se dé información suficiente acerca de la fuerza $\mathbf{F}$.

Un ejemplo es el campo constante de fuerzas que representa a la gravedad cerca de la superficie de la Tierra. Considerando la gravedad como si actuara en la dirección del eje z negativo, la fuerza queda representada por el vector

$$\mathbf{F} = (0, 0, -mg) = -mg(\text{grad } z), \tag{3}$$

donde g es la aceleración constante debido a la gravedad (ver el Volumen I, p. 399).

Otro ejemplo es el campo de fuerzas producido por una masa μ concentrada en el origen del sistema coordenado y que atrae de acuerdo con la ley de la gravitación de Newton (ver el Volumen I, p. 413). Si $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\mathbf{R}|$ es la distancia al origen de una partícula en (x, y, z) con masa m, el campo de fuerzas está dado por la expresión

$$\mathbf{F} = \mu m\gamma\left(\text{grad } \frac{1}{r}\right), \tag{4a}$$

donde γ es la constante universal de la gravitación. En este caso, la segunda ley de movimiento de Newton, (2a), afirma que

$$\ddot{\mathbf{R}} = \mu\gamma \text{ grad } \frac{1}{r} \tag{4b}$$

[1] "Mutationem motus proporcionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam quea vis illa imprimitur" (es decir, "el cambio de movmiento es proporcional a la fuerza aplicada y se lleva a cabo en la dirección de la recta a lo largo de la cual actúa la fuerza").

[2] El vector $m\dot{\mathbf{R}}$ se llama *momento lineal*, de modo que la ley de Newton afirma que "la fuerza es igual a la rapidez de cambio del momento lineal"

o, en componentes,

$$\ddot{x} = -\mu\gamma\frac{x}{r^3}, \qquad \ddot{y} = -\mu\gamma\frac{y}{r^3}, \qquad \ddot{z} = -\mu\gamma\frac{z}{r^3}.$$

En general, si **F** es un campo de fuerzas dado, con componentes $X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)$, que son funciones de posición conocidas, las ecuaciones de movimiento

$$m\ddot{x} = X(x, y, z), \qquad m\ddot{y} = Y(x, y, z), \qquad m\ddot{z} = Z(x, y, z)$$

forman un sistema de tres *ecuaciones diferenciales* para las tres funciones desconocidas $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. El problema fundamental de la mecánica de una partícula es determinar su trayectoria a partir de esas ecuaciones diferenciales cuando, al principio del movimiento, digamos en el instante $t = 0$, se dan la *posición* de la partícula [es decir, las coordenadas $x_0 = x(0), y_0 = y(0), z_0 = \dot{z}(0)$] y su *velocidad inicial* [es decir, las cantidades $\dot{x}_0 = \dot{x}(0), \dot{y}_0 = \dot{y}(0), \dot{z}_0 = \dot{z}(0)$]. El problema de encontrar tres funciones que satisfagan estas condiciones iniciales y también las tres ecuaciones diferenciales, para todos los valores de t, se conoce como problema de la *solución* o *integración*[1] del sistema de ecuaciones diferenciales.

b. El principio de conservación de la energía

Las ecuaciones de movimiento (2a) para una partícula tienen una importante consecuencia que se obtiene formando su producto escalar con el vector velocidad $\dot{\mathbf{R}}$:

$$\text{(6a)} \qquad m\dot{\mathbf{R}} \cdot \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{R}} = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}.$$

Aquí el primer miembro puede escribirse como

$$\text{(6b)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}}\right) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}mv^2,$$

es decir, como la derivada respecto al tiempo de la *energía cinética*, $\frac{1}{2}mv^2$ (*energía de movimiento*), de la partícula. Integrando la ecuación (6a) con respecto a t, desde t_0 hasta t_1, se encuentra que el cambio en la energía cinética de la partícula durante el intervalo de tiempo desde t_0 hasta t_1 está dado por.

[1] Aquí se usa este término porque la solución de las ecuaciones diferenciales puede considerarse como una generalización del proceso de integración ordinaria.

(6c) $$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{t_0}^{t_1}\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right)dt$$
$$= \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

donde la integral de línea se extiende sobre la trayectoria descrita por la partícula durante el tiempo desde t_0 hasta t_1. La integral

$$\int X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

evaluada sobre un arco orientado, se llama *el trabajo realizado por la fuerza* $\mathbf{F} = (X, Y, Z)$ durante el movimiento a lo largo de este arco.[1] De aquí que (6a) puede enunciarse como la *ecuación de la energía: la ganancia en energía cinética es igual al trabajo realizado por la fuerza durante el movimiento.*

En el importante caso en que el campo de fuerzas puede represense como el gradiente de una función, digamos

(7a) $$\mathbf{F} = \text{grad}\,\phi,$$

la integral de la forma diferencial

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d\phi$$

es independiente de la trayectoria y sólo depende de sus puntos inicial y final (ver la p. 125). De acuerdo con Helmholtz, un campo de fuerzas del tipo (7a) es conservativo[2]. Se introduce la *energía potencial, U, (energía de posición)* del campo conservativo de fuerzas por medio de $U = -\phi$. Entonces las ecuaciones de movimiento tienen la forma

$$m\ddot{\mathbf{R}} = -\text{grad}\,U$$

[1] Ver el Volumen I, p. 420. Introduciendo la longitud de arco s como parámetro, la integral de línea toma la forma

$$\int \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{R}}{ds}\,ds$$

y, por tanto, es igual al límite de las sumas de la componente de la fuerza en la dirección del movimiento multiplicada por las distancias.

[2] "Consevativo", en virtud del teorema de la conservación de la energía, el cual se deducirá en breve.

o, en componentes,

(7b) $$m\ddot{x} = -U_x, \quad m\ddot{y} = -U_y, \quad m\ddot{z} = -U_z.$$

La energía potencial, como una función de la posición (x, y, z), queda determinada por el campo de fuerzas sólo hasta una constante aditiva arbitraria. Para el trabajo realizado por las fuerzas conservativas durante el movimiento, se encuentra

$$\int X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -\int dU = U_0 - U_1,$$

donde U_0 y U_1 son los valores respectivos de la energía potencial para las posiciones de la partícula en los instantes t_0 y t_1. Comparando con (6c) se demuestra que

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + U_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 + U_0.$$

Por tanto, la cantidad $\frac{1}{2}mv^2 + U$ tiene el mismo valor en cualesquiera instantes t_0 y t_1 durante el movimiento. Sin entrar en la explicación física de estos conceptos, se ha llegado a una forma de la *ley de conservación de energía* para una partícula en un campo conservativo de fuerzas:

La energía total - es decir, la suma de la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ *y de la energía potencial* U— permanece constante durante el movimiento.

En los ejemplos de las secciones que siguen se muestra cómo puede usarse este teorema en la solución de las ecuaciones del movimiento.

Nótese que los dos campos de fuerzas definidos por las ecuaciones (3) y (4) son conservativos. Las ecuaciones de movimiento de una partícula bajo el campo gravitacional uniforme (3) se reducen a

(8a) $$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g.$$

Su solución general está dada trivialmente por

(8b) $$x = a_1t + a_2, \qquad y = b_1t + b_2, \qquad z = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2.$$

Aquí, obviamente, las constantes (a_2, b_2, c_2) dan la posición inicial y las constantes (a_1, b_1, c_1), la velocidad inicial de la partícula en el instante $t = 0$. La trayectoria de la partícula, dada paramétricamente en términos del tiempo t por las ecuaciones (8b), es una parábola

con el eje paralelo al eje z. Puesto que el campo de fuerzas es $-mg$ grad z, la energía potencial es $U = mgz +$ constante. Los cambios en U son proporcionales a los cambios en la elevación, z. Así, la ley de conservación de la energía toma la forma

$$\text{(8c)} \qquad \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{constante} = \frac{1}{2}mv_0{}^2 + mgz_0$$

$$= \frac{1}{2}m(a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2) + mgc_2.$$

Por lo tanto, la velocidad, v, es mínima en el punto más alto de la trayectoria.

En lugar de una partícula que cae libremente puede considerarse una partícula que se mueve bajo la influencia del campo gravitacional $\mathbf{F} = -mg\,\text{grad}\,z$, estando la partícula restringida a permanecer sobre una superficie $z = f(x, y)$ por medio de una *fuerza de reacción* perpendicular a la superficie.[1] Como la fuerza de reacción no tiene componente en la dirección del movimiento, y por tanto, no realiza trabajo, el trabajo durante el movimiento es el realizado por el campo gravitacional conservativo. Por lo tanto, se llega a la misma ecuación de la energía,

$$\text{(9)} \qquad \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{contante},$$

que para el cuerpo que cae libremente, siendo la única diferencia que $z = f(x, y)$ es ahora una función prescrita de las coordenadas x, y.

c. Equilibrio. Estabilidad

Las ecuaciones de movimiento

$$\text{(10a)} \qquad m\ddot{\mathbf{R}} = -\text{grad}\,U,$$

de una partícula en un campo conservativo de fuerzas nos permiten discutir los movimientos cerca de una posición de equilibrio. Se dice que la partícula está *en equilibrio bajo la influencia del campo de fuerzas*, si permanece en reposo. Para que pueda ser éste el caso, su velocidad y su aceleración deben ser ambas 0 en todo el intervalo de

[1] Un ejemplo se encuentra en el péndulo esférico, donde una masa está restringida a moverse sobre una esfera. Compárese con los movimientos sobre una curva, discutidos en el Volumen I, pp. 405 y siguientes.

tiempo bajo consideración. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento (10a) dan

(10b) $$\text{grad } U = 0,$$

o bien,

(10c) $$U_x = U_y = U_z = 0$$

como las condiciones necesarias para el equilibrio. Así, *una posición de equilibrio,* (x_0, y_0, z_0), *necesariamente es un punto crítico de la energía potencial U.* Recíprocamente, todo punto crítico (x_0, y_0, z_0) de U es una posición posible de reposo, puesto que, obviamente, el vector constante

$$\mathbf{R} = (x_0, y_0, z_0)$$

satisface las ecuaciones (10a).

De gran importancia práctica es la noción de *estabilidad* del equilibrio. Por *estabilidad* se debe entender que si se perturba ligeramente el estado de equilibrio, el movimiento total resultante sólo diferirá ligeramente del estado de reposo.[1] Más precisamente, sean r_1 y v_1 números positivos cualesquiera. Correspondiendo a r_1 y v_1 pueden encontrarse dos números positivos, r_0, v_0, tan pequeños que si se mueve la partícula una distancia no mayor que r_0 de su posición de equilibrio y se le imprime una velocidad no mayor que v_0, entonces en su movimiento total subsiguiente nunca alcanzará una distancia mayor que r_1 del punto de equilibrio y una velocidad mayor que v_1.

Particularmente interesante es el hecho de que *el equilibrio es estable en un punto en el cual la energía potencial U tiene un mínimo*

[1] La noción puede ilustrarse mejor por medio del problema bidimensional análogo, de una partícula que se mueve bajo la acción de la gravedad, pero restringida a permanecer sobre de una superficie $z = f(x, y)$. Aquí las posiciones de equilibrio son los puntos críticos de la energía potencial $mgz = mgf(x, y)$, es decir, los puntos más altos o más bajos o los puntos silla de la superficie $z = f(x, y)$. El equilibrio es estable para una partícula que se encuentra en reposo, digamos, bajo la influencia de la gravedad, en el punto más bajo de un tazón esférico cóncavo hacia arriba. Por otra parte, una partícula que se encuentra en reposo en el punto más alto de un tazón esférico cóncavo hacia abajo está en equilibrio *inestable;* la más ligera perturbación produce un cambio grande en la posición. Como, en la práctica, se supone que siempre están presentes pequeñas perturbaciones, no se mantiene el equilibrio inestable y es poco probable que se observe.

relativo estricto.[1] Debe hacerse notar que esta proposición acerca de la estabilidad puede probarse sin resolver realmente las ecuaciones del movimiento. Por simplicidad, supóngase que la posición de equilibrio bajo consideración es el origen, lo cual siempre es posible mediante una traslación. Además, como la energía potencial sólo está determinada hasta una constante, puede suponerse que $U(0, 0, 0) = 0$. Dado que U tiene un mínimo relativo estricto en el origen, puede hallarse un número positivo $r < r_1$ tal que $U > 0$ en todo punto sobre la superficie de la esfera de radio r alrededor del origen y en su interior, excepto en el origen. Entonces, el valor mínimo de U sobre la superficie de la esfera es un número positivo, a. Ya que U es continua, puede encontrarse un $r_0 < r$ tal que $U(x, y, z) < \frac{1}{2}a$ y $U(x, y, z) < \frac{1}{4}mv_1^2$ en la esfera sólida de radio r_0 alrededor del origen. Además, sea el número positivo v_0 tan pequeño que $\frac{1}{2}mv_0^2 < \frac{1}{2}a$ y $\frac{1}{2}mv_0^2 < \frac{1}{4}mv_1^2$. Entonces, para una posición inicial de la partícula con distancia al origen menor que r_0 y con una velocidad inicial menor que v_0, la energía total inicialmente satisface las desigualdades

$$\text{(11a)} \qquad \frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) \leqq \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}a < a$$

$$\text{(11b)} \qquad \frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) < \frac{1}{4}mv_1^2 + \frac{1}{4}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Puesto que la energía es constante en todo el movimiento, de (11a) se ve que en todos los instantes subsiguientes

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) < a,$$

y, en consecuencia,

$$U(x, y, z) < a.$$

Como, inicialmente, la partícula estaba en el interior de la esfera de radio r, y ya que $U \geqq a$ sobre esa esfera, la partícula nunca puede alcanzar la superficie de la esfera. Esto demuestra que la distancia de la partícula al origen nunca es mayor que el valor $r < r_1$. Dado que también $U \geqq 0$ en el interior de la esfera de radio r, de (11b) se deduce que

$$\frac{1}{2}mv^2 < \frac{1}{2}mv_1^2$$

[1] En un punto mínimo *estricto* el valor de U es menor que en todos los demás puntos de una vecindad lo suficientemente pequeña. Ver las páginas 325-6 en relación con las definiciones.

y, consecuentemente, que la velocidad de la partícula nunca es mayor que el valor v_1, lo que tenía que demostrarse.

d. Oscilaciones pequeñas en torno a una posición de equilibrio

El movimiento de una partícula en torno a una posición de equilibrio estable, correspondiente a un mínimo de la energía potencial, puede ser aproximado en una forma muy sencilla. Por brevedad nos restringiremos a un movimiento en el plano x, y y supondremos que no existe fuerza alguna actuando en la dirección del eje z. También se supondrá que el potencial $U(x,y)$ tiene un mínimo en el origen y que $U(0, 0) = 0$. Además, en el punto mínimo, $U = U_0 = 0$. Imaginemos U desarrollada por medio del teorema de Taylor en la forma

$$U = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \cdots.$$

La función U tendrá un mínimo relativo estricto en el origen si la forma cuadrática

$$Q(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) \tag{12a}$$

es *definida positiva;* es decir, si

$$a > 0, \quad ac - b^2 > 0. \tag{12b}$$

Se supone que se satisfacen las condiciones (12b) y que *en una vecindad suficientemente pequeña de la posición de equilibrio en el origen, la energía potencial U puede ser remplazada con bastante exactitud por la forma cuadrática Q*[1]. Bajo estas hipótesis las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$m\ddot{\mathbf{R}} = -\operatorname{grad} Q,$$

[1]Ver la página 347. El carácter definido positivo de Q es suficiente, pero no necesario, para la existencia de un máximo relativo estricto. Sin embargo, es necesario que Q no sea indefinida ni definida negativa.

[2]Ningún intento serio puede hacerse aquí para justificar esta suposición "plausible".

o bien,

(12c)[2] $$m\ddot{x} = -ax - by, \qquad m\ddot{y} = -bx - cy.$$

Las ecuaciones (12c) pueden integrarse completamente si primero se giran los ejes x y y en un ángulo ϕ, elegido con propiedad, de modo que los nuevos ejes coordenados coincidan con los *ejes principales* de las elipses $Q =$ constante. Efectúese la sustitución ortogonal

$$x = \xi \cos\phi - \eta \operatorname{sen}\phi, \qquad y = \xi \operatorname{sen}\phi + \eta \cos\phi.$$

donde ϕ se determina a partir de la condición de que

$$Q = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = \frac{1}{2}(\alpha\xi^2 + \gamma\eta^2),$$

[1]Nuevamente, pueden interpretarse estas ecuaciones como aproximaciones de las ecuaciones de movimiento, bajo la acción de la gravedad, de una partícula restringida a moverse sobre una superficie $z = f(x, y)$, cerca de un punto mínimo de esa superficie. Aquí, las ecuaciones precisas de movimiento tienen la forma

$$\ddot{x} = -\lambda f_x, \qquad \ddot{y} = -\lambda f_y, \qquad \ddot{z} = -g + \lambda,$$

tomando en consideración que las fuerzas que actúan sobre una partícula son la fuerza gravitacional $(0, 0, -mg)$ y la *fuerza de reacción*, $(-\lambda f_x, -\lambda f_y, \lambda)$, que es perpendicular a la superficie y que contiene un multiplicador indeterminado, λ. Puede eliminarse λ, observando que

$$\ddot{z} = \frac{d^2 f}{dt^2} = f_x\ddot{x} + f_y\ddot{y} + f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2$$

y así se obtienen las ecuaciones

$$\ddot{x} = -\lambda f_x, \qquad \ddot{y} = -\lambda f_y$$

con

$$\lambda = \frac{g + f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2}{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

para las dos funciones desconocidas x, y. Si f tiene un mínimo en el origen y es aproximada allí por la cuadrática

(13a) $$f = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2),$$

cerca del origen se encuentran, despreciando todos los términos no lineales, las ecuaciones diferenciales

(13b) $$\ddot{x} = -g(\alpha x + \beta y), \qquad \ddot{y} = -g(\beta x + \gamma y)$$

que son de la forma (12c). Si, por ejemplo, la superficie es la esfera

$$z = L - \sqrt{L^2 - x^2 - y^2}$$

("un péndulo esférico de longitud L"), se encuentran

(13c) $$\ddot{x} = -\frac{g}{L}x, \qquad \ddot{y} = -\frac{g}{L}y.$$

con las constantes positivas apropiadas α, γ [1]. En las nuevas coordenadas rectangulares ξ, η, las ecuaciones de movimiento (12c) se transforman en

$$m\ddot{\xi} = -\alpha\xi, \qquad m\ddot{\eta} = -\gamma\eta. \tag{14a}$$

Como en el Volumen I (p. 404), estas dos ecuaciones pueden integrarse completamente. Se obtiene

$$\xi = A_1 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}(t - c_1), \qquad \eta = A_2 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{\gamma}{m}}(t - c_2), \tag{14b}$$

donde c_1, c_2, A_1, A_2 son constantes de integración que nos permiten hacer que el movimiento satisfaga cualesquier condiciones iniciales asignadas arbitrariamente.[2]

La forma de la solución muestra que el movimiento en torno a una posición de equilibrio estable es el resultado de la superposición de oscilaciones armónicas simples en las dos *direcciones principales*, la dirección ξ y la dirección η, estando dadas las frecuencias de estas oscilaciones por $\sqrt{\alpha/m}$ y $\sqrt{\gamma/m}$. [3] Una discusión general de estas oscilaciones, que no se llevará a cabo aquí, demuestra que el movimiento resultante puede tomar una gran variedad de formas.

Para dar unos cuantos ejemplos de estas oscilaciones compuestas, considérese primero el movimiento representado por las ecuaciones

$$\xi = \operatorname{sen}(t + c), \quad \eta = \operatorname{sen}(t - c)$$

Eliminando el tiempo t, se obtiene la ecuación

$$(\xi + \eta)^2 \operatorname{sen}^2 c + (\xi - \eta)^2 \cos^2 c = 4 \operatorname{sen}^2 c \cos^2 c,$$

que representa una elipse. Las dos componentes de la oscilación tienen la misma frecuencia, 1, y la misma amplitud, 1, pero una

[1] Inmediatamente se encuentra que ϕ queda determinada por la ecuación

$$\tan 2\phi = \frac{2b}{a - c}.$$

La positividad de α, γ se deduce del hecho de que Q es definida positiva.

[2] Es interesante observar que en los casos de equilibrio *inestable,* una o ambas de las constantes α, γ podría ser negativa. En ese caso, las funciones trigonométricas que se presentan en (14b) tendrían que remplazarse por funciones hiperbólicas y las coordenadas ξ, η no estarían ambas acotadas para todo t.

[3] En el caso (13c) del péndulo esférico las dos frecuencias tienen el mismo valor, $\sqrt{g/L}$.

diferencia de fase $2c$. Si esta diferencia de fase toma sucesivamente todos los valores entre 0 y $\pi/2$, la elipse correspondiente pasa del caso degenerado de la recta $\xi - \eta = 0$ al círculo $\xi^2 + \eta^2 = 1$, y la oscilación pasa de la llamada oscilación lineal a la circular (ver Figs. 6.1 - 6.3).

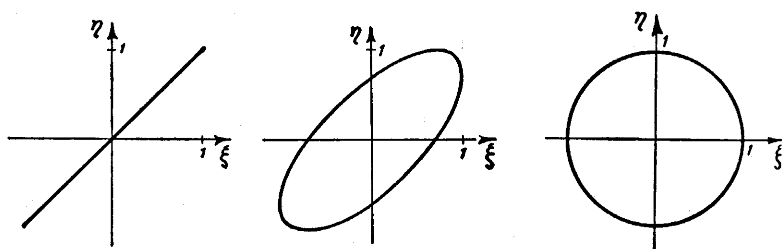
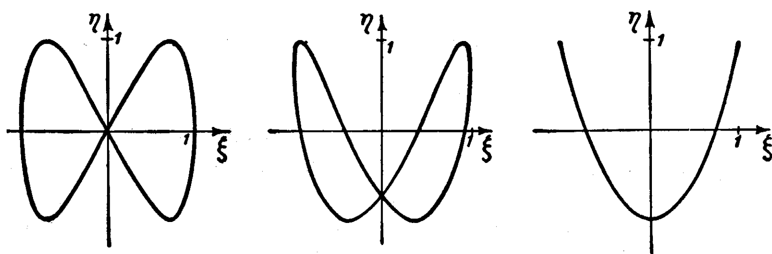


Figura 6.1-6.3 Diagramas de oscilaciones.

Si, como un segundo ejemplo, se considera el movimiento representado por las ecuaciones

$$\xi = \operatorname{sen} t, \qquad \eta = \operatorname{sen} 2(t - c),$$

donde las frecuencias ya no son iguales, se obtienen diagramas de oscilación más complicados. En las Figs. 6.4-6.6 se dan estas curvas para las diferencias de fase $c = 0$, $c = \pi/8$, y $c = \pi/4$, respectivamente. En los dos primeros casos la partícula se mueve continuamente sobre una curva cerrada, pero en el último caso, va hacia adelante y hacia atrás sobre un arco de la parábola $\eta = 2\xi^2 - 1$. Las curvas que se obtienen por la superposición de diferentes oscilaciones armónicas simples en direcciones mutuamente perpendiculares reciben el nombre general de *figuras de Lissajous*.



Figuras 6.4-6.6 Diagramas de oscilaciones.

e. Movimiento planetario *

En los ejemplos discutidos en los párrafos anteriores pueden escribirse inmediatamente (o después de una simple transformación) las ecuaciones diferenciales del movimiento de manera tal que cada una de las coordenadas aparezca solamente en una ecuación diferencial y pueda determinarse mediante integración elemental. Ahora se considerará el caso más importante de un movimiento en el que las ecuaciones de movimiento ya no son separables en una forma tan sencilla, de modo que su integración representa un cálculo un tanto más difícil. El problema en cuestión es la *deducción de las leyes de Kepler del movimiento planetario a partir de la ley de la atracción de Newton*. Supóngase que en el origen del sistema coordenado existe un cuerpo de masa μ (por ejemplo, el sol) cuyo campo gravitacional de fuerzas por unidad de masa está dado por el vector

$$\gamma\mu \operatorname{grad} \frac{1}{r}.$$

¿Cuál es el movimiento de una partícula de masa m (un planeta) bajo la influencia de este campo de fuerzas? Las ecuaciones de movimiento son (ver la p. 726)

$$(15) \qquad \ddot{x} = -\gamma\mu \frac{x}{r^3}, \qquad \ddot{y} = -\gamma\mu \frac{y}{r^3}, \qquad \ddot{z} = -\gamma\mu \frac{z}{r^3}.$$

Con el fin de integrarlas, primero enunciemos el teorema de conservación de la energía (ver la p. 729) para el movimiento en la forma

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\gamma\mu m}{r} = C,$$

donde C es constante en todo el movimiento y se determina por medio de las condiciones iniciales.

De las ecuaciones de movimiento (15) pueden deducirse otras ecuaciones en las que sólo estén presentes las componentes de la velocidad, no de la aceleración. Si se multiplica la primera ecuación de movimiento por y, la segunda por x, y a continuación se restan, se obtiene

$$\ddot{x}y - x\ddot{y} = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{d}{dt}(\dot{x}y - \dot{y}x) = 0,$$

[1]En el Volumen I (pp. 413 y siguientes) se ha discutido el caso especial del movimiento circular.

de donde, por integración, resulta

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c_1.$$

De modo semejante, a partir de la restante ecuación de movimiento, se obtiene[1]

$$y\dot{z} - z\dot{y} = c_2, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = c_3.$$

Estas ecuaciones nos permiten simplificar el problema considerablemente, en una forma que es altamente plausible desde el punto de vista intuitivo. Sin pérdida de generalidad, puede elegirse el sistema coordenado de manera que al principio del movimiento, es decir, para $t = 0$, la partícula esté en el plano x, y y su vector velocidad en ese instante también esté en ese plano. Entonces $z(0) = 0$, y $\dot{z}(0) = 0$; sustituyendo estos valores en las ecuaciones anteriores y recordando que los segundos miembros son constantes, se obtiene

(16a) $$x\dot{y} - y\dot{x} = c_1 = h,$$

(16b) $$y\dot{z} - z\dot{y} = 0,$$

(16c) $$z\dot{x} - x\dot{z} = 0.$$

De estas ecuaciones se concluye, en primer lugar, que todo el movimiento se realiza en el plano $z = 0$. Como, naturalmente, se ex-

---

[1] También puede llegarse a estas tres ecuaciones, en notación vectorial, si se forma el producto vectorial de ambos miembros de la ecuación de movimiento con el vector de posición **R**. Como el vector fuerza está en la misma dirección que el vector de posición, se obtiene cero a la derecha, mientras que la expresión $\mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{R}}$ de la izquierda es la derivada del vector $\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}$ con respecto al tiempo. Por lo tanto, se concluye que este vector $\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{C}$ tiene un valor constante en el tiempo; exactamente ésto es lo que se afirma mediante las ecuaciones coordenadas de arriba.

Como se ve, esta ecuación no depende del problema especial de que se trate, sino que se cumple en general para todo movimiento en el que la fuerza tenga la misma dirección que el vector de posición.

El vector $\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}$ se llama *momento de la velocidad* y el vector $m\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}$, *momento del momento lineal* del movimiento. A partir del significado geométrico del producto vectorial, fácilmente se obtiene la siguiente interpretación intuitiva de la relación que se acaba de dar (ver las estudios subsiguientes en el texto). Si se proyecta la partícula en movimiento sobre los planos coordenados y, en cada plano coordenado, se considera el área que el radiovector que va del origen al punto de proyección barre en el tiempo t, se ve que esta área es proporcional al tiempo (*teorema de las áreas*).

cluye la posibilidad de una colisión inicial entre el sol y el planeta, se supone que inicialmente las tres coordenadas (x, y, z) no se anulan simultáneamente, de modo que en el instante $t = 0$, en el cual $z(0) = 0$, se tiene, digamos, $x(0) \neq 0$. Ahora bien, de (16c) se deduce que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{z}{x}\right) = -\frac{z\dot{x} - \dot{z}x}{x^2} = 0.$$

Por lo tanto, $z = ax$, donde a es una constante. Si aquí se pone $t = 0$, entonces de las ecuaciones $z(0) = 0$ y $x(0) \neq 0$, se conluye que $a = 0$, de modo que z siempre es 0.

Por lo tanto, el problema se reduce a la integración de las dos ecuaciones diferenciales

(17a) $$\frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\gamma\mu m}{r} = C,$$

(17b) $$x\dot{y} - y\dot{x} = h.$$

En seguida se usan las ecuaciones $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ para transformar las coordenadas rectangulares (x, y) en las coordenadas polares (r, θ), las cuales ahora deben determinarse como funciones de t. Ya que

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2, \qquad x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\theta},$$

se tienen las dos ecuaciones diferenciales

(17c) $$\frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\gamma\mu m}{r} = C,$$

(17d) $$r^2\dot{\theta} = h$$

para las coordenadas polares r, θ. La primera de estas ecuaciones es el teorema de la *conservación de la energía*, mientras que la segunda expresa la *ley de las áreas de Kepler*. De hecho (ver el Volumen I, pp. 371-372), la expresión $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ es la derivada con respecto al tiempo del área barrida en el tiempo t por el radio vector del origen a la partícula. Se encuentra que ésta es constante o, como lo expresó Kepler, *el radio vector describe áreas iguales en tiempos iguales.*

Si la *constante h del área* es cero, $\dot{\theta}$ debe anularse; es decir, θ debe permanecer constante, de modo que el movimiento debe llevarse a cabo sobre una recta que pasa por el origen. Se excluye este caso especial y expresamente se supone que $h \neq 0$.

Para encontrar la forma geométrica de la órbita, ésta ya no se describirá paramétricamente en términos del tiempo[1], sino que se considerará el ángulo θ como una función de r, o bien, r como una función de θ, y a partir de las dos ecuaciones obtenidas se calculará la derivada $dr/d\theta$ como una función de r.

Si se sustituye el valor $\theta = h/r^2$, obtenido de la ecuación del área, en la ecuación de la energía y se recuerda que

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta},$$

inmediatamente se obtiene la ecuación diferencial de la órbita en la forma

$$\frac{m}{2}\left\{\frac{h^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2}\right\} - \frac{\gamma\mu m}{r} = C$$

o bien,

(17e) $$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = r^4\left(\frac{2C}{mh^2} + \frac{2\gamma\mu}{h^2}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\right).$$

Para simplificar los últimos cálculos se hace la sustitución

$$r = \frac{1}{u}$$

y se introducen las abreviaturas siguientes:

$$\frac{1}{p} = \frac{\gamma\mu}{h^2}, \qquad \varepsilon^2 = 1 + \frac{2Ch^2}{m\gamma^2\mu^2}.$$

Entonces la ecuación diferencial (17e) queda

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2,$$

[1] El curso del movimiento como una función del tiempo puede determinarse subsecuentemente por medio de la ecuación

$$\int_{\theta_0}^{\theta} r^2\, d\theta = h(t - t_0),$$

en la cual se supone que se conoce r como una función de θ (ver la p. 816).

y ésta puede integrarse inmediatamente. Se tiene

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{du}{\sqrt{(\varepsilon^2/p^2 - (u - 1/p)^2)}},$$

o bien, si por el momento se introduce $u - 1/p = v$ como una nueva variable,

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{dv}{\sqrt{(\varepsilon^2/p^2) - v^2}}.$$

Para la integral [por el Volumen I, p. 270, fórmula (24)] se obtiene el valor arc sen (vp/ε) y, por tanto, se encuentra la ecuación de la órbita en la forma

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{p} = v = \frac{\varepsilon}{p} \sin(\theta - \theta_0).$$

El ángulo θ_0 puede elegirse arbitrariamente, ya que no importa a partir de cuál recta fija se mida el ángulo θ. Si se toma $\theta_0 = \pi/2$ — es decir, si se hace corresponder $v = 0$ con el valor $\theta = \pi/2$ — finalmente se obtiene la ecuación de la órbita en la forma

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\theta}.$$

Esta es la conocida ecuación en coordenadas polares de una cónica que tiene un foco en el origen.[1]

Por lo tanto, este resultado da la ley de Kepler:

Los planetas se mueven describiendo cónicas con el sol en uno de los focos.

Es interesante relacionar las constantes de integración

$$p = \frac{h^2}{\gamma\mu}, \qquad \varepsilon^2 = 1 + \frac{2Ch^2}{m\gamma^2\mu^2}$$

con el movimiento inicial. La cantidad p se conoce como *semilado recto o parámetro* de la cónica; en el caso de la elipse y la hipérbola, está relacionado con los semiejes a y b por medio de la simple expresión

[1] Esto se ve con facilidad, transformando la ecuación a coordenadas rectangulares:

$$(x - \varepsilon a)^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} = a^2 \qquad \left(a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}\right).$$

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

El cuadrado de la excentricidad, ε^2, determina el carácter de la cónica; es una elipse, una parábola o una hipérbola según que ε^2 sea menor, igual o mayor que 1.

De la relación

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2Ch^2}{m\gamma^2\mu^2}$$

inmediatamente se ve que también pueden enunciarse las tres diferentes posibilidades en términos de la constante de la energía, C; la órbita es una elipse, una parábola o una hipérbola según que C sea menor, igual o mayor que cero.

Si se supone que en el instante $t = 0$ la partícula está en el punto $\mathbf{R}_0$ en el campo de fuerzas y se está moviendo con velocidad inicial $\dot{\mathbf{R}}_0$, entonces la relación

$$C = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{\gamma\mu m}{r_0}$$

conduce a la sorperendente conclusión de que el carácter de la órbita —elipse, parábola o hipérbola —de ninguna manera depende de la dirección de la velocidad inicial—, sino sólo de su valor absoluto, v_0.

La tercera ley de Kepler es una sencilla consecuencia de las otras dos:

Para un planeta en órbita elíptica, el cuadrado del período está en una razón constante con el cubo del semieje mayor, dependiendo la razón sólo del campo de fuerzas y no del planeta particular.

Si se denota el período por T y el semieje mayor por a, entonces debe tenerse

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante},$$

donde la constante de la derecha es independiente del problema particular y sólo depende de la magnitud de la masa atractiva y de la constante de gravitación.

Para probar esto se aplica el teorema de las áreas (17d) en la forma integrada

$$\int_{\theta_0}^{\theta} r^2\, d\theta = h(t - t_0)$$

la cual define al movimiento como una función del tiempo. Si se toma la integral sobre el intervalo desde 0 hasta 2π, a la izquierda se obtiene el doble del área de la elipse orbital, que, por los resultados anteriores, es $2\pi ab$; a la derecha, la diferencia de tiempos $t = t_0$ se remplaza por el período T. Por lo tanto,

$$2\pi ab = hT \qquad \text{o} \qquad 4\pi^2a^2b^2 = h^2T^2.$$

Ya se sabe que h^2 está relacionada con los valores a y b de la órbita por medio de la expresión $h^2/\gamma\mu = p = b^2/a$. Si se remplaza h^2 en las ecuaciones anteriores por $(b^2/a)\gamma\mu$, inmediatamente se deduce que

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma\mu},$$

lo cual expresa exactamente la tercera ley de Kepler.

Ejercicios 6.1e

1. Trátese con todo detalle el movimiento de un cuerpo orbitando en una trayectoria recta [$h = 0$ en la ecuación (17d)].
2. Probar que conforme $t \to \infty$ la velocidad v de un planeta tiende a 0 si su órbita es una parábola, y hacia un límite positivo si es una hipérbola.
3. Probar que un cuerpo atraído hacia un centro 0 por una fuerza de magnitud mr se mueve sobre una elipse con centro en 0.
4. Probar que la órbita de un cuerpo repelido por una fuerza de magnitud $f(r)$, donde f es una función dada, desde un centro 0, está dada en las coordenadas polares (r, θ) por

$$\theta = \int^r \frac{dr}{r^2\sqrt{2c/h^2 + 2\int^r f(r)\,dr/h^3 - 1/r^2}}$$

5. Probar que la ecuación de la órbita de un cuerpo que es repelido con una fuerza μ/r^3 por un centro 0 es

$$\frac{1}{r} = \begin{cases} \dfrac{2c}{h^2k}\cos(k\theta + \varepsilon) \text{ para } \mu < h^2 \\ \dfrac{2c}{h^2k}\cosh(k\theta + \varepsilon) \text{ para } \mu > h^2 \end{cases}$$

si

$$k = \sqrt{\left|1 - \frac{\mu}{h^2}\right|}$$

y ε es una constante de integración.

6. Un planeta se está moviendo sobre una elipse y $\omega = \omega(t)$ denota el ángulo $P'MP_s$, donde P' es el punto sobre el círculo auxiliar correspondiente a

P, la posición del planeta en ese instante t; P_s es su posición en el instante t_s cuando está más próximo al sol, S; y M es el centro de la elipse. Probar que ω y t están relacionados por medio de la ecuación de Kepler

$$h(t - t_s) = ab(\omega - \varepsilon \operatorname{sen} \omega).$$

7. Probar que en un campo central de fuerzas la atracción, p, por unidad de masa está dada por

$$p = \frac{h^2}{q^3} \frac{dq}{dr},$$

donde q es la distancia del polo a la tangente a la órbita y h es la constante de área (p. 739). De aquí, probar que la cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$ es la órbita que corresponde a una atracción hacia el polo igual a μr^{-4} por unidad de masa.

8. Una partícula de masa unitaria se mueve bajo la acción de dos fuerzas, de las cuales la primera siempre es hacia el origen e igual a λ^2 veces la distancia de la partícula a ese punto, mientras que la segunda siempre forma ángulos rectos con la trayectoria de la partícula y es igual a 2μ veces su velocidad. Probar que si se proyecta la partícula desde el origen a lo largo del eje x con velocidad u, sus coordenadas en cualquier instante subsiguiente, t, son

$$x = \frac{u}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\, t) \cos \mu t,$$

$$y = \frac{u}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\, t) \operatorname{sen} \mu t.$$

9. Supóngase que se tienen n partículas fijas en un plano, todas ellas ejerciendo atracción mediante una fuerza central de magnitud $1/r$. Probar que no hay más de $n - 1$ posiciones de equilibrio para una partícula en el campo.
Determinar estas posiciones para el caso de cuatro partículas atractivas con coordenadas (a, b), $(a, -b)$, $(-a, b)$, $(-a, -b)$, donde $a > b > 0$.

f. Problemas con valores en la frontera. El cable cargado y la viga cargada.

En los problemas de mecánica y los otros ejemplos que se discutieron previamente, de toda la familia de funciones que satisfacían la ecuación diferencial se seleccionó una función particular por medio de las llamadas *condiciones iniciales;* según este procedimiento se eligen las constantes de integración de manera tal que la solución y, en ciertos casos, algunas de sus derivadas tomen preasignados en un punto definido. En muchas aplicaciones no se requiere

encontrar la solución general ni resolver problemas con valores iniciales definidos, sino que se trata de resolver uno de los llamados *problemas con valores en la frontera.* En un problema con valores en la frontera se busca una solución que satisfaga condiciones preasignadas en *varios* puntos y que satisfaga la ecuación diferencial en los intervalos entre esos puntos. Aquí se discutirán unos cuantos ejemplos típicos sin entrar en la teoría general de tales problemas con valores en la frontera.

Ejemplo 1 — La ecuación diferencial de un cable cargado

En un plano x, y vertical — en el cual el eje y sea vertical — supóngase que se tiende un cable con componente horizontal de tensión S (constante), desde el origen hasta el punto $x = a$, $y = b$, (ver la Fig. 6.7). Sobre el cable sólo actúa una carga cuya densidad por unidad de longitud de la proyección horizontal está dada por una función seccionalmente continua, $p(x)$. Entonces la flecha, $y(x)$ del cable, esto es, la coordenada y, está dada por la ecuación diferencial

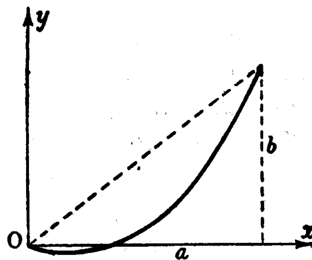


Figura 6.7 Cable cargado.

(18) $$y''(x) = g(x) \qquad g(x) = \frac{p}{S}.$$

Por lo tanto, la forma que toma el cable estará dada por esa solución $y(x)$ de la ecuación diferencial que satisfaga las condiciones $y(0) = 0$, $y(a) = b$. La solución de este problema con valores en la frontera puede escribirse inmediatamente, ya que la solución general de la ecuación homogénea $y'' = 0$ es la función lineal $c_0 + c_1x$, y la solución de la ecuación no homogénea, que, con su primera derivada, se anula en el origen, está dada por la integral $\int_0^x g(\xi)(x - \xi)\, d\xi$ [ver (42), p. 78]. En la solución general

$$y(x) = c_0 + c_1 x + \int_0^x g(\xi)(x - \xi)\, d\xi$$

la condición $y(0) = 0$ inmediatamente da $c_0 = 0$, y, entonces, la condición $y(a) = b$ determina a c_1, mediante la ecuación

$$b = c_1 a + \int_0^a g(\xi)(a - \xi)\, d\xi,$$

En la práctica, a menudo debe tratarse con una forma más complicada de este problema con valores en la frontera; por ejemplo, cuando el cable no sólo está sujeto a la carga distribuída continuamente sino también a cargas concentradas, es decir, cargas que se concentran en un punto definido del cable, digamos, en el punto $x = x_0$. Tales cargas concentradas se considerarán como casos límite ideales que se obtienen, cuando $\varepsilon \to 0$, a partir de una distribución de carga $p(x)$ que actúa sólo en el intervalo desde $x_0 - \varepsilon$ hasta $x_0 + \varepsilon$ y para la cual

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} p(x)\, dx = P.$$

En este caso la carga total P permanece constante durante el paso hacia el límite, $\varepsilon \to 0$; entonces se dice que P es la carga concentrada que actúa en el punto x_0.[1] Integrando ambos miembros de la ecuación diferencial $y'' = p(x)/S$ sobre el intervalo desde $x - \varepsilon$ hasta $x + \varepsilon$ antes de pasar hacia el límite $\varepsilon \to 0$, se ve que se cumple la ecuación $y'(x_0 + \varepsilon) - y'(x_0 - \varepsilon) = P/S$. Si ahora se realiza el paso al límite, $\varepsilon \to 0$, se obtiene el resultado de que *una carga concentrada, P, que actúa en el punto x_0 corresponde a un salto de la derivada $y'(x)$ en una cantidad P/S, en el punto x_0.*

El ejemplo siguiente muestra en qué forma la presencia de una carga concentrada modifica el problema con valores en la frontera.

---

[1] A menudo se concibe la carga concentrada como descrita de manera puramente formal mediante una carga distribuída

$$p(x) = P\,\delta(x - x_0),$$

donde $\delta(x)$ representa una función *generalizada* (la llamada *función de Dirac*) para la cual

$$\delta(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1,$$

sin valor asignado para $\delta(0)$. Ningún valor finito de $\delta(0)$ sería compatible con las otras condiciones impuestas.

Supóngase que se tiende el cable entre los puntos $x = 0$, $y = 0$ y $x = 1$, $y = 1$, y que la única carga es una carga concentrada, de magnitud P, que actúa en el punto medio $x = \frac{1}{2}$. Este problema físico corresponde al siguiente problema matemático: encontrar una función continua $y(x)$ que satisfaga la ecuación diferencial $y'' = 0$ en todo punto del intervalo $0 \leqq x \leqq 1$, excepto en el punto $x_0 = \frac{1}{2}$; que tome los valores $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ en la frontera; y cuya derivada presente un salto igual a P/S en el punto x_0. Para encontrar esta solución, exprésese de la manera siguiente:

$$y(x) = ax + b \qquad (0 \leqq x \leqq \tfrac{1}{2})$$

y

$$y(x) = c(1 - x) + d \qquad (\tfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1).$$

La condición $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ da $b = 0$, $d = 1$. A partir de la condición de que ambas partes de la función deben dar el mismo valor en el punto $x = \frac{1}{2}$, se encuentra que

$$\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}c + 1.$$

Por último, el requerimiento de que la derivada y' se incremente en la cantidad P/S al pasar el punto $\frac{1}{2}$ da la condición

$$-c - a = \frac{P}{S}.$$

Estas condiciones proporcionan los valores

$$a = 1 - \frac{P}{2S}, \qquad b = 0, \qquad c = -1 - \frac{P}{2S}, \qquad d = 1,$$

y se ha encontrado la solución. Es más, no existe otra solución con las mismas propiedades.

Ejemplo 2 — La viga cargada[1]

El tratamiento de una viga cargada es muy semejante (ver la Fig. Ñ.8). Supongamos que en su posición de reposo la viga coincide con el eje x entre las abscisas $x = 0$ y $x = a$. Entonces se encuentra que la flecha (*desplazamiento vertical*) $y(x)$ debida a una fuerza que

[1] Respecto a la teoría de la viga cargada, ver *Mathematical Methods in Engineering* por v. Karman y Biot.

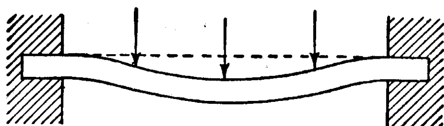


Figura 6.8 Viga cargada.

actúa verticalmente en la dirección y está dada por la ecuación diferencial lineal de cuarto orden

$$y'''' = \varphi(x), \tag{19a}$$

donde el segundo miembro, $\varphi(x)$, es $p(x)/EI$, siendo $p(x)$ la densidad de carga, E el módulo de elasticidad del material de la viga (E es el esfuerzo dividido entre la elongación) e I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga con respecto a una recta horizontal que pase por el centro de masa de dicha sección.

Puede escribirse inmediatamente la solución general de esta ecuación diferencial [(42), p. 78], en la forma

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \int_0^x \varphi(\xi) \frac{(x-\xi)^3}{3!} d\xi,$$

donde c_0, c_1, c_2, c_3 son constantes arbitrarias de integración. Sin embargo, el problema real no es encontrar esta solución general, sino encontrar una solución particular, es decir, determinar las constantes de integración de manera tal que se satisfagan ciertas condiciones definidas en la frontera. Si, por ejemplo, la viga está *empotrada* en los extremos, se cumplen las condiciones en la frontera

$$y(0) = 0, \qquad y(a) = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y'(a) = 0.$$

Entonces se deduce inmediatamente que $c_0 = c_1 = 0$, y las constantes c_2 y c_3 deben determinarse a partir de las ecuaciones

$$c_2 a^2 + c_3 a^3 + \int_0^a \varphi(\xi) \frac{(a-\xi)^3}{3!} d\xi = 0,$$

$$2c_2 a + 3c_3 a^2 + \int_0^a \varphi(\xi) \frac{(a-\xi)^2}{2!} d\xi = 0.$$

Para las vigas también es importante el problema de las cargas concentradas. Una vez más, se imagina la carga concentrada que actúa en el punto $x = x_0$ como si se obtuviera a partir de una carga $p(x)$, distribuída continuamente sobre el intervalo $x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon$, para la cual $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} p(\xi)\, d\xi = P$; nuevamente se hace tender ε hacia cero y, al mismo tiempo, se hace crecer $p(x)$ de manera tal que el valor de P permanezca constante durante el paso hacia el límite, $\varepsilon \to 0$. Entonces P es el valor de la carga concentrada en $x = x_0$. Precisamente como en el ejemplo anterior, se integran ambos miembros de la ecuación diferencial (19a) sobre el intervalo desde $x - \varepsilon$ hasta $x + \varepsilon$ y, a continuación, se pasa al límite conforme $\varepsilon \to 0$. Se encuentra que la tercera derivada de la solución $y(x)$ debe presentar un salto en el punto $x = x_0$, igual a

(19b) $$y'''(x_0 + 0) - y'''(x_0 - 0) = \frac{P}{EI}.$$

Aquí $y(x_0 + 0)$ significa el límite de $y(x_0 + h)$ conforme h tiende a 0 con valores positivos, siendo $y(x_0 - 0)$ el límite correspondiente desde la izquierda.

Así, surge el siguiente problema matemático: se trata de encontrar una solución de $y'''' = 0$ que, lo mismo que su primera y segunda derivadas, sea continua; para la cual $y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0$, y cuya tercera derivada tenga un salto igual a P/EI en el punto $x = x_0$ y en todos los demás puntos sea continua.

Si la viga está *fija* en un punto $x = x_0$ (ver la Fig. 6.9) —es decir, si en este punto la flecha tiene el valor fijo preasignado $y = 0$— puede suponerse que esta restricción se logra por medio de una carga concentrada que actúa en ese punto. Por el principio mecánico de que la acción es igual a la reacción, el valor de esta carga concentrada será igual a la fuerza que la viga fija ejerce sobre su apoyo. Entonces, de inmediato, la magnitud P de esta fuerza está dada por la fórmula [(ver (19b)]

$$P = EI\,\{y'''(x_0 + 0) - y'''(x_0 - 0)\},$$

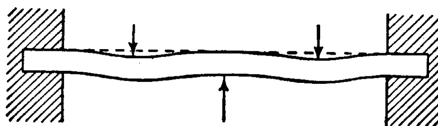


Figura 6.9 Flecha de una viga apoyada en su punto medio.

donde $y(x)$ satisface la ecuación diferencial $y'''' = p/EI$ en todo punto del intervalo $0 \leqq x \leqq 1$, excepto en el punto $x = x_0$, y, además, también satisface las condiciones $y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0$, $y(x_0) = 0$, y y, y', y y'' también son continuas en $x = x_0$.

Con el fin de ilustrar estas ideas considérese una viga que se extiende desde el punto $x = 0$ hasta el punto $x = 1$, está empotrada en sus puntos extremos $x = 0$ y $x = 1$, lleva una carga uniforme de densidad $p(x) = 1$, y está apoyada en el punto $x = \frac{1}{2}$ (ver la Fig. 6.9). Por simplicidad, supóngase que $EI = 1$, de modo que la viga satisface la ecuación diferencial

$$y'''' = 1$$

en todo punto, excepto en el punto $x = \frac{1}{2}$.

Como indica la fórmula, la solución general de la ecuación diferencial es un polinomio de cuarto grado en x, siendo el coeficiente de x^4 igual a $1/4!$. La ecuación será expresada por un polinomio de este tipo en cada uno de los dos semintervalos. Para el primer semintervalo se escribe el polinomio en la forma

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \frac{1}{4!} x^4;$$

en el segundo semintervalo, en la forma

$$y = c_0 + c_1(x - 1) + c_2(x - 1)^2 + c_3(x - 1)^3 + \frac{1}{4!}(x - 1)^4.$$

Puesto que la viga está empotrada en los extremos $x = 0$ y $x = 1$, se concluye que

$$y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0,$$

de donde se obtiene $b_0 = b_1 = c_0 = c_1 = 0$. Además, $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ deben ser continuas en el punto $x = \frac{1}{2}$; es decir, los valores de $y(\frac{1}{2})$, $y'(\frac{1}{2})$, $y''(\frac{1}{2})$ calculados a partir de los dos polinomios deben ser los mismos, y el valor de $y(\frac{1}{2})$ debe ser 0. Esto da

$$\frac{1}{4} b_2 + \frac{1}{8} b_3 + \frac{1}{384} = \frac{1}{4} c_2 - \frac{1}{8} c_3 + \frac{1}{384} = 0,$$

$$b_2 + \frac{3}{4} b_3 + \frac{1}{48} = - c_2 + \frac{3}{4} c_3 - \frac{1}{48},$$

$$2b_2 + 3b_3 = 2c_2 - 3c_3.$$

De aquí se obtienen los valores siguientes para b_2, b_3, c_2, c_3:

$$b_2 = c_2 = \frac{1}{96}; \; b_3 = -c_3 = -\frac{1}{24},$$

y la fuerza que debe actuar sobre la viga en el punto $x = \frac{1}{2}$ para que sea nula la flecha en ese punto está dada por

$$y'''\left(\frac{1}{2}+0\right) - y'''\left(\frac{1}{2}-0\right) = \left(6c_3 - \frac{1}{2}\right) - \left(6b_3 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

6.2 La ecuación diferencial lineal general de primer orden

a. Separación de variables

Se dice que una ecuación diferencial es *de primer orden* si, además de x y $y(x)$, contiene la primera derivada de la función $y(x)$ pero no derivadas superiores. La ecuación más general de este tipo es

(20a)
$$F(x, y, y') = 0,$$

donde F es una función dada de sus tres argumentos x, y, y'. Puede suponerse que en una cierta región del plano x, y es posible resolver de modo único la ecuación diferencial (20a) para y' y, por tanto, expresarla en la forma

(20b)
$$y' = f(x, y).$$

Sólo en casos especiales pueden hallarse fórmulas explícitas para la solución general de una ecuación diferencial (20b).[1] La situación más sencilla ocurre cuando la función $f(x, y)$ es el cociente de una función de x y de una función de y, es decir, cuando la ecuación diferencial tiene la forma

(21a)
$$y' = \frac{\alpha(x)}{\beta(y)}.$$

En este caso, pueden "separarse" las variables x, y, escribiendo la ecuación simbólicamente en la forma

[1] Sin embargo, en la p. 777 se discutirá un esquema general de aproximación que da la solución de (20b) en todos los casos, donde la función f tenga primeras derivadas continuas.

(21b) $$\beta(y)\, dy = \alpha(x)\, dx.$$

Introduzcamos ahora las dos integrales indefinidas

(21c) $$A(x) = \int \alpha(x)\, dx, \qquad B(y) = \int \beta(y)\, dy,$$

que se obtienen por medio de cuadraturas ordinarias. Entonces, por (21a),

$$\frac{dB(y)}{dx} = \frac{dB(y)}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \beta(y)\, y' = \alpha(x) = \frac{dA(x)}{dx}\,.$$

Se concluye que, para toda solución de (21a),

(21d) $$B(y) - A(x) = c,$$

donde c es una constante (que depende de la solución).[1] Ahora puede resolverse la ecuación (21d) para y, asignando cualquier valor a c, y, así, se obtiene la solución requerida de (21a) por medio de cuadraturas.

De hecho, este método de separación de variables ya ha sido usado en una gran diversidad de problemas que dan origen a ecuaciones diferenciales (ver el Volumen I, p. 406; Volumen II, p. 740). Otro tipo de ecuación diferencial que puede reducirse a la forma (21a) es la llamada ecuación *homogénea*

(21e) $$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Introduciendo la nueva función desconocida $z = y/x$, se llega a la ecuación diferencial

$$z' = \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{f(z) - z}{x}\,,$$

que es separable. La solución general se encuentra entonces a partir de la relación

(21f) $$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x} + c = c + \log|x|,$$

[1]En lugar de aplicar la regla de la cadena en la deducción de (21d), también podría argumentarse que, por (21b, c),

$$d(B - A) = dB - dA = \beta\, dy - \alpha\, dx = 0$$

y, de aquí, que $B - A$ es contante.

donde c es una constante. Esta ecuación se usa para expresar z como una función de x y se pone $y = xz$ para obtener la solución requerida.

Como un ejemplo, considérese la ecuación

$$y' = \frac{y^2}{x^2},$$

correspondiente a $f(z) = z^2$. Aquí la relación (21f) queda

$$\int \frac{dz}{z^2 - z} = \log \frac{z-1}{z} = c + \log |x|.$$

Por tanto,

$$y = \frac{x}{1 - kx},$$

donde $k = \pm e^c$ es una constante.

b. La ecuación lineal de primer orden

Se dice que una ecuación diferencial es *lineal* si representa una relación lineal entre la función desconocida, y, y sus derivadas, con coeficientes que son funciones dadas de x. Así, la ecuación diferencial lineal general de primer orden tiene la forma

$$y' + a(x)\, y = b(x), \tag{22a}$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones dadas.

Supóngase primero que $b = 0$. Entonces la ecuación diferencial es separable y puede escribirse como

$$\frac{dy}{y} = -a(x)\, dx.$$

Así,

$$\log |y| = -\int a(x)\, dx + \text{constante}.$$

Si se denota por $A(x)$ cualquier integral indefinida de la función $a(x)$, es decir, cualquier función cuya derivada $a(x)$, se encuentra que

$$y = ce^{-A(x)}, \tag{22b}$$

donde c es una constante arbitraria de integración. Esta fórmula da una solución incluso cuando $c = 0$, a saber, $y = 0$.

Si $b(x)$ no es cero, se busca una solución de la forma

(22c) $$y = u(x)e^{-A(x)},$$

donde A se define como antes y $u(x)$ debe determinarse apropiadamente.[1] Por sustitución en (22a) se encuentra que

$$y' + ay = u'e^{-A} - uA'e^{-A} + aue^{-A} = u'e^{-A} = b.$$

De aquí que la función desconocida u debe tener la derivada

$$u' = b(x)\, e^{A(x)}.$$

Por tanto,

$$u = c + \int b(x)\, e^{A(x)}\, dx,$$

donde c es una contante. Como solución y de (22a) se encuentra la expresión

(22d) $$y = e^{-A(x)}\left(c + \int b(x)\, e^{A(x)}\, dx\right),$$

donde c es culaquier constante y

(22e) $$A(x) = \int a(x)\, dx.$$

Puesto que toda función y puede escribirse en la forma (22c), con una función u apropiada, se ve que la fórmula (22d) representa la *solución más general* de (22a). Así, la solución general se forma a partir de funciones conocidas simplemente por exponenciación y el proceso ordinario de integración. En realidad, la solución sólo contiene *una* constante arbitraria, dado que cualquier selección diferente de las constantes de integración en $A(x)$ o en la integral indefinida que ocurre en (22d) puede compensarse mediante un cambio apropiado en c.

Por ejemplo, en el caso de la ecuación diferencial

$$y' + xy = -x$$

[1]Este artificio de remplazar la constante c en (22b) por la variable u se conoce como *variación de parámetros.*

se tiene

$$A(x) = \int x\, dx = \frac{1}{2} x^2$$

$$\int b(x)e^{A(x)}\ dx = - \int xe^{x^2/2}\, dx = - e^{x^2/2}$$

y, por tanto, se obtiene la solución

$$y = e^{-x^2/2}\,(c - e^{-x^2/2}) = -1 + ce^{-x^2/2}.$$

Ejercicios 6.2

1. Integrar las ecuaciones siguientes mediante la separación de las variables
   (a) $(1 + y^2)x\, dx + (1 + x^2)\, dy = 0$
   (b) $ye^{2x}\, dx - (1 + e^{2x})\, dy = 0.$
2. Resolver las siguientes ecuaciones homogéneas:
   (a) $y^2\, dx + x(x - y)\, dy = 0$
   (b) $xy\, dx + (x^2 + y^2)\, dy = 0$
   (c) $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$
   (d) $(x + y)\, dx + (y - x)\, dy = 0$
   (e) $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2.$
3. Demostrar que una ecuación diferencial de la forma

$$y' = \phi\left[\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right] \qquad (a, a_1, \ldots \text{ constantes})$$

   puede reducirse a una ecuación homogénea como sigue. Si $ab_1 - a_1b \neq 0$, se toma una nueva función desconocida y una nueva variable independiente:

$$\eta = ax + by + c, \qquad \xi = a_1x + b_1y + c_1.$$

   Si $ab_1 - a_1b = 0$, sólo es necesario cambiar la función desconocida poniendo

$$\eta = ax + by$$

   para reducir la ecuación a otra en la cual las variables estén separadas. Aplicar el método del ejercicio anterior a
4. (a) $(2x + 4y + 3)y' = 2y + x + 1$
   (b) $(3y - 7x + 3)y' = 3y - 7x + 7.$
5. Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

(a) $y' + y \cos x = \cos x \operatorname{sen} x$

(b) $y' - \frac{ny}{x+1} = e^x(x+1)^n$

(c) $x(x-1)y' + (1-2x)y + x^2 = 0$

(d) $y' - \frac{2}{x} y = x^4$

(e) $(1+x^2)y' + xy = \frac{1}{1+x^2}$.

6. Integrar la ecuación

$$y' + y^2 = \frac{1}{x^2}.$$

Una *ecuación de Bernoulli* tiene la forma

$$y' + f(x)y = g(x)y^n.$$

Demostrar que una ecuación de este tipo se hace separable mediante la sustitución

$$y = v \exp\left\{-\int f(x)\, dx\right\} = vF(x).$$

8. Integrar la ecuación

$$xy' + y(1 - xy) = 0.$$

9. Por cualquier método adecuado, resolver

$$y' + y \operatorname{sen} x + y^n \operatorname{sen} 2x = 0.$$

6.3 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

a. Principio de superposición. Soluciones generales

Muchos de los ejemplos estudiados con anterioridad pertenecen a la clase general de ecuaciones diferenciales lineales. Se dice que una ecuación diferencial en la función desconocida $u(x)$ es lineal de n-ésimo orden, si tiene la forma

$$(23) \qquad u^{(n)}(x) + a_1 u^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n u(x) = \phi(x),$$

donde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son funciones dadas de la variable independiente x, como también lo es el segundo miembro $\phi(x)$. Denotaremos la expresión del primer miembro por $L[u]$ (donde L representa el "operador diferencial lineal").

Si $\phi(x)$ es idénticamente cero en el intervalo bajo consideración, se dice que la ecuación es *homogénea;* de lo contrario, se dice que es *no homogénea*. Inmediatamente se ve (como en el caso especial de la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes, que se vió en el Volumen I, p. 640) que se cumple el siguiente *principio de superposición:*

Si u_1, u_2 *son dos soluciones cualesquiera de la ecuación homogénea, toda combinación lineal de ellas,* $u = c_1u_1 + c_2u_2$, *donde los coeficientes* c_1, c_2 *son constantes, también es una solución.*

Si se conoce una sola solución, $v(x)$, de la ecuación no homogénea $L[u] = \phi(x)$, pueden obtenerse todas las demás soluciones sumando a $v(x)$ cualquier solución de la ecuación homogénea.

Para $n = 2$ y los coeficientes constantes a_1, a_2, en el Volumen I (p. 636) se probó que toda solución de la ecuación homogénea puede expresarse en términos de dos soluciones u_1, u_2 elegidas apropiadamente, en la forma $c_1u_1 + c_2u_2$. Se cumple un teorema análogo para cualquier ecuación diferencial homogénea con coeficientes continuos arbitrarios.

Para empezar, expliquemos lo que se debe entender al decir que ciertas funciones son linealmente dependientes o linealmente independientes, por medio de la definición siguiente: n funciones $\phi_1(x)$, $\phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)$ son *linealmente dependientes* si existen n constantes $[c_1, \ldots, c_n]$ no todas nulas, tales que la ecuación

$$c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0$$

se cumple idénticamente, es decir, para todos los valores de x en el intervalo bajo consideración. Si, digamos, $c_n \neq 0$, entonces $\phi_n(x)$ puede expresarse en la forma

$$\phi_n(x) = a_1\phi_1(x) + \cdots a_{n-1}\,\phi_{n-1}(x),$$

y se dice que ϕ_n es *linealmente dependiente de las otras funciones*. Si no existe relación lineal de la forma

$$c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0,$$

se dice que las n funciones $\phi_i(x)$ son *linealmente independientes.**

*La dependencia lineal de funciones $\phi(x)$ se define exactamente de la misma manera que la dependencia de vectores (ver la p. 171). A decir verdad, a menudo resulta conveniente imaginar una función $\phi(x)$ definida en un intervalo I del eje x como un "vector ϕ con un número infinito de componentes", correspondiendo a cada x en I una componente de valor $\phi(x)$.

Ejemplo 1

Las funciones 1, x, x^2, . . ., x^{n-1} son linealmente independientes. De lo contrario, tendrían que existir constantes c_0, c_1, . . ., c_{n-1} tales que el polinomio

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$$

se anule para todos los valores de x en un cierto intervalo. No obstante, esto es imposible, a menos que todos los coeficientes del polinomio sean cero.

Ejemplo 2

Las funciones $e^{a_i x}$ son linealmente independientes, siempre que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

DEMOSTRACION Supóngase que se ha probado esta proposición para $(n - 1)$ de tales funciones exponenciales. Entonces si

$$c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_2 x} + \cdots + c_n e^{a_n x} = 0$$

es una identidad en x, se divide entre $e^{a_n x}$ y, poniendo $a_i - a_n = b_i$, se obtiene

$$c_1 e^{b_1 x} + c_2 e^{b_2 x} + \cdots + c_{n-1} e^{b_{n-1} x} + c_n = 0.$$

Si se deriva esta ecuación con respecto a x, desaparece la constante c_n y se tiene una ecuación que implica que las $(n - 1)$ funciones $e^{b_1 x}$, $e^{b_2 x}$, . . ., $e^{b_{n-1} x}$ son linealmente dependientes, de lo cual se deduce que $e^{a_1 x}$, $e^{a_2 x}$, . . ., $e^{a_{n-1} x}$ son a su vez linealmente dependientes, en contradicción con la hipótesis original. Por tanto, tampoco puede existir una relación lineal entre las n funciones originales.

Ejemplo 3

Las funciones sen x, sen $2x$, sen $3x$, ... , sen nx son linealmente independientes en el intervalo $0 \leqq x \leqq \pi$. En el Ejercicio 1, p. 763, se propone al lector probar esto, en base al hecho de que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq n, \\ \pi \text{ si } m = n, \end{cases}$$

(ver el Volumen I, p. 274).

Si se supone que las funciones $\phi_i(x)$ tienen derivadas continuas hasta, e incluyendo, el n-ésimo orden, se tiene el teorema siguiente:

La condición necesaria y suficiente para que el sistema de funciones $\phi_i(x)$ sea linealmente dependiente es que la ecuación

$$(24) \qquad W = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \dots \phi_n(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) & \dots \phi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \phi_2^{(n-1)}(x) & \dots \phi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

sea una identidad en x. La función W se llama *el wronskiano* del sistema de funciones.[1]

Se deduce inmediatamente que la condición es *necesaria* si se supone que

$$\sum c_i \phi_i(x) = 0,$$

derivando sucesivamente se obtienen las ecuaciones adicionales

$$\sum c_i \phi_i'(x) = 0, \cdots,$$
$$\sum c_i \phi_i^{(n-1)} (x) = 0.$$

Sin embargo, éstas forman un sistema homogéneo de n ecuaciones, las cuales son satisfechas por los n coeficientes $c_1, \dots, c_n$; de donde, W, el determinante del sistema de ecuaciones, debe anularse.

Que la condición es suficiente, es decir, que si $W = 0$ las funciones son linealmente dependientes, puede probarse como sigue: de la anulación de W puede deducirse que el sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered} c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n = 0 \\ c_1\phi_1' + \cdots + c_n\phi_n' = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ c_1\phi_1^{(n-1)} + \cdots + c_n\phi_n^{(n-1)} = 0 \end{gathered}$$

posee una solución, $c_1, c_2, \dots, c_n$, que no es trivial (ver la p. 186), donde c_i incluso puede ser una función de x. Aquí, sin pérdida de

[1]En esta demostración y en la que sigue se supone que el lector tiene conocimiento de los elementos de la teoría de los determinantes. Nótese que en cada columna del determinante wronskiano se encuentra el vector formado a partir de una función ϕ y sus derivadas de órdenes 1, 2, . . ., $n - 1$. Por tanto, la anulación del wronkiano para un sistema de funciones significa que los vectores correspondientes son dependientes (ver la p. 214).

generalidad, puede suponerse que $c_n = 1$. Además, puede suponerse que V, el wronskiano de las $(n - 1)$ funciones $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ no es cero, porque puede suponerse que ya se ha probado el teorema para $(n - 1)$ funciones; entonces $V = 0$ implica la existencia de una relación lineal entre $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ y, de aquí, entre $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots, \phi_n$. Derivando[1] la primera ecuación con respecto a x y combinando el resultado con la segunda, se obtiene

$$c_1'\phi_1 + c_2'\phi_2 + \cdots + c_{n-1}'\phi_{n-1} = 0;$$

de modo semejante, derivando la segunda ecuación y combinando el resultado con la tercera, se obtiene

$$c_1'\phi_1' + c_2'\phi_2' + \cdots + c_{n-1}'\phi_{n-1}' = 0,$$

y así sucesivamente hasta

$$c_1'\phi_1^{(n-2)} + c_2'\phi_2^{(n-2)} + \cdots + c_{n-1}'\phi_{n-1}^{(n-2)} = 0.$$

Dado que se supone que V, el determinante de estas ecuaciones, no se anula, se concluye que $c_1', c_2', \ldots, c_{n-1}'$ son cero; es decir, $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ son constantes. De aquí que la ecuación

$$\sum_{l}^{n} c_i\phi_i(x) = 0$$

expresa una relación lineal, como se afirmó.

Enunciemos ahora el teorema fundamental sobre las ecuaciones diferenciales lineales:

Toda ecuación diferencial lineal homogénea

(25) $$L[u] = a_0(x)\, u^{(n)}(x) + a_1(x)\, u^{n-1}(x) + \cdots a_n(x)\, u(x) = 0$$

posee sistemas de n soluciones linealmente independientes $u_1, u_2, \ldots, u_n$. *Superponiendo estas soluciones puede expresarse cualquier otra solución, u,*[2] *x como una combinación lineal con los coeficientes constantes* $c_1, \ldots, c_n$:

---

[1]Es fácil ver que los coeficientes c_i son funciones continuamente diferenciables de x porque, si el determinante V no es cero, pueden expresarse racionalmente en términos de las funciones ϕ_i y sus derivadas.

[2]Dos sistemas diferentes de soluciones fundamentales $u_1, \ldots, u_n$; $v_1, \ldots, v_n$ pueden transformarse el uno en el otro mediante una transformación lineal

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, u_k,$$

donde los coeficientes c_{ik} son constantes y forman una matriz cuyo determinante no se anula.

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i .$$

En particular, puede determinarse un sistema de soluciones fundamentales mediante las condiciones siguientes. En un punto prescrito, digamos $x = \xi$, u_1 debe tener el valor 1 y todas las derivadas de u_1 hasta la de $(n - 1)$-ésimo orden deben anularse; u_i, con $i > 1$, y todas las derivadas de u_i hasta la de $(n - 1)$-ésimo orden, excepto la i-ésima, deben anularse, mientras que la i-ésima derivada debe tener el valor 1.

La existencia de un sistema de soluciones fundamentales se deducirá a partir del teorema de existencia probado en la p. 776. De la condición de Wronski (24), que se acaba de probar, se deduce que debe existir una relación lineal entre cualquier otra solución u y u_1, . . ., u_n, porque las ecuaciones

$$\sum_{l=0}^{n} a_l u^{(n-l)} = 0$$

$$\sum_{l=0}^{n} a_l u_i^{(n-l)} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

implican que el wronskiano de las $(n + 1)$ funciones $u, u_1, u_2, \ldots, u_n$ debe anularse, de modo que $u, u_1, u_2, \ldots, u_n$ son linealmente dependientes. Dado que $u_1, \ldots, u_n$ son independientes, u depende linealmente de $u_1, \ldots, u_n$.

b. Ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden

Se considerarán con mayor detalle las ecuaciones diferenciales de segundo orden, ya que tienen aplicaciones muy importantes.

Sea la ecuación diferencial

$$L[u] = au'' + bu' + cu = 0. \tag{26}$$

Si $u_1(x), u_2(x)$ constituyen un sistema de soluciones fundamentales, entonces $W = u_1u_2' - u_2u_1'$ es su wronskiano y $W' = u_1u_2'' - u_2u_1''$.

Ya que

$$L[u_1] = 0 \qquad \text{y} \qquad L[u_2] = 0,$$

se deduce que

$$u_1L[u_2] - u_2L[u_1] = aW' + bW = 0.$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden para W. Por la fórmula (22b), p. 753, su solución general está dada por

$$W = ce^{-\int (b/a)\,dx}, \tag{27}$$

donde c es una constante. Esta fórmula se usa mucho en el desarrollo posterior de la teoría de las ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Otra propiedad que merece mencionarse es que una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden siempre se puede transformar en una ecuación de primer orden, conocida como *ecuación diferencial de Riccati.* La ecuación de Riccati es de la forma

$$v' + pv^2 + qv + r = 0,$$

donde v es una función de x. La ecuación lineal (26) se transforma en la ecuación de Riccati, poniendo $u' = uz$, de modo que $u'' = u'z + uz' = uz^2 + uz'$, y se tiene

$$az' + az^2 + bz + c = 0.$$

Una tercera observación: si se conoce *una* solución, $v(x)$, de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, puede reducirse el problema al de resolver una ecuación diferencial de primer orden y esta última puede resolverse por cuadraturas. Específicamente, si se supone que $L[v] = 0$ y se pone $u = zv$, donde $z(x)$ es la nueva función que se está buscando, se obtiene la ecuación diferencial

$$az''v + 2az'v' + bz'v + zL[v] = avz'' + (2av' + bv)\,z' = 0$$

para z. Sin embargo, esta es una ecuación diferencial lineal homogénea para la función desconocida $z' = w$; su solución está dada por la fórmula (22d) de la p. 754. Entonces, de w se obtiene el factor z y, de aquí, la solución u por medio de una cuadratura más.[1]

Por ejemplo, la ecuación lineal de segundo orden

$$y'' - 2\frac{y'}{x} + 2\frac{y}{x^2} = 0$$

[1]Se obtiene el mismo resultado, observando que el wronskiano W formado a partir de v y cualquier otra solución u está dado por (27). Pero, para W y v conocidos, la ecuación $W = vu' - v'u$ representa una ecuación lineal de primer orden para u, que puede resolverse por cuadraturas.

es equivalente a la ecuación de Riccati

$$z' + z^2 - \frac{2}{x} z + \frac{2}{x^2} = 0,$$

donde $z = y'/y$. La ecuación original tiene en $y = x$ una solución particular; por lo tanto, puede reducirse a la ecuación de primer orden

$$v''x = 0,$$

donde $v = y/x$. Es decir, $v = ax + b$. De aquí que la integral general de la ecuación original está dada por

$$y = ax^2 + bx.$$

Mencionemos que puede aplicarse exactamente el mismo método para reducir una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden a una de $(n - 1)$-ésimo orden, cuando se conoce una solución de la primera ecuación.

Ejercicios 6.3b

1. Probar que las funciones sen x, sen $2x$, sen $3x$, . . .son linealmente independientes en el intervalo $0 \leqq x \leqq \pi$. Sugerencia: dos cualesquiera de estas funciones son ortogonales sobre el intervalo; a saber, si $m \neq n$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = 0$$

(ver el Volumen **I**, p. 274).
2. Probar que si $a_1, \ldots, a_k$ son números diferentes y $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ son polinomios arbitrarios (no idénticamente cero), entonces las funciones

$$\phi_1(x) = P_1(x)e^{a_1 x}, \ldots, \phi_k(x) = P_k(x)e^{a_k x}$$

son linealmente independientes.
3. Demostrar que la llamada ecuación de Bernoulli (ver el Ejercicio 7 en la Sección 6.2)

$$y' + a(x)y = b(x)y^n \qquad (n \neq 1)$$

se reduce a una ecuación diferencial lineal para la nueva función desconocida $z = y^{1-n}$. Aplicar esto para resolver las ecuaciones

(a) $xy' + y = y^2 \log x$
(b) $xy^2(xy' + y) = a^2$
(c) $(1 - x^2)y' - xy = axy^2$.

4. Demostrar que la ecuación diferencial de Riccati

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$$

puede transformarse en una ecuación diferencial lineal si se conoce una integral particular $y_1 = y_1(x)$. [Introdúzcase la nueva función desconocida $u = 1/(y - y_1)$].

Aplicar esto para resolver la ecuación

$$y' - x^2y^2 + x^4 - 1 = 0,$$

que posee la integral particular $y_1 = x$.

5. Encontrar las integrales comunes a las dos ecuaciones diferenciales

(a) $y' = y^2 + 2x - x^4$

(b) $y' = -y^2 - y + 2x + x^2 + x^4$

6. Integrar la ecuación diferencial

$$y' = y^2 + 2x - x^4$$

en términos de integrales definidas, usando la integral particular hallada en el Ejercicio 5. Trazar una gráfica aproximada de las curvas integrales de la ecuación para todo el plano x, y

7. Sean y_1, y_2, y_3, y_4 cuatro soluciones de la ecuación de Riccati (ver el Ejercicio 4). Probar que la expresión

$$\frac{\dfrac{(y_1 - y_3)}{(y_1 - y_4)}}{\dfrac{(y_2 - y_3)}{(y_2 - y_4)}}$$

es una constante.

8. Demostrar que si se conocen dos soluciones, $y_1(x)$ y $y_2(x)$, de la ecuación de Riccati, entonces la solución general está dada por

$$y - y_1 = c(y - y_2) \exp\left[\int P(y_2 - y_1)\, dx\right],$$

donde c es una constante arbitraria.

De aquí, encontrar la solución general de

$$y' - y \tan x = y^2 \cos x - \frac{1}{\cos x},$$

cuyas soluciones son de la forma $a \cos^n x$.

9. Probar que las ecuaciones

(a) $(1 - x)y'' + xy' - y = 0$

(b) $2x(2x - 1)y'' - (4x^2 + 1)y' + y(2x + 1) = 0$

tienen una solución común. Encontrarla y, a continuación, integrar completamente ambas ecuaciones

10. La tangente en un punto P de una curva corta al eje de las y en punto por debajo del origen 0, y la curva es tal que $OP = n \cdot OT$. Probar que su ecuación polar es de la forma

$$r = a\frac{(1+\operatorname{sen}\theta)^n}{\cos^{n+1}\theta}.$$

c. La ecuación diferencial no homogénea. Método de variación de parámetros

Para resolver la ecuación diferencial no homogénea

(28a) $$L[u] = a_0 u^{(n)} + \cdots + a_n u = \phi(x)$$

en general, por lo que se ha dicho en la p. 757, basta con encontrar una sola solución. Esto puede hacerse como sigue: eligiendo apropiadamente las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, primero se determina una solución de la ecuación homogénea $L[u] = 0$ de manera tal que se satisfagan las ecuaciones

(28b) $$u(\xi) = 0,\ u'(\xi) = 0, \ldots, u^{(n-2)}(\xi) = 0,\ u^{(n-1)}(\xi) = 1$$

Esta solución, que depende del parámetro ξ, se denotará por $u(x, \xi)$. La función $u(x, \xi)$ es una función continua de ξ para valores fijos de x, y también lo son sus n primeras derivadas con respecto a x. Como un ejemplo, para la ecuación diferencial $u'' + k^2 u = 0$ la solución $u(x, \xi)$ que satisface las condiciones (28b) tiene la forma $[\operatorname{sen} k(x - \xi)]/k$.

Ahora, se afirma que la fórmula

(28c) $$v(x) = \int_0^x \phi(\xi)\, u(x, \xi)\, d\xi$$

da una solución de $L[v] = \phi$ que, junto con sus $(n-1)$ primeras derivadas, se anula en el punto $x = 0$. Para verificar esta proposición[1] se deriva repetidamente la función $v(x)$ con respecto a x, por medio de la regla de la derivación de una integral con respecto a un parámetro [ver (41), p. 106], y recordando las relaciones que se deducen de (28b):

$$u(x, x) = 0,\quad u'(x, x) = 0, \ldots, u^{(n-2)}(x, x) = 0,\quad u^{(n-1)}(x, x) = 1$$

[1] Es posible dar una interpretación física de este proceso. Si $x = t$ denota el tiempo y u la coordenada de un punto que se mueve sobre una recta, sujeto a una fuerza $\phi(x)$, puede imaginarse el efecto de esta fuerza como si proviniera de la superposición de los pequeños efectos de impulsos pequeños. Entonces, la función de arriba, $u(x, \xi)$, corresponde a un impulso de magnitud 1 en el instante ξ, y la solución da el efecto de impulsos de magnitud $\phi(\xi)$ durante el tiempo entre 0 y x.

donde, por ejemplo, $u'(x, x) = \partial u(x, \xi)/\partial x$ para $\xi = x$.

Así se obtiene

$$v'(x) = \phi(\xi)\, u(x, \xi)|_{\xi=x} + \int_0^x \phi(\xi)\, u'(x, \xi)\; d\xi = \int_0^x \phi(\xi)\, u'(x, \xi)\, d\xi,$$

$$v''(x) = \phi(\xi)u'(x, \xi)|_{\xi=x} + \int_0^x \phi(\xi)\, u''(x, \xi)\; d\xi = \int_0^x \phi(\xi)\, u''(x, \xi)\, d\xi,$$

. . . .

$$v^{(n-1)}(x) = \phi(\xi)\, u^{(n-2)}(x, \xi)|_{\xi=x} + \int_0^x \phi(\xi)\, u^{(n-1)}(x, \xi)\, d\xi$$

$$= \int_0^x \phi(\xi)\, u^{(n-1)}(x, \xi)\, d\xi,$$

$$v^{(n)}(x) = \phi(\xi)\, u^{(n-1)}(x, \xi)|_{\xi=x} + \int_0^x \phi(\xi)\, u^{(n)}(x, \xi)\, d\xi$$

$$= \phi(x) + \int_0^x \phi(\xi)\; u^{(n)}(x, \xi)\, d\xi.$$

Dado que $L[u(x, \xi)] = 0$, esto establece la ecuación $L[v] = \phi(x)$ y muestra que se satisfacen las condiciones iniciales $v(0) = 0$, $v'(0) = 0$, $\ldots$, $v^{(n-1)}(0) = 0$

También puede obtenerse la misma solución por el método que sigue, aparentemente diferente, el cual generaliza el procedimiento usado en la p. 754 para una ecuación de primer orden. Se busca una solución, u, de la ecuación no homogénea, en la forma de una combinación lineal de soluciones independientes u_i de la ecuación homogénea

$$u = \sum \gamma_i(x)\, u_i(x), \tag{28d}$$

donde ahora se permite que los coeficientes γ_i sean funciones de x. Sobre estas funciones se imponen las condiciones que siguen:

$$\gamma_1' u_1 + \gamma_2' u_2 + \cdots + \gamma_n' u_n = 0$$
$$\gamma_1' u_1' + \gamma_2' u_2' + \cdots + \gamma_n' u_n' = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\gamma_1' u_1^{(n-2)} + \gamma_2' u_2^{(n-2)} + \cdots + \gamma_n' u_n^{(n-2)} = 0.$$

A partir de estas condiciones se concluye que las derivadas de u están dadas por las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned} u' &= \sum \gamma_i u_i' \\ u'' &= \sum \gamma_i u_i'' \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ u^{(n-1)} &= \sum \gamma_i u_i^{(n-1)} \\ u^{(n)} &= \sum \gamma_i' u_i^{(n-1)} + \sum \gamma_i u_i^{(n)}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial y recordando que $L[u] = \phi$, se tiene

$$\sum \gamma_i' u_i^{(n-1)} = \phi(x).$$

Para los coeficientes γ_i' se obtiene un sistema lineal de ecuaciones, con determinante W, el wronskiano del sistema de soluciones fundamentales u_i, el cual, por lo tanto, no se anula. Así, los coeficientes γ_i' están determinados y, en consecuencia, por cuadraturas, lo están los coeficientes γ_i. Como todo el argumento puede invertirse, en realidad se ha encontrado una solución de la ecuación, la cual, de hecho, es la solución general en virtud de las constantes de integración comprendidas en los coeficientes γ_i.

Se deja al lector demostrar que, en realidad, los dos métodos son idénticos, expresando $u(x, \xi)$, la solución de la ecuación homogénea definida anteriormente, en la forma

$$u(x, \xi) = \sum a_i(\xi) u_i(x).$$

Este último método se conoce como *variación de parámetros,* porque exhibe la solución como una combinación lineal de funciones con coeficientes variables, mientras que en el caso de la ecuación homogénea estos coeficientes fueron constantes.

Ejemplo 1

Considérese la ecuación

$$u'' - 2\frac{u'}{x} + 2\frac{u}{x^2} = xe^x.$$

Por lo visto en la p. 763, un sistema de soluciones independientes de la ecuación homogénea correspondiente

$$u'' - 2\frac{u'}{x} + 2\frac{u}{x^2} = 0$$

está dado por $u_1 = x$, $u_2 = x^2$. De aquí que, si se buscan soluciones de la forma

$$u = \gamma_1 x + \gamma_2 x^2,$$

se tienen las condiciones

$$\gamma_1' x + \gamma_2' x^2 = 0,$$
$$\gamma_1' + 2\gamma_2' x = x e^x$$

para γ_1 y γ_2. Es decir,

$$\gamma_1' = -x e^x, \qquad \gamma_2' = e^x.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación no homogénea original es

$$u = x e^x + c_1 x + c_2 x^2.$$

Ejemplo 2

Como una aplicación se dará un método para el estudio de las vibraciones forzadas, para las cuales el segundo miembro de la ecuación diferencial ya no es necesariamente periódico (como en los casos considerados en el Volumen I, Capítulo 9, p. 641) sino que, por el contrario, puede ser una función continua arbitraria, $f(t)$. Por simplicidad nos restringiremos al caso sin rozamiento y se tomará $m = 1$ (o, lo que viene a ser lo mismo, se dividirá entre m). En consecuencia, se escribe la ecuación diferencial en la forma

(28e) $$\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = \phi(t),$$

donde k^2 y ϕ son lo que antes se llamó k y f, respectivamente.

De acuerdo con (28c), la función

$$F(t) = \frac{1}{k}\int_0^t \phi(\lambda)\,\mathrm{sen}\,k(t-\lambda)\,d\lambda$$

es una solución de la ecuación diferencial (28e) y satisface las condiciones iniciales

$$F(0) = 0, \qquad F'(0) = 0.$$

Así, como solución general de la ecuación diferencial se obtiene, precisamente como antes, la función

$$x(t) = \frac{1}{k}\int_0^t \phi(\lambda) \operatorname{sen} k(t-\lambda)\, d\lambda + c_1 \operatorname{sen} kt + c_2 \cos kt,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias de integración.

En particular, si la función en el segundo miembro de la ecuación diferencial es una función periódica de la forma sen ωt o cos ωt, un cálculo sencillo conduce nuevamente a los resultados del Volumen I, Capítulo 9, p. 642.

Ejercicios 6.3c

1. Integrar las ecuaciones siguientes:

   (a) $y''' - y = 0.$

   (b) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0.$

   (c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

   (d) $y'''' - 3y'' + 2y = 0$

   (e) $x^2y'' + xy' - y = 0.$

2. Probar que la ecuación lineal homogénea

$$L(y) = y^{(n)} + c_1y^{(n-1)} + \cdots + c_{n-1}y' + c_n = 0$$

con coeficientes *constantes*, c, tiene un sistema de soluciones fundamentales de la forma $x^{\mu}e^{a_k x}$, donde las a_k son las raíces del polinomio

$$f(z) = z^n + c_1z^{n-1} + \cdots + c_n.$$

3. Sea

$$a_0y + a_1y' + \cdots + a_ny^{(n)} = P(x)$$

una ecuación diferencial lineal no homogénea de n-ésimo orden, con coeficientes constantes, y sea $P(x)$ un polinomio. Supóngase que $a_0 \neq 0$ y considérese la identidad formal

$$\frac{1}{a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n} = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots.$$

Probar que

$$y = b_0P(x) + b_1P'(x) + b_2P''(x) + \cdots$$

es una integral particular de la ecuación diferencial.

Si $a_0 = 0$, pero $a_1 \neq 0$, entonces es posible el desarrollo

$$\frac{1}{a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n} = bt^{-1} + b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots$$

Probar que entonces

$$y = b\int P(x)\,dx + b_0P(x) + b_1P'(x) + b_2P''(x) + \cdots$$

es una integral particular de la ecuación diferencial.

4. Aplicar el método del Ejercicio 3 para encontrar integrales particulares de
   (a) $y'' + y = 3x^2 - 5x$
   (b) $y'' + y' = (1 + x)^2$
5. Puede encontrarse una integral particular de la ecuación

$$a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)} = e^{kx}P(x),$$

donde k, $a_0, a_1, \ldots$ son constantes reales y $P(x)$ es un polinomio, introduciendo una nueva función desconocida $z = z(x)$ dada por

$$y = ze^{kx}$$

y aplicando el método del Ejercicio 3 a la ecuación en z.

Usar este método para encontrar integrales particulares de
   (a) $y'' + 4y' + 3y = 3e^x$
   (b) $y'' - 2y' + y = xe^x$.
6. Integrar completamente la ecuación

$$y'' - 5y' + 6y = e^x(x^2 - 3).$$

7. (a) Si u, v son dos soluciones independientes de la ecuación

$$f(x)y''' - f'(x)y'' + \phi(x)y' + \lambda(x)y = 0,$$

probar que la solución completa es $Au + Bv + Cw$, donde

$$w = u\int \frac{vf(x)\,dx}{(uv' - u'v)^2} - v\int \frac{uf(x)dx}{(uv' - u'v)^2}$$

y A, B, C son constantes arbitrarias.

(b) Resolver la ecuación

$$x^2(x^2 + 5)y''' - x(7x^2 + 25)y'' + (22x^2 + 40)y' - 30xy = 0,$$

que tiene soluciones de la forma x^n.

6.4 Ecuaciones diferenciales generales de primer orden

a. Interpretación geométrica

Empecemos por considerar una ecuación diferencial de primer orden

$$F(x, y, y') = 0, \tag{29}$$

donde se supone que la función F es una función continuamente diferenciable de sus tres argumentos x, y, y'. Geométricamente, en un punto en el plano con coordenadas rectangulares (x, y), la ecuación es una condición sobre la dirección de la tangente a cualquier curva

$y(x)$ que pase por este punto y que satisfaga la ecuación diferencial. Se supone que en una cierta región R de un plano, digamos en un rectángulo, la ecuación diferencial $F(x, y, y') = 0$ puede resolverse de modo único para y' y, por tanto, puede expresarse en la forma

$$y' = f(x, y), \tag{30}$$

donde la función $f(x, y)$ es continuamente diferenciable en x y y. Entonces, a cada punto (x, y) de R la ecuación (30) le asigna una *dirección de avance.* Por lo tanto, la ecuación diferencial se representa geométricamente por medio de un *campo de direcciones;* y, geométricamente, el problema de resolver la ecuación diferencial consiste en encontrar esas curvas que pertenecen a este campo de direcciones, es decir, aquellas cuyas tangentes en cada punto tienen la dirección preasignada por la ecuación $y' = f(x, y)$. Estas son las llamadas *curvas integrales de la ecuación diferencial.*

Es ahora intuitivamente plausible que por cada punto (x, y) de R pase una sola curva integral de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. Estos hechos se enuncian de manera más precisa en el siguiente teorema fundamental de existencia:

Si en la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, la función f es continuc y tiene una derivada continua con respecto a y en una región R, entonces por cada punto (x_0, y_0) de R pasa una, y sólo una, curva integral; es decir, en una vecindad de x_0 existe una, y sólo una, solución $y(x)$ de la ecuación diferencial, para la cual $y(x_0) = y_0$.

En la p. 702 regresaremos a la demostración de este teorema. Aquí nos restringiremos a la consideración de algunos ejemplos.

Para la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{x}{y}, \tag{31a}$$

que se considera, digamos, en la región $y < 0$, fácilmente se ve que el campo en un punto (x, y) tiene una dirección perpendicular al vector que va del origen al punto (x, y). De esto se infiere, por geometría, que los arcos circulares con centro en el origen deben ser las curvas integrales de la ecuación diferencial. Analíticamente se verifica con facilidad este resultado, pues por el método de separación de variables (p. 679, se deduce que

$$x^2 + y^2 = \text{constante} = c,$$

lo cual demuestra que estos círculos son las soluciones de la ecuación diferencial.

En cada punto, es obvio que el campo de direcciones de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{y}{x} \tag{31b}$$

tiene la dirección de la recta que une a ese punto con el origen. Así, las rectas que pasan por el origen pertenecen a este campo de direcciones y, por tanto, son curvas integrales. De hecho, inmediatamente se ve que la función $y = cx$ satisface la ecuación diferencial para cualquier constante arbitraria c.[1]

De la misma manera puede verificarse analíticamente que la ecuación diferencial

$$y' = \frac{x}{y} \qquad (y \neq 0)$$

y la

$$y' = -\frac{y}{x} \qquad (x \neq 0)$$

son satisfechas por las respectivas familias de hipérbolas

$$y^2 = c + x^2$$

$$y = \frac{c}{x},$$

donde c es el parámetro que especifica la curva particular de la familia.

El teorema fundamental indica que, en general, las ecuaciones diferenciales de primer orden son satisfechas por una *familia uniparamétrica* de funciones. Las funciones de x en una familia de este tipo no sólo dependen de x sino también de un parámetro c, por ejemplo, de $c = y_0 = y(0)$; como se acostumbra decir, las soluciones dependen de una *constante de integración* arbitraria. La integración ordinaria de una función $f(x)$ es simplemente el caso especial de la solución de una ecuación diferencial en la que $f(x, y)$ no comprende a y. Entonces, la dirección del campo en un punto queda determinada por la coordenada x únicamente, y de inmediato se ve que las curvas

[1]En el origen, el campo de direcciones ya no está definido de manera única; esto está relacionado con el hecho de que un número infinito de curvas integrales pasan por este *punto singular* de la ecuación diferencial.

integrales se obtienen una a partir de la otra mediante una traslación en la dirección del eje y. Analíticamente, esto corresponde al conocido hecho de que la integral indefinida y, es decir, la solución de la ecuación diferencial $y' = f(x)$, incluye una constante aditiva arbitraria, c.

La interpretación geométrica de la ecuación diferencial sugiere una *construcción* gráfica aproximada de las curvas integrales, casi de la misma manera que en el caso especial de la integración indefinida de una función de x (Volumen *I*, p. 483). Sólo tiene que imaginarse la curva integral remplazada por un polígono en el que cada lado tiene la dirección asignada por el campo de direcciones para su punto inicial (o para cualquier otro de sus puntos). Ese polígono puede construirse partiendo de un punto arbitrario en R. A menor longitud de los lados del polígono, mayor la exactitud con la cual dichos lados coincidirán con el campo de direcciones de la ecuación diferencial, no sólo en sus puntos iniciales sino en toda su longitud. Sin demostrarlo, aquí se enuncia el hecho de que disminuyendo sucesivamente la longitud de los lados, un polígono construído de esta manera puede realmente aproximarse cuanto se desee a la curva integral que pasa por el punto inicial.

b. *La ecuación diferencial de una familia de curvas. Soluciones singulares. Trayectorias ortogonales*

El teorema de existencia indica que toda ecuación diferencial tiene una familia de curvas integrales. Esto sugiere que puede plantearse la pregunta inversa. ¿Toda familia uniparamétrica de curvas $\phi(x, y, c) = 0$, o bien, $y = g(c, x)$ tiene una ecuación diferencial correspondiente

$$F(x, y, y') = 0$$

que sea satisfecha por todas las curvas de la familia? Si es así, ¿cómo puede encontrarse esta ecuación diferencial? Aquí el punto esencial es que c, el parámetro de la familia de curvas, no está presente en la ecuación diferencial, de modo que la ecuación diferencial es, en cierto sentido, una representación de la familia de curvas que *no* depende de un parámetro. De hecho, es fácil encontrar esa ecuación diferencial. Derivando con respecto a x en

(32a) $$\phi(x, y, c) = 0$$

se tiene

(32b) $$\phi_x + \phi_y y' = 0.$$

Si se elimina el parámetro c entre esta ecuación y la ecuación $\phi = 0$, el resultado es la ecuación diferencial deseada. Siempre es posible esta eliminación en una región del plano en la que pueda resolverse la ecuación $\phi = 0$ para el parámetro c en términos de x y y. Entonces sólo se tiene que sustituir la expresión $c = c(x, y)$ así encontrada, en las expresiones para ϕ_x y ϕ_y con el fin de obtener una ecuación diferencial para la familia de curvas.

Como un primer ejemplo, considérese la familia de círculos concéntricos $x^2 + y^2 - c^2 = 0$, para la cual, derivando con respecto a x, se obtiene la ecuación diferencial

(32c) $$x + yy' = 0,$$

que concuerda con (31a), p. 771.

Otro ejemplo es la familia $(x - c)^2 + y^2 = 1$ de círculos con radio unitario y centro sobre el eje x. Derivando con respecto a x se obtiene

$$(x - c) + yy' = 0,$$

y eliminando c resulta la ecuación diferencial

$$y^2(1 + y'^2) = 1.$$

Del mismo modo, la ecuación de la familia $y = (x - c)^2$ parábolas que tocan al eje x, conduce, con el auxilio de $y' = 2(x - c)$, a la ecuación diferencial requerida:

$$y'^2 = 4y.$$

En los dos últimos ejemplos se ve que las ecuaciones diferenciales correspondientes son satisfechas no sólo por las curvas de la familia sino, en el primer caso, también por las rectas $y = 1$ y $y = -1$ y, en el segundo caso, también por el eje x. Estos hechos, que pueden verificarse de inmediato analíticamente, también se deducen sin cálculo alguno a partir del significado geométrico de la ecuación diferencial. En efecto estas rectas son las envolventes de las familias de curvas correspondientes y, como las envolventes tocan en cada punto a una curva de la familia, deben tener en ese punto la dirección prescrita por el campo de direcciones. Por lo tanto, toda envolvente de una familia de curvas integrales debe, a su vez, satisfacer la ecuación

diferencial. Las soluciones de la ecuación diferencial que se encuentran al formar la envolvente de una familia uniparamétrica de curvas integrales se llaman *soluciones singulares.*

Sea R una región que es cubierta simplemente por una familia uniparamétrica de curvas $\Phi(x, y) = c =$ constante. Si a cada punto P de R se le asigna la dirección de la tangente a la curva que pasa por P, se obtiene un campo de direcciones definido por la ecuación diferencial $y' = -\Phi_x/\Phi_y$ [ver (32b)]. Si, por otra parte, a cada punto P se le asigna la dirección de la normal a la curva que pasa por él, el campo de direcciones resultante queda definido por la ecuación diferencial

$$y' = \frac{\Phi_y}{\Phi_x}.$$

Las soluciones de esta ecuación diferencial se llaman *trayectorias ortogonales* de la familia original de curvas $\Phi(x, y) = c$. Las curvas $\Phi = c$ (las curvas de nivel de la función Φ) y sus trayectorias ortogonales se intersectan en todo punto formando ángulos rectos. Por tanto, si una familia de curvas está dada por la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, puede encontrarse la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales sin integrar la ecuación diferencial dada, porque la ecuación de las trayectorias ortogonales es

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}.$$

En el ejemplo (31a) discutido anteriormente, a partir de la ecuación diferencial satisfecha por los círculos $x^2 + y^2 = c$ se encuentra que la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es $y' = y/x$. Por lo tanto, las trayectorias ortogonales son las rectas que pasan por el origen (ver (31b)).

Si $p > 0$, la familia de parábolas confocales (ver el Capítulo 3, p. 234) $y^2 - 2p(x + p/2) = 0$ satisface la ecuación diferencial

$$y' = \frac{1}{y}(-x + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

De aquí que la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales de esta familia sea

$$y' = \frac{-1}{(-x + \sqrt{x^2 + y^2})/y} = \frac{1}{y}(-x - \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Las soluciones de esta ecuación diferencial son las parábolas

$$y^2 - 2p(x + p/2) = 0,$$

donde $p < 0$; éstas son parábolas confocales entre sí y con las curvas de la primera familia.

c. Teorema de existencia y unicidad de la solución

Ahora se probará el teorema de existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ que se enunció en la p. 771. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que para la solución $y(x)$ en cuestión la condición inicial $f(x_0) = y_0$ se reduce a $y(0) = 0$, porque pueden introducirse $y - y_0 = \eta$ y $x - x_0 = \xi$ como nuevas variables y entonces resulta una nueva ecuación diferencial, $d\eta/d\xi = f(\xi + x_0, \eta + y_0)$, del mismo tipo, que satisface la condición deseada.

En la demostración nos podemos restringir a una vecindad lo suficientemente pequeña del punto $x = 0$. Si se ha probado la existencia y unicidad de la solución para uno de tales intervalos alrededor del origen $x = 0$, entonces puede probarse la existencia y unicidad para una vecindad de uno de sus puntos extremos, y así sucesivamente.

Consideremos entonces un rectángulo $|x| \leqq a$, $|y| \leqq b$ contenido en el dominio de la función $f(x, y)$. Existen cotas M, M_1 tales que

(32d) $$|f_y(x, y)| \leqq M, \quad |f(x, y)| \leqq M_1 \text{ para } |x| \leqq a, \ |y| \leqq b.$$

Remplazando, si es necesario, a por un valor positivo menor, siempre puede hacerse que

(32e) $$M_1 a < b, \ Ma < 1.$$

Las desigualdades (32d) aún serán válidas en el rectángulo menor. Para cualquier solución $y(x)$ de $y' = f(x, y)$ con valor inicial $y(0) = 0$ se tiene entonces la estimación $|y(x)| \leqq b$ para $|x| \leqq a$. Pues, de lo contrario, existirían valores ξ para los cuales $|\xi| \leqq a$, $|y(\xi)| = b$. Existiría un ξ de valor absoluto mínimo. Entonces la relación

$$b = |y(\xi)| = \left| \int_0^{\xi} (x, y(x))\, dx \right| \leqq M_1 |\xi| \leqq M_1 a < b$$

conduciría a una contradicción.

Primero nos convenceremos de que no puede haber *más* de una solución de la ecuación diferencial que satisfaga las condiciones iniciales, porque si hubieran dos soluciones, $y_1(x)$ y $y_2(x)$, la diferencia $d(x) = y_1 - y_2$ satisfaría

$$d'(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)).$$

Por el teorema del valor medio, el segundo miembro de esta ecuación puede ponerse en la forma $(y_1 - y_2)\, f_y(x, \bar{y}) = d(x)\, f_y(x, \bar{y})$, donde $\bar{y}$ es un valor intermedio entre y_1 y y_2. En una vecindad $|x| \leqq a$ del origen, y_1 y y_2 son funciones continuas de x que se anulan en $x = 0$. Aquí b es una cota superior de los valores absolutos de las dos funciones en esta vecindad, de modo que $|\bar{y}| \leqq b$ siempre que $|x| \leqq a$. Además, M es una cota de $|f_y|$ en la región $|x| \leqq a$, $|y| \leqq b$. Por último, sea D el valor máximo de $|d(x)|$ en el intervalo $|x| \leqq a$ y supóngase que este valor es alcanzado en $x = \xi$. Entonces, para $|x| \leqq a$,

$$|d'(x)| = |d(x)\, f_y(x, \bar{y})| \leqq DM,$$

y por lo tanto,

$$D = |d(\xi)| = \left| \int_0^{\xi} d'(x)\ dx \right| \leqq |\xi| DM \leqq aDM.$$

Pero como $aM < 1$, se concluye que $D = 0$. Es decir, en el intervalo $|x| \leqq a$ se tiene[1] $y_1(x) = y_2(x)$.

Por medio de una estimación integral semejante se llega a demostrar la existencia de la solución. Esta se construye mediante un método que tiene otras importantes aplicaciones, en particular, a la solución numérica de las ecuaciones diferenciales y a la inversión de las aplicaciones (ver la p. 314). Este es el proceso de *iteración o de aproximaciones sucesivas*. Aquí se obtiene la solución como la función límite de una sucesión de soluciones aproximadas $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... Como una primera aproximación se toma $y_0(x) = 0$. Usando la ecuación diferencial, se toma

$$y_1(x) = \int_0^x f(\xi, 0)\, d\xi$$

[1] La idea fundamental de esta demostración es el hecho de que, para integrandos acotados, la integración da una cantidad que se anula en el mismo orden que el intervalo de integración, a medida que el intervalo tiende a cero.

como la segunda aproximación; de ésta se obtiene la siguiente aproximación, $y_2(x)$,

$$y_2(x) = \int_0^x f(\xi, y_1(\xi))\, d\xi,$$

y, en general, la $(n + 1)$-ésima aproximación se obtiene a partir de la n-ésima por medio de la ecuación

$$y_n(x) = \int_0^x f(\xi, y_{n-1}(\xi))\, d\xi. \tag{33a}$$

Si, en un intervalo $|x| \leqq a$, estas funciones de aproximación convergen uniformemente hacia una función límite $y(x)$, inmediatamente puede pasarse al límite bajo el signo integral y obtener, para la función límite, la ecuación

$$y(x) = \int_0^x f(\xi, y(\xi))\, d\xi. \tag{33b}$$

Por derivación, de esto se deduce que $y' = f(x, y)$, de modo que, en realidad, y es la solución requerida.

La convergencia para un intervalo suficientemente pequeño, $|x| \leqq a$, se demuestra por medio de la estimación siguiente. Se pone $y_{n+1}(x) - y_n(x) = d_n(x)$ y por D_n se denota el máximo de $|d_n(x)|$ en el intervalo $|x| \leqq a$.

A partir de la ecuación

$$d_n'(x) = y_{n+1}' - y_n' = f(x, y_n) - f(x, y_{n-1}),$$

el teorema del valor medio da

$$d_n'(x) = d_{n-1}(x)\, f_y(x, \bar{y}_{n-1}(x)), \tag{33c}$$

donde $\bar{y}_{n-1}$ es un valor intermedio entre y_n y y_{n-1}. Supóngase que se cumplen las desigualdades $|f_y(x, y)| = M$, $|f(x, y)| \leqq M_1$ en la región rectangular $|x| \leqq a$, $|y| \leqq b$. Si se supone que para la función y_n se cumple la relación $|y_n| \leqq b$ en el intervalo $|x| \leqq a$, entonces, por la definición de y_{n+1}, se tiene

$$|y_{n+1}(x)| = \left| \int_0^x f(\xi, y_n(\xi))\, d\xi \right| \leqq |x|\, M_1 \leqq aM_1.$$

Por lo tanto, la cota a para x se elige tan pequeña que $aM_1 \leqq b$. Entonces, en el intervalo $|x| \leqq a$, evidentemente se tendrá $|y_{n+1}(x)| \leqq$

b. Puesto que para $y_0(x) = 0$ es obvio que $|y_0| \leqq b$, por inducción se deduce que en el intervalo $|x| \leqq a$ se tiene $|y_n(x)| \leqq b$ para todo n. Por lo tanto, en (33c) se puede usar la estimación $|f_y| \leqq M$ e integrar para obtener

$$|d_n(x)| = \left| \int_0^x d_n'(\xi)\, d\xi \right| \leqq \left| \int_0^x M\,|d_{n-1}(\xi)|\,d\xi \right|.$$

Así, puede acotarse el máximo, D_n, de $|d_n(x)|$ en el intervalo $|x| \leqq a$ por

$$D_n \leqq aMD_{n-1}.$$

Tómese ahora a tan pequeño que $aM \leqq q < 1$, donde q es una fracción propia fija, digamos, $q = \frac{1}{4}$. Entonces $D_{n+1} \leqq qD_n \leqq q^n\ D_0$.

Consideremos ahora la serie

$$d_0(x) + d_1(x) + d_2(x) + \cdots + d_{n-1}(x) + \cdots.$$

La n-ésima suma parcial de esta serie es $y_n(x)$. El valor absoluto del n-ésimo término no es mayor que el número D_0q^{n-1} cuando $|x| \leqq a$. Por lo tanto, la serie está dominada por una serie geométrica convergente con términos constantes. De aquí que (ver el Volumen I, p. 535), converge uniformemente en el intervalo $|x| \leqq a$ hacia una función límite $y(x)$, y, por tanto, se ve que existe un intervalo $|x| \leqq a$ en el que la ecuación diferencial tiene una solución única.

Todo lo que ahora falta por demostrar es que puede extenderse paso a paso esta solución hasta que alcance la frontera de la región (cerrada y acotada) R en la que se supone que $f(x, y)$ está definida. La demostración hasta aquí indica que si se ha extendido la solución hasta un cierto punto, puede continuarse progresando sobre un intervalo x se longitud a, donde, no obstante, a depende de las coordenadas (x, y) del punto extremo de la porción ya construída. Podría imaginarse que, en este avance, a disminuye de un paso al siguiente, tan rápidamente que la solución no puede extenderse en más de una pequeña cantidad sin importar cuántos pasos se realicen. Como se demostrará, éste no es al caso.

Supóngase que R' es una región cerrada y acotada interior a R. Entonces puede hallarse un número b tan pequeño que, para todo punto (x_0, y_0) en R', el cuadrado completo $x_0 - b \leqq x \leqq x_0 + b$, $y_0 - b \leqq y \leqq y_0 + b$ esté en R. Si se denotan por M y M_1 las cotas superiores de $|f_y(x, y)|$ y $|f(x, y)|$ en la región R, entonces se encuentra

que en la demostración precedente todas las condiciones impuestas sobre a son sin duda satisfechas si se toma a como, digamos, el menor de los números b, $M/2$, y b/M_1. Este ya no depende de (x_0, y_0); por lo tanto, en cada paso puede avanzarse una cantidad a constante. Así, puede procederse paso a paso hasta que se alcance la frontera de R'. Como R' puede ser cualquier región cerrada en R, se ve que la solución puede extenderse hasta la frontera de R.[1]

Ejercicios 6.4

1. Sea

$$f(x, y, c) = 0$$

una familia de curvas planas. Eliminando la constante c entre ésta y la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0,$$

se obtiene la ecuación diferencial

$$F(x, y, y') = 0$$

de la familia de curvas (ver p. 773). Sea ahora $\phi(p)$ una función dada de p; se dice que una curva, C, que satisface la ecuación diferencial

$$F(x, y, \phi(y')) = 0$$

es una *trayectoria* de la familia de curvas $f(x, y, c) = 0$. La segunda y tercera ecuaciones indican que

$$y' = \phi(Y')$$

es la relación entre la pendiente Y' de C en cualquier punto dado y la pendiente y' de la curva $f(x, y, c) = 0$ que pasa por este punto. El caso más importante es $\phi(p) = -1/p$, que conduce a la ecuación

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0,$$

[1]Es esencial en este teorema que R sea una región *cerrada y acotada* y no, por ejemplo, todo el plano x, y. Puede ilustrarse esto mediante la ecuación diferencial

$$y' = 1 + y^2,$$

para la cual $f(x, y)$ está definida y es continuamente diferenciable para todo x, y. La solución única de esta ecuación con condicion inicial $y = 0$ para $x = 0$, es la función $y = \tan x$ para $|x| < \pi/2$. La solución deja de existir en $x = \pm\pi/2$, a pesar del hecho de que $f(x,y)$ es regular para toda x y y. Concordando con el teorema general probado, la gráfica de la solución se sale de cualquier subconjunto cerrado y acotado de R que se prescriba, por ejemplo, cualquier rectángulo $|x| \leqq a$, $|y| \leqq b$, antes de dejar de existir. La función $y = \tan x$ existe en todo el intervalo $|x| \leqq a$, o bien, existe y se hace mayor que b en valor absoluto, en algún subintervalo.

la cual es la ecuación diferencial de las *trayectorias ortogonales* de la familia de curvas (ver la p. 774).

Usar este método para encontrar las trayectorias ortogonales de las siguientes familias de curvas:

(a) $x^2 + y^2 + cy - 1 = 0$

(b) $y = cx^2$

(c) $\dfrac{x^2}{a^2 + c} + \dfrac{y^2}{b^2 + c} = 1, (a > b > 0, -b^2 < c < \infty)$

(d) $y = \cos x + c$

(e) $(x - c)^2 + y^2 = a^2$.

En cada caso, trazar las gráficas de las dos familias ortogonales de curvas. $y = cx$, encontrar las dos familias de trayectorias para las que (a) la pendiente de la trayectoria es dos veces mayor que la pendiente de la recta; (b) la pendiente de la trayectoria es igual y de signo opuesto a la pendiente de la recta.

3. Las ecuaciones diferenciales del tipo

$$y = xp + \psi(p), \quad p = y'$$

fueron investigadas primero por Clairaut. Derivando, se obtiene

$$[x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0,$$

lo cual da $p = c =$ constante, de modo que

$$y = xc + \psi(c)$$

es la integral general de la ecuación diferencial; representa una familia de rectas. Otra solución es

$$x = - \psi'(p),$$

la cual, junto con

$$y = - p\psi'(p) + \psi(p)$$

da una representaciyon paramétrica de la llamada *integral singular,* Nótese que la curva dada por las dos últimas ecuaciones es la envolvente de la familia de rectas.

Usar este método para encontrar la solución singular de las ecuaciones

(a) $y = xp - \dfrac{p^2}{4}$

(b) $y = xp + e^p$.

4. Encontrar la ecuación diferencial de las tangentes a la catenaria

$$y = a \cosh \frac{x}{a}.$$

5. Lagrange investigó la ecuación diferencial más general, lineal tanto en x como en y, a saber,

$$y = x\phi(p) + \psi(p).$$

Derivando, se obtiene

$$p = \phi(p) + [x\phi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx},$$

que es equivalente a la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\phi'(p)}{\phi(p) - p}x + \frac{\psi'(p)}{\phi(p) - p} = 0,$$

siempre que $\phi(p) - p \neq 0$ y p no sea constante. Integrando y usando la primera ecuación se obtiene una representación paramétrica de la integral general. De la segunda ecuación se ve que las ecuaciones $\phi(p) - p = 0$, $p =$ constante, conducen a un cierto número de soluciones singulares que representan rectas.

Las soluciones pueden interpretarse geométricamente como sigue: considérese la ecuación de Clairaut

$$y = xp + [\psi(\phi^{-1}(p))],$$

donde $\phi^{-1}(p)$ es la función inversa de $\phi(p)$, es decir, $\phi^{-1}(\phi(p)) \equiv p$. A partir de esto se ve que las soluciones de la ecuación diferencial son una familia de trayectorias de la familia de rectas

$$y = xc + \psi[\phi^{-1}(c)]$$

o bien,

$$y = x\phi(c) + \psi(c) \qquad (c = \text{constante}).$$

Así, por ejemplo,

$$y = -\frac{x}{p} + \psi(p)$$

es la ecuación diferencial de las involutas (trayectorias ortogonales de las tangentes) de la curva que representa la integral singular de la ecuación de Clairaut

$$y = xp + \psi\left(-\frac{1}{p}\right).$$

Usar este método para integrar la ecuación

$$y = x(p + a) - \frac{1}{4}(p + a)^2.$$

6. Expresar, cuando sea posible, las integrales de las ecuaciones diferenciales siguientes, mediante funciones elementales:

(a) $\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = 1 - y^2$

(b) $\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = \frac{1}{1 - y^2}$

(c) $\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = \frac{2a - y}{y}$

(d) $\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}.$

En cada caso, trazar una gráfica de la familia de curvas integrales y detectar las soluciones singulares, si existen, a partir de las figuras.

7. Integrar la ecuación homogénea

$$\left[xy' - y\right]^2 = \left[x^2 - y^2\right]\left[\text{arc sen}\,\frac{y}{x}\right]^2$$

y encontrar las soluciones singulares.

8. Como se mencionó en el Ejercicio 3, una curva es la envolvente de sus tangentes; por lo tanto, es la integral singular de la ecuación de Clairaut que sus tangentes satisfacen. Teniendo presente lo anterior, averiguar qué tipo de curva satisface cada una de las propiedades siguientes y dar la ecuación de Clairaut que corresponda:
   (a) La suma de las intercepciones x y y de una recta tangente es constante.
   (b) La longitud del segmento interceptado por los ejes sobre una tangente es constante.
   (c) El área limitada por la recta tangente y los ejes es constante.

6.5 Sistemas de ecuaciones diferenciales y ecuaciones diferenciales de orden superior

Los argumentos anteriores se aplican por extensión a sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, con tantas funciones desconocidas de x como ecuaciones se tengan. Como un ejemplo de suficiente generalidad, aquí se considerará el sistema de dos ecuaciones diferenciales para dos funciones, $y(x)$ y $z(x)$:

$$y' = f(x, y, z),$$
$$z' = g(x, y, z),$$

donde las funciones f y g son continuamente diferenciables. Este sistema de ecuaciones diferenciales puede interpretarse como un campo de direcciones en el espacio x, y, z. Al punto (x, y, z) del espacio se le asigna una dirección cuyos cosenos directores están en proporción $dx\colon dy\colon dz = 1\colon f\colon g$. Nuevamente, el problema de integrar la ecuación diferencial equivale geométricamente a encontrar las curvas en el espacio que pertenezcan a este campo de direcciones. Como en el caso de una sola ecuación diferencial, una vez más se tiene el teorema fundamental de que por cada punto (x_0, y_0, z_0) de una región R en la que las funciones dadas f y g son continuamente diferenciables, pasa una, y sólo una, curva integral del sistema de

ecuaciones diferenciales.[1] La región R es cubierta por una familia biparamétrica de curvas en el espacio. Estas dan las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales como dos funciones, $y(x)$ y $z(x)$, que dependen de la variable independiente x y también de dos parámetros arbitrarios, c_1 y c_2, las constantes de integración.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden tienen una importancia particular porque las ecuaciones diferenciales de orden superior, es decir, ecuaciones diferenciales en las que se presentan derivadas de orden superior al primero, siempre pueden reducirse a un sistema de este tipo.

Por ejemplo, la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' = h(x, y, y')$$

puede escribirse como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Sólo se tiene que tomar la primera derivada de y con respecto a x como una nueva función desconocida y, a continuación, escribir el sistema de ecuaciones diferenciales

$$y' = z,$$

$$z' = h(x, y, z).$$

Este sistema es exactamente equivalente a la ecuación diferencial de segundo orden dada, en el sentido de que toda solución de uno de los problemas es al mismo tiempo una solución del otro.

El lector puede usar esto como un punto de partida para la discusión de la ecuación diferencial lineal de segundo orden y probar así el teorema fundamental de existencia para las ecuaciones diferenciales lineales, usado en la p. 760.

Ejercicios 6.5

1. Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:
   (a) $y'y'' = x$
   (b) $2y'''y'' = 1$

[1] Para $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, nuevamente puede darse la demostración, por medio de un esquema apropiado de iteración con las fórmula de recurrencia

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x f(\xi, y_n(\xi), z_n(\xi))\, d\xi,$$

$$z_{n+1}(x) = \int_0^x g(\xi, y_n(\xi), z_n(\xi))\, d\xi$$

en lugar de la relación única (33a).

(c) $xy'' - y' = 2$

(d) $2xy''' y'' = y''^2 - 2$

2. Una ecuación diferencial de la forma

$$f(y, y', y'') = 0$$

(nótese que no se tiene explícitamente a x) puede reducirse a una ecuación de primer orden, como sigue: elíjase a y como la variable independiente y a $p = y'$ como la función desconocida. Entonces

$$y' = p, \qquad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p,$$

y la ecuación diferencial queda $f(y, p, pp') = 0$.

Usar este método para resolver las ecuaciones diferenciales que siguen

(a) $2yy'' + y'^2 = 0$

(b) $yy'' + y'^2 - 1 = 0$

(c) $y^3y'' = 1$

(d) $y'' - y'^2 + y^2y' = 0$

(e) $y^{iv} = (y''')^{1/2}$

(f) $y^{iv} + y'' = 0$.

3. Usar el método del Ejercicio 2 para resolver el problema siguiente: en un punto variable, M, de una curva plana, Γ, trácese la normal a Γ; sobre esta normal, márquese el punto N donde la normal corta al eje x, y sea C el centro de curvatura de Γ en M. Encontrar las curvas tales que

$$MN \cdot MC = \text{ constante } = k.$$

Discutir los diversos casos posibles para $k > 0$ y $k < 0$, y trazar las gráficas.

4. Encontrar la ecuación diferencial de tercer orden satisfecha por todos los círculos

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

6.6 Integración por el método de los coeficientes indeterminados

Para concluir, mencionaremos aún otro artificio general que con frecuencia se puede aplicar a la integración de las ecuaciones diferenciales. Este es el método de integración en términos de series de potencias. Supóngase que en la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y)$$

la función $f(x, y)$ puede desarrollarse como una serie de potencias en las variables x y y y, en consecuencia, posee derivadas de cualquier

orden con respecto a x y a y. Entonces puede intentarse encontrar las soluciones de la ecuación diferencial en la forma de una serie de potencias,

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots,$$

y determinar los coeficientes de esta serie de potencias por medio de la ecuación diferencial.[1] Para hacerlo, se procede a formar la serie derivada

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots,$$

remplazando y en la serie de potencias para $f(x, y)$ por su expresión como una serie de potencias y, a continuación, igualando los coeficientes de las potencias iguales que estén en ambos miembros (*método de los coeficientes indeterminados*). Entonces, si $c_0 = c$ es cualquier valor arbitrario dado, puede intentarse determinar los coeficientes

$$c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots,$$

sucesivamente.

Sin embargo, el proceso que sigue a menudo es más sencillo y más elegante. Supóngase que se está buscando esa solución de la ecuación diferencial para la cual $y(0) = 0$, es decir, para la cual la curva integral pasa por el origen. Entonces $c_0 = c = 0$. Si se recuerda que, por el teorema de Taylor, los coeficientes de la serie de potencias están dados por las expresiones

$$c_\nu = \frac{1}{\nu!} y^{(\nu)}(0),$$

pueden calcularse fácilmente. En primer lugar, $c_1 = y'(0) = f(0, 0)$. Para obtener el segundo coeficiente, c_2, se derivan ambos miembros de la ecuación diferencial con respecto a x y se obtiene

$$y''(x) = f_x + f_y y'.$$

Si aquí se sustituyen $x = 0$ y los valores ya conocidos $y(0) = 0$ y $y'(0) = f(0, 0)$, se obtiene el valor $y''(0) = 2c_2$. En la misma forma, puede

[1]Entonces los primeros términos de la serie forman un polinomio de aproximación para la solución.

continuarse el proceso y determinar los otros coeficientes c_3, c_4, . . ., uno después del otro.

Puede demostrarse que este proceso siempre da una solución, si la serie de potencias para $f(x, y)$ converge absolutamente en el interior de un círculo con centro en $x = 0$, $y = 0$. No se dará la demostración aquí.

Ejercicios 6.6

1. Obtener los desarrollos en series de potencias hasta el número indicado de términos, para la solución que pasa por el punto dado, de cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes

   (a) $y' = x + y$, k términos, $(0, a)$

   (b) $y' = \operatorname{sen}(x + y)$, cuatro términos, $(0, \pi/2)$

   (c) $y' = e^{xy}$, cuatro términos, $(0, 0)$

   (d) $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$, cuatro términos, $(0, 1)$.

2. Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0,$$

   con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, por medio de una serie de potencias. Probar que esta función es idéntica a la función de Bessel $J_0(x)$, definida en la Sección 4.12, Ejercicio 7, p. 534.

6.7 El potencial de cargas atractivas y la ecuación de Laplace

Comúnmente, las ecuaciones diferenciales para funciones de una sola variable independiente, tales como las que se han discutido en párrafos anteriores, reciben el nombre de ecuaciones diferenciales *ordinarias,* para indicar que sólo comprenden derivadas "ordinarias", aquéllas de funciones de una variable independiente. Sin embargo, en muchas ramas del análisis y sus aplicaciones juegan una parte importante las ecuaciones diferenciales *parciales* para la función de varias variables, es decir, ecuaciones entre la variables y las derivadas *parciales* de la función desconocida. Aquí se considerarán algunas aplicaciones típicas que comprenden la ecuación diferencial de Laplace.

Ya de ha considerado el campo de fuerzas producido por las masas, de acuerdo con la ley de atracción de Newton, y se ha representado como el gradiente de un potencial Φ (ver el Capítulo 4,

p. 497 y siguientes). En esta sección se estudiará el potencial un poco más detalladamente.[1]

a. Potenciales de distribuciones de masa

Como una extensión de los casos considerados previamente, ahora se tomará m como una masa o carga positiva o negativa. Las masas negativas no entran en la ley newtoniana ordinaria de la atracción, pero en la teoría de la electricidad, donde se remplaza la masa por la carga eléctrica, se distingue entre la electricidad positiva y la negativa; allí, la ley coulombiana de atracción de cargas tiene la misma forma que la ley de atracción gravitacional de las masas. Si se concentra una carga m en un solo punto del espacio con coordenadas (ξ, η, ζ), a la expresión m/r, donde

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

se le da el nombre de *potencial*[2] de esta masa en el punto (x, y, z). Sumando un cierto número de tales potenciales para diferentes *fuentes* o *polos*, (ξ_i, η_i, ζ_i), se obtiene, como antes (ver la p. 497), el potencial de un sistema de partículas o cargas puntuales:

$$\Phi = \sum_i \frac{m_i}{r_i}.$$

Los campos de fuerzas correspondientes están dados por la expresión $\mathbf{f} = \gamma$ grad Φ, donde γ es una constante independiente de la masas y de sus posiciones.

Para las masas que no están concentrada en puntos aislados sino que están distribuídas continuamente, con densidad $\mu(\xi, \eta, \zeta)$, sobre una porción definida, R, del espacio ξ, η, ζ, se define el potencial de esta distribución de masa como

$$\Phi = \iiint \frac{\mu}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{34a}$$

[1]Una gran cantidad de literatura está dedicada a esta importante rama del análisis (ver, por ejemplo, *Foundations of Potential Theory,* por O. D. Kellogg, Frederick Ungar Publ. Co.).

[2]A esto podría dársele el nombre de potencial de la masa. Cualquier función que se obtenga sumando una constante arbitraria a esa expresión podría recibir con igual propiedad el nombre de potencial de la masa, puesto que daría el mismo campo de fuerza.

Si las masas están distribuídas sobre una superficie S con densidad superficial μ, el potencial de esta superficie es la integral de superficie

$$\iint \frac{\mu(u, v)}{r}\, d\sigma \tag{34b}$$

tomada sobre la superfice S con elemento de superficie $d\sigma$.

Del mismo modo, para el potencial de una masa distribuída a lo largo de una curva, se obtiene una expresión de la forma

$$\int \frac{\mu(s)}{r}\, ds, \tag{34c}$$

donde s es la longitud de arco sobre esta curva y $\mu(s)$ es la densidad lineal de masa.

Para todo potencial de este tipo, las superficies de nivel de Φ, definidas por $\Phi =$ constante, representan las *superficies equipotenciales.*[1]

Una ejemplo del potencial de una distribución lineal es el producido por una masa de densidad lineal contante, μ, distribuída a lo largo del segmento $-l \leqq z \leqq +l$ del eje z. Considérese un punto P con coordenadas (x, y) en el plano $z = 0$. Por brevedad, introduciremos $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, la distancia del punto P al origen. Entonces el potencial en P es

$$\Phi(x, y) = \mu \int_{-l}^{+l} \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + C.$$

Aquí se ha agregado una constante C a la integral, lo cual no afecta al campo de fuerzas derivado del potencial. La integral indefinida de la derecha puede evaluarse como en el Volumen I [p. 270, (26)], y se obtiene

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \text{arc senh}\,\frac{z}{\rho} = \log \frac{z + \sqrt{z^2 + \rho^2}}{\rho},$$

[1]Las curvas que en todo punto tienen la dirección del vector fuerza se llaman *líneas de fuerza.* Puesto que aquí la fuerza tiene la dirección del gradiente de Φ, las líneas de fuerza son curvas que en todo punto se intersectan con las superficies de nivel a ángulos rectos. Se ve así que las familias de líneas de fuerza que corresponden a potenciales generados por un solo polo o por un número finito de polos emanan de ellos como de una fuente. En el caso de un solo polo, por ejemplo, las líneas de fuerza son simplemente las rectas que pasan por el polo.

de modo que el potencial en el plano x, y está dado por

$$\Phi(x, y) = 2\mu \log \frac{l + \sqrt{l^2 + \rho^2}}{\rho} + c.$$

Para obtener el potencial de una recta que se extiende hasta el infinito en ambas direcciones, se da el valor $-2\mu \log 2l$ a la constante[1] C, y así se obtiene

$$\Phi(x, y) = 2\mu \log \frac{l + \sqrt{l^2 + \rho^2}}{2l} - 2\mu \log \rho.$$

Si ahora se hace que la longitud l crezca sin límite, es decir, si se hace que la longitud de la recta tienda a infinito, la expresión $\{l + \sqrt{l^2 + \rho^2}\} /2l$ tiende a la unidad, y para el valor límite de $\Phi(x, y)$ se obtiene la expresión

(35a) $$\Phi(x, y) = -2\mu \log \rho.$$

Así se ve que, aparte del factor -2μ, *la expresión*

(35b) $$\log \rho = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

es el potencial de una recta perpendicualr al plano x, y, sobre la cual se distribuye uniformemente una masa. Aquí, las superficies equipotenciales son los cilindros circulares

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{constante}.$$

En la p. 499 se calculó el potencial de una superficie esférica de densidad (es decir, masa por unidad de área) constante, μ. Se encontró que, para una esfera de radio a y centro en el origen, el potencial Φ en un punto $P = (x, y, z)$ está dado por

(36a) $$\Phi = \frac{4\pi a^2}{r} \mu \qquad (r > a)$$

(36b) $$\Phi = 4\pi a\mu \qquad (r < a),$$

donde

(36c) $$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

[1]Se hace esta elección con el fin de que al pasar hacia el límite $l \to \infty$, el potencial Φ siga siendo finito.

es la distancia de P al origen. El potencial de una esfera sólida de densidad μ puede obtenerse descomponiendo la bola en superficies esféricas de radio a y densidad superficial $\mu\, da$. En consecuencia, el potencial de una esfera sólida de radio A se obtiene de las fórmulas (36a, b) integrando con respecto a a, desde 0 hasta A. Se encuentra (ver p. 499) que

$$\Phi = \frac{4\pi A^3}{3r}\mu \qquad (r > A) \tag{37a}$$

$$\Phi = (2\pi A^2 - \frac{2}{3}\pi r^2)\mu \qquad (r < A). \tag{37b}$$

La fuerza gravitacional correspondiente,

$$\mathbf{f} = \gamma \operatorname{grad} \phi, \tag{37c}$$

ejercida por la esfera sólida sobre una masa unitaria en P está dirigida hacia el origen y tiene magnitud

$$\frac{4\pi A^3}{3r^2}\gamma\mu \quad \text{para} \quad r > A, \qquad \frac{4\pi r}{3}\gamma\mu \quad \text{para} \quad r < A. \tag{37d}$$

Además de las distribuciones previamente consideradas, la teoría del potencial también trata de las llamadas *capas dobles,* que se obtienen de la siguiente manera: se supone que las cargas puntuales M y $-M$ están localizadas en los puntos (ξ, η, ζ) y $(\xi + h, \eta, \zeta)$, respectivamente. El potencial de esta pareja de cargas está dado por

$$\Phi = \frac{M}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} - \frac{M}{\sqrt{(x-\xi-h)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}.$$

Si se hace que h, la distancia entre los dos polos, tienda a cero y, al mismo tiempo, se hace que la carga M crezca indefinidamente de manera tal que M siempre sea igual a $-\mu/h$, donde μ es una constante, Φ tiende al límite

$$\mu \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right).$$

A esta expresión se le da el nombre de *potencial de un dipolo o doblete* con su eje en la dirección ξ y con "momento" μ. Físicamente

representa el potencial de una pareja de cargas de magnitud igual y signo opuesto que se encuentran muy próximas entre sí. De la misma manera, puede expresarse el potencial de un dipolo en la forma

$$\mu \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right),$$

donde $\partial/\partial\nu$ denota la derivación en la dirección arbitraria ν, la del eje del dipolo.

Si se tienen dipolos distribuídos sobre una superficie *S*, con densidad de momento μ, y si, en cada punto, el eje del dipolo es normal a la superficie, se obtiene una expresión de la forma

$$\iint_S \mu(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma,$$

donde $\partial/\partial\nu$ denota la derivación en la dirección de la normal a la superficie (como antes, puede elegirse cualquiera de los dos sentidos para la normal), y r es la distancia del punto (ξ, η, ζ) que varía sobre la superficie al punto (x, y, z). Este potencial de una capa doble puede concebirse como si se originara de la siguiente manera: a cada lado de la superficie y a una distancia h se construye otra superficie; a una de estas dos nuevas superficies se le da una densidad superficial $\mu/2h$ y a la otra, una densidad superficial $-\mu/2h$. En un punto externo, estas dos capas en conjunto crean un potencial que tiende a la expresión anterior cuando $h \to 0$.

b. *La ecuación diferencial del potencial*

En todas las expresiones que se consideren se supondrá que el punto (x, y, z) en cuestión es un punto en el que no está presente carga alguna, de modo que los integrandos y sus derivadas con respecto a x, y, z son continuas. En virtud de esta hipótesis puede obtenerse una relación que satisfacen todos los potenciales mencionados, a saber, *la ecuación diferencial de Laplace*

(38a) $$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0,$$

la cual se abrevia

(38b) $$\Delta\Phi = 0.$$

Como puede verificarse fácilmente por medio de un cálculo sencillo (p.87), esta ecuación es satisfecha por la expresión $1/r$. Por lo tanto, se cumple también para todas las demás expresiones formadas a partir de $1/r$ por suma o integración, ya que pueden llevarse a cabo las derivaciones con respecto a x, y, z bajo el signo integral.[1] Esta ecuación también es satisfecha por el potencial de una capa doble, porque, en virtud de la reversibilidad del orden de la derivación,[2] se encuentra que para el potencial de un dipolo sencillo se cumple la ecuación

(38c) $$\Delta \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta \frac{1}{r} = 0.$$

La ecuación de Laplace también es satisfecha por la expresión $\log \sqrt{x^2 + y^2}$, obtenida para el potencial de una recta vertical, como puede verificarse con facilidad (ver también el Capítulo 5, p. 632). Como ésta no depende de la variable z, también satisface la ecuación de Laplace más sencilla en dos dimensiones,

(38d) $$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0.$$

El estudio de estas ecuaciones y de las ecuaciones diferenciales parciales relacionadas forma una de las ramas más importantes del análisis. Se debe señalar que el fin primordial de la teoría del potencial no es, en modo alguno, la búsqueda de soluciones generales de la ecuación $\Delta\Phi = 0$, sino, más bien, la cuestión de la existencia y la investigación de aquellas soluciones que satisfacen condiciones preasignadas. Así, un problema central de la teoría es el problema con valores en la frontera, en el que se busca una solución Φ de $\Delta\Phi = 0$ que, junto con sus derivadas hasta de segundo orden, sea continua en una región preasignada y que tenga valores continuos preasignados sobre la frontera de R.

[1] Obsérvese que la derivación bajo el signo integral sólo es legítima mientras $r \neq 0$, es decir, en las regiones en donde no está presente carga alguna. De lo contrario, no tiene por qué cumplirse la ecuación de Laplace. Por ejemplo, dentro de una esfera sólida, por (37b), su potencial satisface la ecuación

$$\Delta\Phi = \Delta(2\pi A^2 - \frac{2}{3}\pi r^2)\mu = -4\pi\mu \neq 0.$$

[2] Nótese que la derivación $\partial/\partial\nu$ se refiere a las variables (ξ, η, ζ), y la expresión Δ, a las variables (x, y, z). Incidentalmente, la función $1/r$, considerada como una función de las seis variables $(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$, es simétrica en los dos conjuntos de variables y, por lo tanto, también satisface la ecuación de Laplace

$$\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta} + \Phi_{\zeta\zeta} = 0$$

con respecto a las variables (ξ, η, ζ).

c. Capas dobles uniformes

Aquí no se puede hacer un estudio detallado de las *funciones de potencial,*[1] es decir, de funciones que satisfacen la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$. A este respecto, el teorema de Gauss y el teorema de Green (pp. 667, 675) se encuentran entre las principales herramientas que se emplean. Bastará con demostrar, mediante algunos ejemplos, cómo se realizan esas investigaciones.

Primero se considerará el potencial de una capa doble con densidad de "momento" constante $\mu = 1$, es decir, una integral de la forma

$$V = \iint_S \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma. \tag{39}$$

Esta integral tiene un significado geométrico sencillo. Supongamos que cada punto de la superficie que forma la capa doble puede "verse" desde el punto P con coordenadas (x, y, z), esto es, que ese punto puede unirse a P por medio de una recta que no corta la superficie en ninguna otra parte. La superficie S, junto con los rayos que unen su frontera con el punto P, forma una región cónica, R, del espacio. Ahora afirmamos que *el potencial de la capa doble uniforme, excepto tal vez por el signo, es igual al ángulo sólido que la frontera de la superficie S subtiende en el punto P.* Por este ángulo sólido debe entenderse el área de la porción de una superficie esférica de radio unitario y centro en el punto P que queda limitada por los rayos que van de P a la frontera de S. Se le dará el signo positivo a este ángulo sólido cuando los rayos pasen a través de la superficie S en la misma dirección que la normal positiva ν, de lo contrario se le dará el signo negativo.

Para probar esto recúerdese que la función $u = 1/r$, cuando no sólo se considera como una función de (x, y, z) sino también como una función de (ξ, η, ζ), aún satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta u = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0.$$

Fijemos el punto P con coordenadas (x, y, z) y denotemos las coordenadas rectangulares en la región cónica R por (ξ, η, ζ); se usará una esfera pequeña de radio ρ alrededor del punto P para eliminar el vértice de R; a la región restante se le denotará por R_ρ. Aplíquese

[1]También llamadas *funciones armónicas.*

ahora a la función $u = 1/r$, considerada como una función de (ξ, η, ζ) en la región R_ρ, el teorema de Green (Capítulo 5, p. 675) en la forma

$$\iiint_{R_\rho} \Delta u \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = \iint_{S'} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma.$$

Aquí S' es la superficie frontera de R_ρ y $\partial/\partial n$ denota la derivación en la dirección de la normal hacia afuera. Como $\Delta u = 0$, el primer miembro es cero.[1] Si se elige la dirección normal positiva, ν, sobre S de modo que coincida con la normal hacia afuera, n, la integral de superficie del segundo miembro consiste de tres partes: (1) la integral de superficie

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = \iint_S \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma$$

sobre la superficie S, la cual es la expresión V considerada en (39); (2) una integral sobre la superficie lateral formada por los rayos; (3) una integral sobre una porción Γ_ρ de la superficie de la pequeña esfera de radio ρ. La segunda parte es cero, puesto que allí la dirección normal n es perpendicular al radio y, por lo tanto, es tangencial a la esfera $r =$ constante. Para la esfera interior con radio ρ el símbolo $\partial/\partial n$ es equivalente a $-\partial/\partial\rho$, dado que la dirección hacia afuera de la normal apunta en la dirección en que disminuyen los valores de r. Así se obtiene la ecuación

$$V - \iint_{\Gamma_\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\right) d\sigma = 0$$

o bien,

$$V = -\frac{1}{\rho^2} \iint_{\Gamma_\rho} d\sigma,$$

donde a la derecha se tiene que integrar sobre la porción Γ_ρ de la superficie esférica pequeña que pertenece a la frontera de R_ρ. Ahora

[1]De esta forma, del teorema de Green se deduce que, en general, la integral de superficie

$$\iint \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma$$

tomada sobre una superficie cerrada, siempre debe anularse cuando la función u satisface la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ en todo punto del interior de la superficie.

escríbase el elemento de superficie sobre la esfera con radio ρ en la forma $d\sigma = \rho^2\, d\omega$, donde $d\omega$ es el elemento de superficie sobre la esfera unitaria, para obtener

$$V = -\iint d\omega.$$

La integral de la derecha debe tomarse sobre la porción de la superficie esférica de radio unitario que se encuentra en el cono de rayos; entonces se ve inmediatamente que el segundo miembro tiene el significado geométrico que se mencionó antes; es el negativo de la *magnitud angular* aparente, si se elige la dirección normal sobre S de modo que apunte hacia afuera[1] de la región cónica R. De lo contrario, debe tomarse el signo positivo.

Si la superficie S no está en una posición relativa a P tan sencilla como la descrita sino que, por el contrario, se intersecta varias veces con alguno de los rayos que pasan por P, sólo tiene que dividirse la superficie en un cierto número de porciones del tipo más sencillo, de manera de ver que se cumple la proposición. *Por lo tanto, el potencial de la capa doble uniforme (de "momento"1) sobre una superficie acotada es igual, excepto tal vez por el signo, a la magnitud "aparente" que tiene la frontera cuando se observa desde el punto* (x, y, z).

Para una *superficie cerrada* se ve, subdividiéndola en dos porciones acotadas, que la expresión en cuestión es igual a cero si el punto P está fuera, e igual a -4π si está dentro.

Un argumento semejante demuestra, en el caso de dos variables independientes, que la integral

$$\int_C \frac{\partial}{\partial \nu}(\log r)\, ds$$

a lo largo de la curva C, excepto posiblemente por el signo, es igual al ángulo que subtiende esta curva en el punto P con coordenadas (x, y).

Este resultado, como el resultado correspondiente en el espacio, también puede explicarse geométricamente del modo siguiente. Supóngase que el punto Q con coordenadas (ξ, η) está sobre la curva C. Entonces la derivada de $\log r$ en el punto Q, en la dirección de la normal a la curva, está dada por la ecuación

[1] Se explica el signo negativo por el hecho de que con esta elección de la dirección normal, la carga negativa está en la cara de la superficie que da hacia el punto P.

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(\log r) = \frac{\partial}{\partial r}(\log r)\cos(\nu, r) = \frac{1}{r}\cos(\nu, r),$$

donde el símbolo (ν, r) denota el ángulo entre esta normal y la dirección del radiovector r. Por otra parte, cuando se escribe en coordenadas polares (r, θ), el elemento de arco, ds, de la curva tiene la forma

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, d\theta = \frac{r\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{-\dot{y}x + \dot{x}y}\, r\, d\theta = \frac{r\, d\theta}{\cos(\nu, r)}$$

(ver el Volumen I, p. 351), de modo que la integral se transforma como sigue:

$$\int \frac{\partial}{\partial \nu}(\log r)\, ds = \int \frac{1}{r}\cos(\nu, r)\frac{r\, d\theta}{\cos(\nu, r)} = \int d\theta.$$

La integral final de la derecha es la expresión analítica para el ángulo.

d. El teorema del valor medio

Como una segunda aplicación de la transformación de Green se probará la siguiente propiedad del valor medio de las funciones de potencial:

Supóngase que u satisface la ecuación diferencial $\Delta u = 0$ en una cierta región R. Entonces, el valor de la función de potencial en el centro, P, de una esfera sólida arbitraria de radio r que se encuentre completamente en la región R es igual al valor medio de la función u sobre la superficie, S_r, de la esfera; es decir,

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r} \bar{u}\, d\sigma, \tag{40a}$$

donde $u(x, y, z)$ es el valor en el centro P y $\bar{u}$ es el valor sobre la superficie S_r de la esfera de radio r.

Para probar esto se procede como sigue: sea S_ρ una esfera concéntrica a S_r, en el interior de ésta, con radio $0 < \rho \leqq r$. Como $\Delta u = 0$ en todo punto del interior de S_ρ, por la nota al pie de la página 795 se tiene

$$\iint_{S_\rho} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 0,$$

donde $\partial u/\partial n$ es la derivada de u en la dirección de la normal exterior de S_ρ. Si (ξ, η, ζ) son coordenadas corrientes y si, con el punto (x, y, z) como polo, se introducen coordenadas esféricas por medio de las ecuaciones

$$\xi - x = \rho \cos\phi \operatorname{sen}\theta, \quad \eta - y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \quad \zeta - z = \rho \cos\theta,$$

la ecuación anterior queda

$$\iint_{S_\rho} \frac{\partial u(\rho, \theta, \phi)}{\partial \rho}\, d\sigma = 0.$$

Como el elemento de superficie $d\sigma$ de la esfera S_ρ es igual a $\rho^2\, d\bar{\sigma}$, siendo $d\bar{\sigma}$ el elemento de superficie de la esfera S de radio unitario (ver (30e), p. 486, se encuentra que

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial \rho}\, d\bar{\sigma} = 0,$$

donde la región de integración ya no depende de ρ. Consecuentemente,

$$\int_0^r d\rho \iint_S \frac{\partial u}{\partial \rho}\, d\bar{\sigma} = 0,$$

e intercambiando el orden de integración y llevando a cabo la integración con respecto a ρ, se tiene

$$\iint_S \{u(r, \theta, \phi) - u(0, \theta, \phi)\}\, d\bar{\sigma} = 0.$$

Puesto que $u(0, \theta, \phi) = u(x, y, z)$ es independiente de θ y ϕ,

$$\iint_S u(r, \theta, \phi)\, d\sigma = u(x, y, z) \iint_S d\bar{\sigma} = 4\pi u(x, y, z).$$

Debido a que

$$\iint_S u(r, \theta, \phi)\, d\bar{\sigma} = \frac{1}{r^2} \iint_{S_r} u(r, \theta, \phi)\, d\sigma,$$

donde la integral de la derecha se ha tomado sobre la superficie de S_r, la propiedad del valor medio de u queda probada.

Exactamente de la misma manera, una función u de dos variables que satisface la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ tiene la *propiedad del valor medio* expresada por la fórmula

(40b)
$$2\pi r u(x, y) = \int_{S_r} \bar{u}\, ds,$$

donde $\bar{u}$ denota el valor de la función de potencial sobre un círculo S_r con radio r y centro en el punto (x, y), y ds es el elemento de arco de este círculo.

e. Problema con valores en la frontera para el círculo. Integral de Poisson

Un problema con valores en la frontera que puede tratarse prácticamente por completo es el de la ecuación de Laplace en dos variables independientes, x, y, para el caso de una frontera circular. Dentro de la región circular $x^2 + y^2 \leqq R^2$, introdúzcanse las coordenadas polares (r, θ). Se desea encontrar una función $u(x, y)$, continua dentro del círculo y sobre la frontera, que posea derivadas continuas de primero y segundo órdenes dentro de la región, que satisfaga la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, y que tenga los valores prescritos $u(R, \theta) = f(\theta)$ sobre la frontera. Aquí se supone que $f(\theta)$ es una función periódica y continua de θ, con primeras derivadas seccionalmente continuas.

La solución de este problema, en términos de coordenadas polares, está dada por la llamada *integral de Poisson;*

(41)
$$u = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha) + r^2}\, d\alpha.$$

Para probarlo, empecemos por construir soluciones especiales de la ecuación de Laplace, en la forma siguiente. Transfórmese la ecuación de Laplace a coordenadas polares, para obtener

$$\Delta u = \frac{1}{r}(r u_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0,$$

y búsquense soluciones que puedan expresarse en la forma "separada"$\cdot u = \phi(r)\,\psi(\theta)$, es decir, como el producto de una función de r y una función de θ. Si se sustituye esta expresión para u en la ecuación de Laplace, la ecuación queda

$$r\frac{[r\phi'(r)]_r}{\phi(r)} = -\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)}.$$

Como el primer miembro no contiene a θ y el segundo miembro no contiene a r, cada uno de los dos miembros debe ser independiente de ambas variables, es decir, deben ser iguales a la misma constante, k. Como consecuencia, $\psi(\theta)$ satisface la ecuación diferencial $\psi'' + k\psi = 0$.

Dado que la función u y, por tanto, $\psi(\theta)$ deben ser periódicas con período 2π, la constante k es igual a n^2, donde n es un entero. Por lo tanto,

$$\psi(\theta) = a \cos n\theta + b \operatorname{sen} n\theta,$$

donde a y b son constantes arbitrarias.

La ecuación diferencial para $\phi(r)$,

$$r^2\phi''(r) + r\phi'(r) - n^2\phi(r) = 0,$$

es una ecuación diferencial lineal y, como puede verificarse inmediatamente, las funciones r^n y r^{-n} son soluciones independientes. Dado que la segunda solución se vuelve infinita en el origen, debiendo u ser continua allí, se toma la primera solución, $\phi = r^n$, y se obtienen las soluciones separadas de la ecuación de Laplace

$$r^n(a \cos n\theta + b \operatorname{sen} n\theta).$$

Pueden ahora generarse otras soluciones mediante la combinación lineal de estas soluciones, de acuerdo con el principio de superposición (ver la p. 757)

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum r^n(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta).$$

Incluso una serie infinita de esta forma será una solución, siempre que la serie converja uniformemente y pueda derivarse término a término por dos veces en el interior del círculo.

El desarrollo de Fourier de la función en la frontera $f(\theta)$, prescrita,

$$f(\theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta),$$

considerada como una serie en θ, sin duda converge absoluta y uniformemente (ver el Volumen I, p. 604). Por lo tanto, la serie

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)$$

a fortiori converge uniforme y absolutamente en el interior del círculo. Además, esta serie puede derivarse término a término, siempre que $r < R$, porque la serie resultante, a su vez, converge uniformemente (ver el Volumen I, p. 539). Por lo tanto, la función $u(r, \theta)$ es una función de potencial. Puesto que tiene el valor prescrito en la frontera, es una solución del problema con valores en la frontera propuesto.

Puede reducirse esta solución a la forma integral (41), introduciendo las integrales para los coeficientes de Fourier,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha, \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha) \operatorname{sen} n\alpha \, d\alpha.$$

Ya que la convergencia es uniforme, pueden intercambiarse la integración y la suma; así se obtiene

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha) \left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} \cos n(\theta - \alpha)\right\} d\alpha.$$

La fórmula de la integral de Poisson quedará probada si puede establecerse la relación

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} \cos n\tau = \frac{1}{2} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos \tau + r^2}.$$

Pero esto puede probarse por medio del método usado en el Volumen I (p. 586), es decir, por reducción a una serie geométrica, usando la representación compleja

$$\cos n\tau = \frac{1}{2}(e^{in\tau} + e^{-in\tau}).$$

Se dejan al lector los detalles de la demostración.

Ejercicios 6.7

1. Aplicando una inversión a la fórmula de Poisson, encontrar una función de potencial $u(x, y)$ que esté acotada en la región exterior al círculo unitario y tome valores dados, $f(\theta)$, sobre su frontera (el llamado problema con valores *fuera* de la frontera).
2. Encontrar (a) las superficies equipotenciales y (b) las líneas de fuerza, para el potencial del segmento $x = y = 0, -l \leqq z \leqq +l$, de densidad lineal constante, μ.
3. Probar que si se dan los valores de una armónica $u(x, y, z)$ y de su derivada normal, $\partial u/\partial n$, sobre una superficie cerrada S, entonces el valor de u en cualquier punto interior está dado por la expresión

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right) d\sigma ,$$

donde r es la distancia del punto (x, y, z) al punto variable de integración (aplicar el teorema de Green a las funciones u y $1/r$).

6.8 Más ejemplos de ecuaciones diferenciales parciales que surgen en la fisicomatemática.

a. La ecuación de onda en una dimensión

Los fenómenos de propagación de ondas (por ejemplo, de luz o de sonido) están gobernados por la llamada *ecuación de onda*. Empecemos por considerar el sencillo caso ideal conocido como *onda unidimensional.* Una onda de este tipo involucra la magnitud, u, de alguna propiedad —por ejemplo, la presión, posición de una partícula o intensidad de un campo eléctro— que no sólo depende de la coordenada de posición x (se toma la dirección de propagación como el eje x) sino también del tiempo, t.

Entonces una función de onda $u(x, t)$ satisface una ecuación diferencial parcial de la forma

$$u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_{tt}, \tag{42a}$$

donde a es una constante que depende de la naturaleza física del medio.[1]

Pueden encontrarse soluciones de la ecuación (42a), de la forma

$$u = f(x - at),$$

donde $f(\xi)$ es una función arbitraria de ξ, de la cual sólo se supone que tiene derivadas continuas de primero y de segundo orden. Si se pone $\xi = x - at$, inmediatamente se ve que la ecuación diferencial en cuestión realmente es satisfecha, porque

$$u_{xx} = f''(\xi), \qquad u_{tt} = a^2 f''(\xi).$$

De la misma manera, usando una función arbitraria $g(\xi)$, se obtiene una solución de la forma

[1]Por ejemplo, para las vibraciones transversales de una cuerda u representa el desplazamiento lateral de una partícula, y $a^2 = T/\rho$, donde T es la tensión y ρ la masa por unidad de longitud.

$$u = g(x + at).$$

Ambas soluciones representan movimientos ondulatorios que se propagan con la velocidad a a lo largo del eje x; la primera representa una onda que viaja en la dirección x positiva, la segunda, una onda que viaja en la dirección x negativa. Supóngase que $u = f(x - at)$ tiene el valor $u(x_1, t_1)$ en cualquier punto x_1, en el instante t_1; entonces u tiene el mismo valor, en el instante t, en el punto $x = x_1 - a(t - t_1)$, porque $x - at = x_1 - at_1$, de modo que $f(x - at) = f(x_1 - at_1)$. De la misma manera puede verse que la función $g(x + at)$ representa una onda que viaja en la dirección x negativa, con velocidad a.

Ahora se resolverá el siguiente *problema con valores iniciales* para esta ecuación de onda. De entre todas las soluciones posibles de la ecuación diferencial se desea seleccionar aquéllas para las cuales el *estado inicial* (en $t = 0$) está dado por dos funciones prescritas: $u(x,0) = \phi(x)$ y $u_t(x,0) = \psi(x)$. Para resolver este problema, simplemente se escribe

$$u = f(x - at) + g(x + at) \tag{42b}$$

y se determinan las funciones f y g a partir de las dos ecuaciones

$$\phi(x) = f(x) + g(x),$$
$$\frac{1}{a}\psi(x) = -f'(x) + g'(x).$$

La segunda ecuación da

$$c + \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\tau)\, d\tau = -f(x) + g(x),$$

donde c es una constante arbitraria de integración. De esto fácilmente se obtiene la solución requerida en la forma

$$u(x, t) = \frac{\phi(x + at) + \phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)\, d\tau. \tag{42c}$$

Ahora el lector debe probar por cuenta propia, introduciendo las nuevas variables independientes $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ en lugar de x y t que no existen otras soluciones de la ecuación diferencial más que las dadas.

b. La ecuación de onda en el espacio tridimensional

En el espacio de tres dimensiones, la función de onda u depende de cuatro variables independientes, a saber, las tres coordenadas espaciales x, y, z y el tiempo t. Entonces la ecuación de onda es

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{1}{a^2} u_{tt}, \tag{43a}$$

o, más brevemente,

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt}. \tag{43b}$$

Aquí, una vez más, fácilmente se encuentran las soluciones que representan la propagación de una onda plana en el sentido físico. A saber, cualquier función, $f(\xi)$, que sea continuamente diferenciable por dos veces proporciona una solución de la ecuación diferencial, si se hace que ξ sea una expresión lineal de la forma

$$\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z \pm at,$$

cuyos coeficientes satisfacen la relación

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Porque, ya que

$$\Delta u = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) f''(\xi) = f''(\xi)$$

y

$$u_{tt} = a^2 f''(\xi),$$

se ve que $u = f(\alpha x + \beta y + \gamma z \pm at)$ realmente es una solución de la ecuación (43b).

Si q es la distancia del punto (x, y, z) al plano $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, por geometría analítica se sabe (ver la p. 169) que

$$q = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

De aquí que, en primer lugar, de la expresión

$$u = f(q + at)$$

se ve que en todos los puntos de un plano que está a una distancia q del plano $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ y es paralelo a este último, la propiedad que está siendo propagada (representada por u) tiene el mismo valor en un momento dado. La propiedad se propaga en el espacio de manera tal que los planos paralelos a $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ son siempre superficies en las que la propiedad es constante; la velocidad de propagación es a en la dirección perpendicular a los planos. En física teórica, un fenómeno que se propaga de esta manera se conoce como *onda plana.*

Un caso de particular importancia es aquél en el que la propiedad varía periódicamente con el tiempo. Si la frecuencia de la vibración es ω, un fenómeno de este tipo puede representarse por medio de

$$u = \exp[ik(\alpha x + \beta y + \gamma z + at)] = \exp[ik(\alpha x + \beta y + \gamma z)] \exp(i\omega t),$$

donde $k/2\pi$ es el recíproco de la longitud de onda λ: $k = 2\pi/\lambda = \omega/a$.

La ecuación de onda con cuatro variables independientes tiene otras soluciones, que representan *ondas esféricas* propagándose desde un punto dado, digamos, el origen. Una onda esférica se define diciendo que la propiedad es la misma, en un instante dado, en todo punto de una esfera con centro en el origen, es decir, que u tiene el mismo valor en todos los puntos de la esfera. Para encontrar soluciones que satisfagan esta condición, se transforma Δu a las coordenadas polares (r, θ, ϕ), y, a continuación, se supone que u sólo depende de r y t pero no de θ ni de ϕ. Si, como consecuencia, las derivadas de u con respecto a θ y a ϕ se igualan a cero (ver la p. 610), la ecuación diferencial (43b) queda

$$u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = \frac{1}{a^2} u_{tt}$$

o bien,

$$(ru)_{rr} = \frac{1}{a^2} (ru)_{tt}.$$

Por el momento se remplaza ru por w y se observa que w es una solución de la ecuación

$$w_{rr} = \frac{1}{a^2} w_{tt},$$

la cual ya se ha estudiado; de donde, w debe ser expresable en la forma

$$w = f(r - at) + g(r + at).$$

Consecuentemente,

$$u = \frac{1}{r}[f(r - at) + g(r + at)]. \tag{43c}$$

El lector debe ahora verificar directamente por su cuenta que una función de este tipo realmente es una solución de la ecuación diferencial (43b).

Físicamente, la función $u = f(r - at)/r$ representa una onda que se propaga con velocidad a desde un centro hacia el espacio.

c. Las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre

Como un último ejemplo se discutirá el sistema de ecuaciones conocidas como *ecuaciones de Maxwell*, que constituyen el fundamento de la electrodinámica. Sin embargo, no se intentará considerar las ecuaciones desde el punto de vista físico, sino simplemente se les usará para ilustrar los diversos conceptos matemáticos desarrollados anteriormente.

El "estado" electromagnético en el espacio libre queda determinado por medio de dos vectores dados como funciones de la posición y del tiempo: un vector eléctrico, **E**, con componentes E_1, E_2, E_3 y un vector magnético, **H**, con componentes H_1, H_2, H_3. Estos vectores satisfacen las ecuaciones de Maxwell:

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \tag{44a}$$

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \tag{44b}$$

donde c es la velocidad de la luz en el espacio libre. Expresadas en términos de las componentes de los vectores, las ecuaciones son:

$$\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial H_1}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial H_2}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial H_3}{\partial t} = 0,$$

y

$$\frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_2}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_3}{\partial t} = 0,$$

Así se tiene un sistema de seis ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, es decir, de ecuaciones que contienen las primeras derivadas parciales de las componentes con respecto a las coordenadas espaciales y al tiempo.

Ahora se deducirán algunas consecuencias características de las ecuaciones de Maxwell. Si se forma la *divergencia* de ambas ecuaciones y se recuerda que div rot $\mathbf{A} = 0$(ver la p. 211) y que la derivación con respecto al tiempo y la operación de divergencia son intercambiables, de (44a, b) se obtiene

(45a) $$\text{div } \mathbf{E} = \text{constante},$$

(45b) $$\text{div } \mathbf{H} = \text{constante};$$

esto es, las dos divergencias son independientes del tiempo. En particular, si inicialmente div **E** y div **H** son cero, siguen siendo cero todo el tiempo.

Considérese ahora cualquier superficie S que se encuentre en el campo y tómense las integrales de volumen

$$\iiint \text{div } \mathbf{E}\, d\tau$$

y

$$\iiint \text{div } \mathbf{H}\, d\tau$$

en todo el volumen encerrado por ella. Si se aplica el teorema de Gauss (p. 667) a estas integrales, se transforman en integrales de las componentes normales E_n, H_n sobre la superficie S. Es decir, las ecuaciones

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

dan

$$\iint_S E_n \, d\sigma = 0, \qquad \iint_S H_n \, d\sigma = 0.$$

En la teoría de la electricidad, las integrales de superficie

$$\iint_S E_n \, d\sigma \qquad \text{o} \qquad \iint_S H_n \, d\sigma$$

se conocen como *los flujos eléctrico o magnético* a través de la superficie S; en consecuencia, el resultado puede enunciarse como sigue:

Los flujos eléctrico y magnético a través de una superficie cerrada, sujetos a condiciones iniciales que anulan div **E** *y div* **H**, *son cero.*

Se obtiene algo más a partir de las ecuaciones de Maxwell si se considera una porción de la superficie S limitada por la curva Γ, como sigue:

Si se denotan las componentes de un vector normal a la superficie S mediante el subíndice n, de las ecuaciones de Maxwell (44a, b) inmediatamente se deduce que

$$(\text{rot } \mathbf{E})_n = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_n}{\partial t}.$$

$$(\text{rot } \mathbf{H})_n = +\frac{1}{c}\frac{\partial E_n}{\partial t}.$$

Si se integran estas ecuaciones sobre la superficie con elemento de superficie $d\sigma$, pueden transformarse los primeros miembros en integrales de línea tomadas a lo largo de la frontera Γ, mediante el teorema de Stokes (ver la p. 678). Haciéndolo así y tomando la derivación con respecto a t fuera del signo integral, se obtienen las ecuaciones.

$$\int_{\Gamma} E_s \, ds = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_S H_n \, d\sigma,$$

$$\int_{\Gamma} H_s \, ds = +\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_S E_n \, d\sigma,$$

donde los símbolos E_s y H_s bajo los signos integrales de la izquierda son las *componentes tangenciales* de los vectores eléctrico y magnético en la dirección del arco creciente, y el sentido de recorrido de la curva Γ junto con la dirección del vector normal **n** define un tornillo "derecho".

Los hechos representados por estas ecuaciones pueden expresarse en palabras como sigue:

La integral de línea de la fuerza eléctrica o magnética alrededor de un elemento de superficie es proporcional a la rapidez de cambio del flujo eléctrico o magnético a través del elemento de superficie, siendo la constante de proporcionalidad $-1/c$ ó $+1/c$.

Por último, se establecerá la relación entre las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de onda. De hecho se encuentra que cada uno de los vectores **E** y **H**, es decir, cada una de las componentes de los vectores, satisface la ecuación de onda

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} u_{tt}.$$

Para demostrarlo elimínese, por ejemplo el vector **H** de las dos ecuaciones, derivando la segunda ecuación con respecto al tiempo y sustituyendo $\partial \mathbf{H}/\partial t$ por lo que se obtenga de la primera ecuación.

Entonces se concluye que

$$c \text{ rot } (\text{rot } \mathbf{E}) + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Si ahora se aplica la relación vectorial[1]

(46) $$\text{rot } (\text{rot } \mathbf{A}) = -\Delta \mathbf{A} + \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}),$$

y se recuerda que

$$\text{div } \mathbf{E} = 0,$$

[1] Esta relación vectorial se deduce inmediatamente de su expresión en términos de las coordenadas.

inmediatamente se obtiene

(47a)
$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

De la misma manera puede demostrarse que el vector **H** satisface la misma ecuación:

(47b)
$$\Delta \mathbf{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

Ejercicios 6.8

1. Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales parciales:
   (a) $u_{xy} = 0$
   (b) $u_{xyz} = 0$
   (c) $u_{xy} = a(x, y)$.
2. Encontrar una solución de la ecuación
$$u_{xy} = u,$$
para la cual $u(x, 0) = u(0, y) = 1$, en la forma de una serie de potencias.
3. Encontrar la ecuación diferencial parcial que es satisfecha por la familia biparamétrica de esferas
$$z^2 = 1 - (x - a)^2 - (y - b)^2.$$
4. Probar que si
$$z = u(x, y, a, b)$$
es una solución que depende de los dos parámetros a, b, de la ecuación diferencial de primer orden
$$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0,$$
entonces la envolvente de toda familia uniparamétrica de soluciones que se elijan de entre las $z = u(x, y, a, b)$ es, a su vez, una solución.
5. (a) Encontrar soluciones particulares de la ecuación
$$u_x{}^2 + u_y{}^2 = 1$$
de la forma $u = f(x) + g(y)$.
(b) Encontrar soluciones particulares de la ecuación
$$u_x u_y = 1$$
de las formas $u = f(x) + g(y)$ y $u = f(x)\, g(y)$.
(c) Usar el resultado del Ejercicio 4 para obtener otras soluciones de la ecuación dada en la parte (b), poniendo $b = ka$ en

$$u = ax + \frac{1}{a}y + b,$$

donde k es una constante.

6. Resolver la ecuación

$$u_{xx} + 5u_{xy} + 6u_{yy} = e^{x+y},$$

reduciéndola a una de la forma de la del Ejercico 1 (c).

7. Probar que si K es una función homogénea de x, y, z la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$$

tiene una solución que es una potencia de $(x^2 + y^2 + z^2)$.

8. Determinar las soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

que también sean soluciones de

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = a^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2.$$

9. (a) Obtener soluciones particulares de la ecuación de onda

$$u_{xx} = \frac{1}{c^2} u_{tt},$$

en la forma $u(x, t) = \phi(x)\psi(t)$ que satisfagan las condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

(b) Expresar la solución de la parte (a) en la forma $f(x + ct) + g(x - ct)$.

(c) *Problema de la cuerda punteada:* desarrollando $f(x)$ sobre el intervalo $[0, \pi]$ en una serie de Fourier exclusivamente de senos que *define* $f(-x) = -f(x)$ para $0 \leqq x \leqq \pi$), encontrar una solución del tipo antes mencionado que satisfaga las condiciones iniciales, para $0 \leqq x \leqq \pi$,

$$u(x,0) = f(x)$$
$$u_t(x,0) = 0,$$

donde

(i) $$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqq x \leqq \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \leqq x \leqq \pi \end{cases}$$

(ii) $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen} nx.$$

10. Denotemos por $u(x, t)$ una solución de la ecuación de onda

$$u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_{tt} \qquad (a > 0),$$

que sea continuamente diferenciable por dos veces.
Sea $\phi(t)$ una función dada, continuamente diferenciablepor dos veces, tal que

$$\phi(0) = \phi'(0) = \phi''(0) = 0.$$

Encontrar la solución u para $x \geqq 0$ y $t \geqq 0$ determinada por las condiciones de frontera

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \qquad (x \geqq 0),$$
$$u(0,t) = \phi(t) \qquad (t \geqq 0).$$

CAPITULO 7

Cálculo de variaciones

7.1 Funciones y sus extremos

En la teoría de los máximos y mínimos ordinarios de una función diferenciable, $f(x_1, \ldots, x_n)$, de n variables independientes, la condición necesaria (pp. 377-378) para que se presente un valor extremo en un punto del dominio de f es

(1) $$df = 0 \qquad \text{o} \qquad \text{grad} f = 0 \qquad \text{o} \qquad f_{x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Estas ecuaciones expresan el *carácter estacionario* de la función f en el punto en cuestión. El que estos puntos estacionarios sean en realidad puntos máximos o mínimos sólo puede decidirse después de una investigación adicional. En contraste con las ecuaciones (1), las condiciones suficientes para la existencia de extremos toman la forma de *desigualdades* (ver la p. 402).

El *cálculo de variaciones* está igualmente relacionado con el problema de los valores extremos (*valores respectivamente estacionarios*) pero en una situación completamente nueva. Ahora las funciones cuyos extremos se buscan ya no dependen de una variable independiente o de un número finito de variables independientes dentro de una cierta región, sino que son los llamados *funcionales* o funciones de funciones. Específicamente, para determinarlos deben conocerse una o más funciones o curvas (o superficies, como puede ser el caso), las llamadas *funciones argumento*.

El interés por problemas de este tipo surgió en 1696 por el enunciado de John Bernoulli del *problema de la braquistócrona*.

En un plano vertical x, y se une un punto $A = (x_0, y_0)$ a un punto $B = (x_1, y_1)$, donde $x_1 > x_0$, $y_1 > y_0$, por medio de una curva

suave, $y = u(x)$, de tal manera que el tiempo necesario para que una partícula se deslice sin rozamiento desde A hasta B a lo largo de la curva, bajo la acción de la gravedad (la cual se considera que actúa en la dirección del eje y positivo), sea lo más corto posible.

La expresión matemática del problema se basa en la hipótesis física de que a lo largo de tal curva, $y = \phi(x)$ la velocidad ds/dt (siendo s la longitud de arco de la curva) es proporcional a $\sqrt{2g(y - y_0)}$, la raíz cuadrada de la altura de caída. Por lo tanto, el tiempo de caída de la partícula está dado por

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y - y_0}}\,dx$$

(ver el Volumen I, p. 408). Si se elimina el factor irrelevante $\sqrt{2g}$ y se toma $y_0 = 0$ (lo cual puede hacerse sin pérdida de generalidad), se obtiene el problema siguiente: entre todas las funciones continuamente diferenciables $y = \phi(x_0)$, $y \geqq 0$, para las cuales $\phi(x_0) = 0$, $\phi(x_1) = y_1$, encontrar aquélla para la cual la integral

$$\text{(2a)} \qquad I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx$$

tiene el menor valor posible.

En la p. 827 se obtendrá el resultado —muy sorprendente para los contemporáneos de Bernoulli— de que la curva $y = \phi(x)$ debe ser una *cicloide*. Aquí se desea hacer resaltar el hecho de que el problema de Bernoulli y los problemas elementales de máximos y mínimos son completamente diferentes. La expresión $I\{\phi\}$ depende del curso completo de la función ϕ. Dado que I no puede ser descrita por lo valores de un número finito de variables independientes, es una función de tipo nuevo. Su carácter de "función de una función $\phi(x)$" se indica por medio de corchetes.

El siguiente es otro problema de naturaleza semejante: se deben unir dos puntos, $A = (x_0, y_0)$ y $B = (x_1, y_1)$, donde $x_1 > x_0$, $y_0 > 0$, $y_1 > 0$, por medio de una curva $y = u(x)$ que se encuentre por encima del eje x, de manera tal que el área de la superficie de revolución que se forma cuando se hace girar la curva alrededor del eje x sea *lo más pequeña posible.*

Usando la expresión dada en la p. 487 para el área de una superficie de revolución y eliminando el factor irrelevante 2π, se tiene el siguiente enunciado matemático del problema: entre todas las fun-

ciones continuamente diferenciables $y = \phi(x)$ para las cuales $\phi(x_0) = y_0$, $\phi(x_1) = y_1$, $\phi(x) > 0$, encontrar aquélla para la cual la integral

(2b)
$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx \qquad [y = \phi(x)]$$

tiene el menor valor posible. Se encontrará que la solución es una *catenaria.*

El elemental problema geométrico de encontrar la curva más corta que une dos puntos, A y B, en el plano pertenece a la misma categoría. Analíticamente, el problema es encontrar dos funciones, $x(t)$, $y(t)$, de un parámetro t en un intervalo $t_0 \leqq t \leqq t_1$, para las cuales se prescriben los valores $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ y $y(t_0) = y_0$, $y(t_1) = y_1$ y la integral

(2c)
$$\int_{t_0}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}\right)$$

tiene el menor valor posible. Por supuesto, la solución es una recta.

Menos trivial es la solución del problema correspondiente de encontrar las *geodésicas sobre una superficie dada* $G(x, y, z) = 0$, es decir, de unir dos puntos sobre la superficie, con coordenadas (x_0, y_0, z_0) y (x_1, y_1, z_1), por medio de la curva más corta posible que se encuentre sobre la superficie. En lenguaje analítico se tiene el problema siguiente: entre todas las triadas de funciones $x(t), y(t), z(t)$ del parámetro t, que hacen de la ecuación

(3a)
$$G(x, y, z) = 0$$

una identidad en t y para las cuales $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0$ y $x(t_1) = x_1, y(t_1) = y_1, z(t_1) = z_1$, encontrar aquéllas para las cuales la integral

(3b)
$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$$

tiene el menor valor posible.

El *problema isoperimétrico* de encontrar una curva cerrada de longitud dada que encierre la mayor área posible, ya discutido en la p. 420, también pertenece a la misma categoría. Anteriormente se ha probado que la solución es un círculo.[1]

[1] La demostración dada aquí sólo se aplica a las curvas convexas; sin embargo, la observación siguiente nos permite extender inmediatamente el resultado a cualquier curva: considérese el *mínimo conjunto convexo* de la curva C (es decir, el menor conjunto convexo que encierre a C). Su frontera, K, consiste de arcos convexos de C y porciones rectilíneas de tangentes a C que tocan a ésta en dos puntos y forman un puente sobre las partes cóncavas de C mediante rectas. Resulta evidente que el área

El planteamiento general del tipo de problema encontrado aquí es como sigue: se da una función $F(x, \phi, \phi')$ de tres argumentos que, en la región de los argumentos considerada, es continua y tiene derivadas continuas de primero y segundo órdenes. Si en esta función F se remplaza ϕ por una función $y = \phi(x)$ y ϕ' por la derivada $y' = \phi'(x)$, F se convierte en una función de x, y una integral de la forma

$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx \tag{4}$$

se vuelve un número definido que depende de la función $y = \phi(x)$; es decir, es un "funcional evaluado para la función $\phi(x)$."

El problema fundamental del cálculo de variaciones es el siguiente:

Entre todas las funciones que están definidas, son continuas y poseen primera y segunda derivadas continuas en el intervalo $x_0 \leqq x \leqq x_1$ *y para las cuales se prescriben los valores en la frontera* $y_0 = \phi(x_0)$ *y* $y_1 = \phi(x_1)$, *encontrar aquélla para la cual el funcional* $I\{\phi\}$ *tiene el menor valor posible (o el mayor valor posible).*

Al dicutir este problema, un punto esencial es la naturaleza de las *condiciones de admisibilidad* impuestas sobre las funciones $\phi(x)$. Formar el valor $I\{\phi\}$ simplemente requiere que cuando se sustituye $\phi(x)$, F será una función seccionalmente continua de x y esto queda asegurado si la derivada $\phi'(x)$ es seccionalmente continua. Pero incluso se han hecho más rigurosas las condiciones de admisión al requerir que las primeras derivadas, e incluso las segundas derivadas, de las funciones $\phi(x)$ sean continuas. Por supuesto, como consecuencia se restringe el campo en el que debe buscarse el máximo o el mínimo. Sin embargo, se encontrará que, de hecho, esta restricción no afecta a la solución, es decir, que la función que es más favorable cuando se cuenta con un campo más amplio siempre se encontrará en el campo más restringido de funciones con primeras y segundas derivadas continuas.

---

de K es mayor que la de C, siempre que C no sea convexa y, por otra parte, que el perímetro de K es menor que el de C. Si ahora se hace que K se extienda uniformemente de modo que siempre conserve la misma forma, hasta que la curva resultante K' tenga el perímetro prescrito, K' será una curva del mismo perímetro que C pero que encierra un área mayor. De aquí que, en el problema isoperimétrico, desde el principio nos podemos restringir a curvas *convexas*, para obtener el área máxima.

Problemas de este tipo se presentan con bastante frecuencia en la geometría y la física. Aquí sólo se menciona un ejemplo: el principio fundamental de la óptica geométrica. Considérese un rayo de luz en el plano x, y y supóngase que la velocidad de la luz es una función dada, $v(x, y, y')$, del punto (x, y) y de la dirección y' [siendo $y = \phi(x)$ la ecuación de la trayectoria de la luz y $y' = \phi'(x)$ la derivada correspondiente]. Entonces *el principio de Fermat del tiempo mínimo* afirma:

La trayectoria real de un rayo de luz entre dos puntos dados A, B es tal que el tiempo que tarda la luz en recorrerla es menor que el tiempo que tardaría en recorrer cualquier otra trayectoria desde A hasta B.

En otras palabras, si t es el tiempo y s la longitud de arco de *cualquier* curva $y = \phi(x)$ que una los puntos A y B, el tiempo que tardaría la luz en recorrer la porción de curva entre A y B está dado por la integral

$$(5) \qquad I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx}\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y, y')}\,dx.$$

La trayectoria real de la luz queda determinada por la función $y = \phi(x)$ para la cual esta integral tiene el menor valor posible.

Se ve que el problema óptico de encontrar el rayo de luz es un caso especial del problema general enunciado en el párrafo anterior, correspondiente a

$$F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v}.$$

En la mayor parte de los casos ópticos, la velocidad de la luz, v, es independiente de la dirección y es simplemente una función de posición, $v(x, y)$.

7.2 Condiciones necesarias para la existencia de valores extremos de un funcional

a. Anulación de la primera variación

El propósito es encontrar las condiciones necesarias para que una función $y = \phi(x)$ pueda proporcionar un máximo o un mínimo, o

bien, usando un término general, un valor extremo, de la integral $I\{\phi\}$ definida por (4). Se procede siguiendo un método bastante análogo al usado en el problema elemental de encontrar los valores extremos de una función de una o más variables. Se supone que $y = \phi = u(x)$ es la solución. Entonces se tiene que expresar el hecho de que (para la existencia de un mínimo) I debe *crecer* cuando se remplaza u por otra función admisible, ϕ. Además, como simplemente estamos interesados en obtener las condiciones necesarias, podemos restringirnos a la consideración de cualquier clase especial de funciones ϕ que estén próximas a u, es decir, funciones para las que el valor absoluto de la diferencia $\phi - u$ permanezca entre cotas prescritas.

Se piensa en la función u como un miembro de una familia uniparamétrica, con parámetro ε, construída como sigue: se toma cualquier función $\eta(x)$ que se anule sobre la frontera del intervalo—es decir, para la cual $\eta(x_0) = 0$, $\eta(x_1) = 0$— y que tenga primera y segunda derivadas continuas en todo punto del intervalo cerrado. Entonces se forma la familia de funciones

$$\phi(x, \varepsilon) = u(x) + \varepsilon\eta(x).$$

La expresión $\varepsilon\eta(x) = \delta u$ se llama *variación de la función u* [puesto que [$\eta(x) = \partial\phi/\partial\varepsilon$,el símbolo δ denota la diferencial que se obtiene cuando se considera a ε como la variable independiente y a x como un parámetro.]. Entonces, si se consideran fijas tanto a la función u como a la función, el valor del funcional

$$I\{u + \varepsilon\eta\} = G(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u + \varepsilon\eta, u' + \varepsilon\eta')\, dx$$

se convierte en una función de ε; y el postulado de que u dará un mínimo de $I\{\phi\}$ implica que la función de arriba poseerá un mínimo para $\varepsilon = 0$, de modo que como condiciones necesarias se tienen la ecuación

(6a) $$G'(0) = 0$$

y la desigualdad

(6b) $$G''(0) \geqq 0.$$

Las condiciones necesarias correspondientes para la existencia de un máximo son la misma ecuación $G'(0) = 0$ y la desigualdad invertida $G''(0) \leqq 0$. La condición $G'(0) = 0$ debe ser satisfecha por toda

función η que satisfaga las condiciones anteriores pero que, por otra parte, es arbitraria.

Haciendo a un lado la cuestión de discriminar entre los máximos y los mínimos, se dice que si una función u satisface la ecuación $G'(0) = 0$, para todas las funciones η, la integral I es *estacionaria* para $\phi = u$. Si, como antes, se usa el símbolo δ para denotar la diferenciación con respecto a ε, también se dice que la ecuación

$$\delta I = \varepsilon G'(0) = 0,$$

cuando es satisfecha por una función $\phi = u$ y η, arbitraria, expresa el carácter estacionario de I. La expresión

$$\text{(6c)} \qquad \varepsilon G'(0) = \varepsilon \left\{ \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_0}^{x_1} F(x, u + \varepsilon\eta, u' + \varepsilon\eta')\, dx \right\}_{\varepsilon=0}$$

se llama *variación* o, más precisamente, *primera variación*,[1] de la integral. Por lo tanto, *el carácter estacionario de una integral* y *la anulación de la primera variación* significan exactamente lo mismo

El carácter estacionario es *necesario* para la existencia de máximos o mínimos, pero, como en el caso de los máximos o mínimos ordinarios, no es una condición *suficiente* para que se presente cualquiera de estas posibilidades. Aquí no se tratará el problema de la suficiencia; en lo que sigue nos restringiremos al problema del carácter estacionario.

El objetivo principal es transformar la condición $G'(0) = 0$, para el carácter estacionario de la integral, de manera tal que se convierta en una condición sólo para u y ya no contenga a la función arbitraria η.

Ejercicios 7.2a

1. En relación con el problema de la braquistócrona (ver las pp. 813-814), calcular el tiempo de caída cuando los puntos A y B están unidos mediante una recta.
2. Supóngase que la velocidad de una partícula con coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), que se mueve en el espacio tridimensional, es $v = 1/f(r)$. ¿Qué tiempo tarda la partícula en describir la porción de una curva dada por un parámetro σ [siendo $r(\sigma)$, $\theta(\sigma)$, $\phi(\sigma)$] las coordenadas de un punto de la curva, entre los puntos A y B?

[1] De aquí proviene el uso del término *cálculo de variaciones*, con lo que se quiere indicar que, en este tema, se desea considerar el comportamiento de funciones de una función cuando se hace variar a esta función independiente, o *función argumento*, alterando un parámetro ε.

b. Deducción de la ecuación diferencial de Euler

El criterio fundamental del cálculo de variaciones lo constituye el teorema siguiente:

La condición necesaria y suficiente para que la integral

$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi, \phi')\, dx \tag{7a}$$

sea estacionaria cuando $\phi = u$, *es que* u *sea una función admisible que satisfaga la ecuación diferencial de Euler*

$$L[u] = F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} = 0, \tag{7b}$$

o, detalladamente,

$$F_{u'u'}u'' + F_{uu'}u' + F_{xu'} - F_u = 0. \tag{7c}$$

Para probarlo, nótese que puede derivarse la expresión

$$G(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u + \varepsilon\eta, u' + \varepsilon\eta')\, dx$$

con respecto a ε, bajo el signo integral (ver la p. 103), siempre que la derivación proporcione una función de x que sea continua o, al menos, seccionalmente continua. En este caso, poniendo $u + \varepsilon\eta = y$ y derivando se obtiene bajo el signo integral la expresión $\eta F_y + \eta' F_{y'}$, la cual, debido a las hipótesis establecidas acerca de f, u y η, satisface las condiciones que se acaban de enunciar. Así, inmediatamente se obtiene

$$G'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [\eta F_u(x, u, u') + \eta' F_{u'}(x, u, u')]\, dx. \tag{7d}$$

Para propósitos posteriores, nótese que al deducir esta ecuación nada se ha aplicado más allá de la continuidad de las funciones u y η y la continuidad seccional de sus primeras derivadas. En esta ecuación aparece la función arbitraria bajo el signo integral en una forma doble, a saber, como η y como η'. Sin embargo, de inmediato se puede eliminar η', integrando por partes; se tiene así

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta' F_{u'}\, dx = \eta F_{u'}\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta\left(\frac{d}{dx}F_{u'}\right) dx = -\int_{x_0}^{x_1} \eta\left(\frac{d}{dx}F_{u'}\right) dx,$$

porque, por hipótesis, $\eta(x_0)$ y $\eta(x_1)$ se anulan. En esta integración por partes se tiene que suponer que la expresión $(d/dx)F_{u'}$ está definida y es integrable, pero evidentemente éste es el caso, ya que se supuso la continuidad de las segundas derivadas de F. De aquí que, si se escribe

(7e) $$L[u] = F_u - \frac{d}{dx} F_{u'}$$

por brevedad, se tiene la ecuación

(7f) $$\int_{x_0}^{x_1} \eta L[u]\, dx = 0.$$

Esta ecuación debe ser satisfecha por toda función η que satisfaga las condiciones establecidas pero que, por otra parte, sea arbitraria. De esto se concluye que

(7g) $$L[u] = 0,$$

en virtud de lo siguiente:

LEMA I. Si una función $C(x)$, continua en el intervalo bajo consideración, satisface la relación

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\, C(x)\, dx = 0$$

para una función arbitraria $\eta(x)$ tal que $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ y $\eta''(x)$ es continua, entonces $C(x) = 0$ para todo valor de x en el intervalo. (La demostración de este lema se pospondrá hasta la p. 823.)

Podría, no obstante, obtenerse la condición (7g) en una forma diferente,[1] eliminando el término en η en la ecuación

$$\int_{x_0}^{x_1} (\eta\, F_u + \eta'\, F_{u'})\, dx = 0$$

mediante integración por partes; porque, si se escribe $F_{u'} = A$, $F_u = b = B'$, por brevedad, y se recuerda la condición en la frontera para η, integrando por partes se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta\, F_u\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \eta\, B'\, dx = -\int_{x_0}^{x_1} \eta' B\, dx.$$

[1] El primer método es de Lagrange y el segundo de P. Du Bois Reymond.

Si se pone $\zeta = \eta'$, se tiene, en analogía a (7f), la condición

(7h) $$\int_{x_0}^{x_1} \zeta(A - B)\, dx = 0.$$

Al deducir esta fórmula no es necesario establecer hipótesis alguna acerca de las segundas derivadas de η y u. Por el contrario, basta con suponer que ϕ (o u y η) son continuas y tienen primeras derivadas seccionalmente continuas. Ahora bien, es cierto que la ecuación (7h) no debe cumplirse para cualquier función arbitraria (seccionalmente continua), ζ, sino sólo para aquellas funciones ζ que sean derivadas de una función $\eta(x)$ que satisfaga las condiciones establecidas en los puntos extremos. Sin embargo, si $\zeta(x)$ es cualquier función seccionalmente continua dada que satisface la relación

(7i) $$\int_{x_0}^{x_1} \zeta(x)\, dx = 0,$$

puede ponerse

$$\eta = \int_{x_0}^{x} \zeta(t)\, dt;$$

entonces se ha construído una η, admisible, porque $\eta' = \zeta$ y $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. Así se obtiene el resultado siguiente:

Una condición necesaria para que la integral sea estacionaria es

(7j) $$\int_{x_0}^{x_1} \zeta(A - B)\, dx = 0,$$

donde ζ es una función arbitraria seccionalmente continua que simplemente satisface (7i).

Ahora se requiere la ayuda del siguiente:

LEMA II. Si la función seccionalmente continua $S(x)$ satisface la condición

(8a) $$\int_{x_0}^{x_1} \zeta S\, dx = 0,$$

para todas las funciones $\zeta(x)$ que sean seccionalmente continuas en el intervalo y para las cuales

(8b) $$\int_{x_0}^{x_1} \zeta dx = 0,$$

entonces $S(x)$ es una constante c.

Este lema también se probará posteriormente en la p. 823. Si, por el momento, se supone cierto, de (7h)—sustituyendo las expresiones anteriores para A y B— se deduce que

$$\int_{x_0}^{x} F_u\, dx + c = F_{u'}.$$

Puesto que F_u es seccionalmente continua, el primer miembro, considerado como una integral indefinida, *se puede derivar* con respecto a x y tiene a F_u como su derivada; en consecuencia, se cumple lo mismo para el segundo miembro. Por lo tanto, existe la expresión $(d/dx)\, F_{u'}$ para la solución supuesta, u, y la ecuación

(9a) $$F_u = \frac{d}{dx} F_{u'}$$

se cumple en todos los puntos de continuidad de u'.

Así, la ecuación de Euler sigue siendo la condición necesaria para la existencia de un valor extremo, o la condición para que la integral sea estacionaria, cuando la clase de funciones admisibles $\phi(x)$ se extiende desde el principio, requiriendo únicamente la continuidad seccional de la primera derivada de $\phi(x)$.

La ecuación de Euler es una *ecuación diferencial ordinaria de segundo orden*. Sus soluciones se conocen como *extremales* del problema del mínimo. Para resolver el problema del mínimo debe encontrarse, entre todas las extremales, aquélla que satisfaga las condiciones prescritas en la frontera.

Si se satisface la *condición de Legendre*

(9b) $$F_{u'u'} \neq 0$$

para $\phi = u(x)$, puede llevarse la ecuación diferencial a la forma "regular" $u'' = f(x, u, u')$, donde el segundo miembro es una expresión conocida que involucra a x, u, u'.

c. *Demostraciones de los lemas fundamentales*

Ahora se probarán los dos lemas que se usaron en la subsección anterior. Para probar el Lema I se supone que en algún punto, digamos $x = \xi$, $C(x)$ es diferente de cero y positiva. Entonces, como $C(x)$ es continua, sin duda puede determinarse un subintervalo de (x_0, x_1),

$$\xi - \alpha \leqq x \leqq \xi + \alpha, \tag{9c}$$

dentro del cual $C(x)$ siga siendo positiva. Elíjase ahora una η, continuamente diferenciable por dos veces, positiva en el interior de este subintervalo y cero en todos los demás puntos, haciendo, digamos, para x en (9c) que

$$\eta(x) = (x - \xi + \alpha)^4 (x - \xi - \alpha)^4 = \{(x - \xi)^2 - \alpha^2\}^4.$$

Evidentemente, esta función η satisface todas las condiciones prescritas; $\eta(x)C(x)$ es positiva en el interior del subintervalo y cero fuera de él. Por lo tanto, la integral

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta C \, dx$$

no puede ser cero.[1] Dado que esto contradice la hipótesis establecida, $C(\xi)$ no puede ser positiva. Por las mismas razones, $C(\xi)$ no puede ser negativa. De aquí que $C(\xi)$ debe anularse para todos los valores de ξ en el interior del intervalo, como se afirmó en el lema.

Para probar el Lema II, obsérvese que la hipótesis (8b) acerca de $\zeta(x)$ inmediatamente conduce a la relación

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta(x) \{S(x) - c\} \, dx = 0, \tag{10}$$

donde c es una constante arbitraria. Elíjase ahora c de tal manera que $S(x) - c$ sea una función admisible $\zeta(x)$; esto es, determínese c por medio de la ecuación

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \zeta \, dx = \int_{x_0}^{x_1} \{S(x) - c\} \, dx = \int_{x_0}^{x_1} S(x) \, dx - c(x_1 - x_0).$$

Sustituyendo este valor de c en la ecuación (10) y tomando $\zeta = S(x) - c$, inmediatamente se tiene

$$\int_{x_0}^{x_1} \{S(x) - c\}^2 \, dx = 0.$$

Como por hipótesis el integrando es continuo, o al menos seccionalmente continuo, se deduce que

$$S(x) - c = 0$$

es una identidad en x, como se afirmó en el lema.

[1]La integral de una función continua no negativa es positiva, excepto cuando el integrando se anula en todos los puntos; esto se deduce inmediatamente de la definición de integral.

d. Solución de la ecuación diferencial de Euler en casos especiales. Ejemplos

Para encontrar las soluciones u del problema del mínimo, debe encontrarse una solución particular de la ecuación diferencial de Euler para el intervalo $x_0 \leqq x \leqq x_1$, que tome los valores prescritos, y_0 y y_1, en los puntos extremos. Dado que la integral completa de la ecuación diferencial de Euler de segundo orden contiene dos constantes de integración, es de esperar que pueda determinarse una solución única, haciendo que estas dos constantes se ajusten a las condiciones de frontera; éstas proporcionan dos ecuaciones que las constantes de integración deben satisfacer.

En general, no es posible resolver la ecuación diferencial de Euler explícitamente en términos de funciones elementales o cuadraturas, y tiene uno que contentarse con demostrar que el problema variacional se reduce a un problema de ecuaciones diferenciales. Por otra parte, para casos especiales importantes y, de hecho, para la mayoría de los ejemplos clásicos, la ecuación se puede resolver por medio de cuadraturas.

El primer caso es aquél en el cual F no contiene explícitamente la derivada $y' = \phi'$: $F = F(\phi, x)$. Aquí, la ecuación diferencial de Euler es simplemente $F_u(u, x) = 0$; es decir, ya no es una ecuación diferencial en lo absoluto sino que constituye una definición implícita de la solución $y = u(x)$. Por supuesto, aquí no existe la cuestión de las constantes de integración o la posibilidad de satisfacer condiciones de frontera.

El segundo caso especial importante es aquel en el que F no contiene a la función $y = \phi(x)$ explícitamente: $F = F(y', x)$. Aquí la ecuación diferencial de Euler es $(d/dx)(F_{u'}) = 0$, la cual inmediatamente da

$$F_{u'} = c,$$

donde c es una constante arbitraria de integración. Puede usarse esta ecuación para expresar u' como una función $f(x, c)$ de x y c, y entonces se tiene la ecuación

$$u' = f(x, c),$$

de la cual, mediante una simple integración (cuadratura), se obtiene

$$u = \int_0^x f(\xi, c)\, d\xi + \alpha;$$

es decir, u queda expresada como una función de x y c, más una constante arbitaria de integración, α. Por lo tanto, en este caso la ecuación diferencial de Euler puede resolverse por completo mediante una cuadratura.

El tercer caso, que es el más importante en los ejemplos y las aplicaciones, es aquel en el que F no contiene explícitamente a la variable independiente x: $F = F(y, y')$. En este caso se tiene el importante teorema que sigue:

Si la variable independiente x no se presenta explícitamente en el problema variacional, entonces

$$E = F(u, u') - u' F_{u'}(u, u') = c \tag{11}$$

es una integral de la ecuación diferencial de Euler. Es decir, si se sustituye en esta expresión una solución u(x) de la ecuación diferencial de Euler para F, la expresión se vuelve una constante, independiente de x.

Esta proposición se verifica inmediatamente si se forma la derivada dE/dx. Se tiene

$$\frac{dE}{dx} = F_u u' + F_{u'} u'' - u'' F_{u'} - u'^2 F_{uu'} - u'u'' F_{u'u'},$$

o, por (7c),

$$\frac{dE}{dx} = u' L[u] = 0;$$

de donde, para toda solución u de la ecuación diferencial de Euler, se tiene $E = c$, donde c es una constante.

Si se imagina u' como calculada a partir de la ecuación $E = c$, digamos, $u' = f(u, c)$, una simple cuadratura aplicada a la ecuación

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{f(u, c)}$$

da $x = g(u, c) + \alpha$ (donde α es otra constante de integración); es decir, x se expresa como una función de u, c y α. Entonces, resolviendo para u se obtiene la función $u(x, c, \alpha)$. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial de Euler, que depende de dos constantes arbitrarias, se obtiene por medio de una cuadratura.

Ahora se aplicarán estos métodos para discutir un cierto número de ejemplos.

Nota general

Existe una clase general de ejemplos en los que F es de la forma

$$F = g(y)\sqrt{1 + y'^2},$$

donde $g(y)$ es una función que depende explícitamente sólo de y. Para las extremales $y = u$, la última regla da inmediatamente

$$g(u)\sqrt{1 + u'^2} - \frac{g(u)\,u'^2}{\sqrt{1 + u'^2}} = c,$$

o bien,

$$\frac{g(u)}{\sqrt{1 + u'^2}} = c;$$

de donde,

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\sqrt{(\{g(u)\}^2/c^2) - 1}},$$

e integrando se tiene la ecuación

$$x - b = \int \frac{du}{\sqrt{(\{g(u)\}^2/c^2) - 1}}, \tag{12}$$

donde b es otra constante de integración. Evaluando la integral de la derecha y resolviendo la ecuación para u se obtiene u como una función de x y de las dos constantes de integración c y b.[1]

La superficie de revolución de área mínima

En este caso, por (2b), p. 815 $g = y$. La integral (11) queda

$$x - b = \int \frac{du}{\sqrt{u^2/c^2 - 1}} = \operatorname{arc\,cosh}\frac{u}{c};$$

por lo tanto, el resultado es

$$y = u = c\cosh\frac{x - b}{c}.$$

[1]Por supuesto, es posible que no pueda resolverse para u en términos de funciones elementales pero, para todos los propósitos prácticos, estos procedimientos definen perfectamente a u.

Es decir, la solución del problema de encontrar una curva que al girar dé una superficie de revolución con área estacionaria es una *catenaria* (ver el Volumen I, p. 378).

Una condición necesaria para la ocurrencia de esa curva estacionaria es que los dos puntos dados A y B puedan unirse mediante una catenaria para la cual $y > 0$. La cuestión de si la catenaria en realidad representa un mínimo no se discutirá aquí.

La braquistócrona

Se obtiene otro ejemplo, tomando $g = 1/\sqrt{y}$. Este, de acuerdo con (2a), p. 814, es el problema de la *braquistócrona*. Por medio de las sustituciones $1/c^2 = k$, $u = k\tau$, $\tau = \operatorname{sen}^2\theta/2$, la integral (12),

$$\int \frac{du}{\sqrt{1/(uc^2) - 1}},$$

inmediatamente se transforma en

$$x - b = k\int\sqrt{\frac{\tau}{1-\tau}}\,d\tau = \frac{1}{2}k\int(1 - \cos\theta)\,d\theta,$$

de donde

$$x - b = \frac{1}{2}k(\theta - \operatorname{sen}\theta),$$

$$y = u = \frac{1}{2}k(1 - \cos\theta).$$

En consecuencia, la braquistócroma (ver el Volumen I, p. 329) es una cicloide común con sus cúspides sobre el eje x.

Ejercicios 7.2d

1. Encontrar las extremales de los integrandos siguientes:
   (a) $F = \sqrt{y(1 + y'^2)}$
   (b) $F = \sqrt{1 + y'^2}/y$
   (c) $F = y\sqrt{1 - y'^2}$
2. Encontrar las extremales para el integrando $F = x^n y'^2$, y probar que $n \geqq 1$, dos puntos que se encuentren en lados opuestos del eje y no pueden unirse por medio de una extremal.
3. Encontrar las extremales para el integrando $y^n y'^m$, donde n y m son enteros pares.

4. Encontrar las extremales para el integrando $F = ay'^2 + 2byy' + cy^2$, donde a, b, c, son funciones dadas, de x, continuamente diferenciables. Probar que la ecuación diferencial de Euler es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. ¿Por qué cuando b es constante, esta constante no entra en la ecuación diferencial en lo absoluto?
5. Demostrar que las extremales para el integrando $F = e^x \sqrt{1 + y'^2}$ están dadas por las ecuaciones $\operatorname{sen}(y - b) = e^{-(x-a)}$ y $y = b$, donde a, b son constantes. Discutir la forma de estas curvas e investigar dónde deben estar situados los dos puntos A y B para que puedan unirse mediante un arco extremal de la forma $y = f(x)$.
6. Para el caso en que F no contiene a la derivada y', deducir la condición de Euler $F_y = 0$ mediante un método elemental.
7. Encontrar una función que dé el mínimo absoluto de

$$I\{y\} = \int_0^1 y'^2\, dx$$

con las condiciones de frontera

(a) $y(0) = y(1) = 0$,

(b) $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

8. Encontrar las extremales para $\int \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta$, es decir, las trayectorias de longitud mínima en coordenadas polares.

e. Anulación idéntica de la expresión de Euler

La ecuación diferencial de Euler (7c), p. 820, para $F(x,y,y')$ puede degenerar en una identidad que nada nos diga, es decir, en una relación que se satisfaga por toda función admisible $y = \phi(x)$. En otras palabras, la integral correspondiente puede ser estacionaria para cualquier función admisible $y = \phi(x)$. Para que esto ocurra, la expresión de Euler

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y''$$

deberá anularse en todo punto x del intervalo, sin importar qué función $y = \phi(x)$ se sustituya en ella. Sin embargo, siempre puede encontrarse una curva para la cual $y = \phi$, $y' = \phi'$, y $y'' = \phi''$ tengan valores arbitrarios prescritos para un valor prescrito de x. Por lo tanto, la expresión de Euler debe anularse para todo conjunto de números x, y, y', y''. Se concluye que el coeficiente de y'' (es decir, $F_{y'y'}$), deberá anularse idénticamente. Por consiguiente, F debe ser una función lineal de y', digamos, $F = ay' + b$, donde a y b son funciones de x y y únicamente. Si se sustituye esto en la parte restante de la ecuación diferencial,

$$F_{yy'}y' + F_{xy'} - F_y = 0,$$

de inmediato se deduce que

$$0 = a_y y' + a_x - a_y y' - b_y$$

o que

$$a_x - b_y$$

debe anularse idénticamente en x y y. En otras palabras, la expresión de Euler se anula idénticamente si, y sólo si, la integral es de la forma

$$I = \int \{a(x, y)\, y' + b(x, y)\}\, dx = \int a\, dy + b\, dx,$$

donde a y b satisfacen la condición de integrabilidad que ya se ha encontrado en la p. 135, es decir, $a\, dy + b\, dx$ es una diferencial exacta.

7.3 Generalizaciones

a. Integrales con más de una función argumento

El problema de encontrar los valores extremos (valores estacionarios) de una integral puede extenderse al caso en que esta integral no depende de una sola función argumento sino de un cierto número de tales funciones $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)$.

El problema típico de esta clase puede enunciarse como sigue: sea $F(x, \phi_1, \ldots, \phi_n, \phi_1', \ldots, \phi_n')$ una función de los $(2n + 1)$ argumentos $x, \phi_1, \ldots, \phi_n'$, la cual es continua y tiene derivadas continuas hasta, e incluyendo, las de segundo orden en la región bajo consideración. Si se remplazan $y_i = \phi_i$ por una función de x con primera y segunda derivadas continuas y ϕ_i' por su derivada, F se convierte en una función de la variable x únicamente, y la integral

$$(13) \qquad I\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi_1, \ldots, \phi_n, \phi_1', \ldots, \phi_n')\, dx$$

sobre un intervalo dado $x_0 \leqq x \leqq x_1$ tiene un valor definido, determinado por la elección de estas funciones.

En la comparación con el valor extremo, se consideran como admisibles todas las funciones $\phi_i(x)$ que satisfacen las condiciones de continuidad antes mencionadas y para las cuales los valores de frontera $\phi_i(x_0)$ y $\phi_i(x_1)$ tienen valores prefijados. En otras palabras, se

consideran las curvas $y_i = \phi_i(x)$ que unen dos puntos dados A y B en el espacio $(n+1)$ dimensional con coordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_n, x$. El problema variacional ahora nos pide encontrar, entre todos estos sistemas de funciones $\phi_i(x)$, uno $[y_i = \phi_i(x) = u_i(x)]$ para el cual la integral (13) tenga un valor extremo (un máximo o un mínimo).

Una vez más, no se discutirá la naturaleza real del valor extremo, sino que nos restringiremos a inquirir para qué sistemas de funciones argumento $\phi_i(x) = u_i(x)$ la integral es estacionaria.

El concepto de valor estacionario se define exactamente en la misma forma que se hizo en la p. 819. Se incluye el sistema de funciones $u_i(x)$ en una familia uniparamétrica de funciones que dependen del parámetro ε, en la forma siguiente: sean $\eta_1(x), \ldots, \eta_n(x)$ n funciones elegidas arbitrariamente que se anulan para $x = x_0$ y $x = x_1$, son continuas en el intervalo y poseen primera y segunda derivadas continuas allí. Se incluyen las $u_i(x)$ en la familia de funciones $y_i = \phi_i(x) = u_i(x) + \varepsilon\eta_i(x)$.

El término $\varepsilon\eta_i(x) = \delta u_i$ se llama *variación* de la función u_i. Si se sustituyen las expresiones para ϕ_i en $I\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$, esta integral se transforma en

$$G(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u_1 + \varepsilon\eta_1, \ldots, u_n + \varepsilon\eta_n, u_1' + \varepsilon\eta_1', \ldots, u_n' + \varepsilon\eta_n')\, dx,$$

la cual es una función del parámetro ε. Una condición necesaria para que pueda haber una valor extremo cuando $\phi_i = u_i$ (es decir, cuando $\varepsilon = 0$) es

$$G'(0) = 0.$$

Exactamente como para el caso de una función independiente, se dice que la integral I tiene un valor estacionario para $\phi_i = u_i$ si se cumple la ecuación $G'(0) = 0$, o bien, se cumple

$$\delta I = \varepsilon G'(0) = 0$$

sin importar cómo se elijan las funciones η_i sujetas a las condiciones enunciadas con anterioridad. En otras palabras, *el carácter estacionario de la integral para un sistema fijo de funciones* $u_i(x)$ y *la anulación de la primera variación* δI significan lo mismo.

Aún se tiene el problema de establecer las condiciones para el carácter estacionario de la integral que no involucren a las variaciones arbitrarias η_i. Esto no requiere nuevas ideas. Se procede como

sigue: primero se toman $\eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n$ como idénticamente cero (es decir, no se deja variar a las funciones $u_2, \ldots, u_n$. Así, sólo se considera la primera función $\phi_1(x)$ como variable y, entonces, la condición $G'(0) = 0$, por la p. 820, es equivalente a la ecuación diferencial de Euler

$$F_{u_1} - \frac{d}{dx} F_{u_1'} = 0.$$

Como puede seleccionarse cualquiera de las funciones $u_i(x)$ en la misma forma, se obtiene el resultado siguiente:

Una condición necesaria y suficiente para que la integral (13) *pueda ser estacionaria es que las n funciones* $u_i(x)$ *satisfagan el sistema de ecuaciones de Euler*

$$\text{(13a)} \qquad F_{u_i} - \frac{d}{dx} F_{u_i'} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Este es un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden para las n funciones $u_i(x)$. Se dice que todas las soluciones de este sistema de ecuaciones diferenciales son las *extremales* del problema variacional. Así, el problema de encontrar los valores estacionarios de la integral se reduce al problema de resolver estas ecuaciones diferenciales y adaptar la solución general a las condiciones dadas en la frontera.[1]

b. Ejemplos

La posibilidad de dar una solución general del sistema de ecuaciones diferenciales de Euler es incluso más remota que en el caso de la Sección 7.2. Sólo en casos muy especiales pueden encontrarse todas las extremales explícitamente. Aquí, frecuentemente resulta útil el teorema siguiente, análogo al caso particular de la fórmula (11) de la pág. 826.

---

[1]Aplicando el Lema II (Sección 7.2, p. 822) es posible probar que deben cumplirse estas ecuaciones diferenciales bajo la hipótesis general de que las funciones admisibles simplemente tengan primeras derivadas seccionalmente continuas. Sin embargo, si se desea concentrarse en el formalismo del tema, resulta más conveniente incluir la continuidad de las segundas derivadas en las condiciones de admisibilidad de las funciones $\phi_i(x)$. Entonces pueden escribirse las expresiones $d/dx\ F_{u_i'}$ en la forma

$$\text{(13b)} \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{u_k' u_i'} u_k'' + \sum_{k=1}^{n} F_{u_k u_i'} u_k' + F_{x u_i'}.$$

Si la función F no contiene a la variable x explícitamente, es decir, $F = F(\phi_1, \ldots, \phi_n, \phi_1', \ldots, \phi_n')$, *entonces la expresión*

$$E = F(u_1, \ldots, u_n, u_1', \ldots, u_n') - \sum_{i=1}^{n} u_i' F_{u_i'}$$

es una integral del sistema de Euler de ecuaciones diferenciales. Es decir, si se considera cualquier sistema de soluciones $u_i(x)$ de las ecuaciones de Euler (13a), se tiene

$$E = F - \sum u_i' F_{u_i'} = \text{constante} = c, \tag{13c}$$

donde, por supuesto, el valor de esta constante depende del sistema de soluciones que se sustituya.

La demostración sigue los mismos lineamientos de la p. 826; se deriva el primer miembro de la expresión con respecto a x y, aplicando (13b), se verifica que el resultado es cero.

Un ejemplo trivial es el problema de encontrar la distancia más corta entre dos puntos en el espacio tridimensional. Aquí se tienen que determinar dos funciones $y = y(x)$, $z = z(x)$ tales que la integral

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

tenga el menor valor posible, habiéndose prescrito los valores de $y(x)$ y $z(x)$ en los puntos extremos del intervalo. Las ecuaciones diferenciales de Euler (13a) dan

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0,$$

de donde inmediatamente se deduce que las derivadas $y'(x)$ y $z'(x)$ son constantes; de aquí que las extremales deben ser rectas.

Un tanto menos trivial es el problema de la *braquistócrona en tres dimensiones.* (Nuevamente, se toma la gravedad como si actuara en la dirección del eje y positivo.) Aquí tienen que determinarse $y = y(x), z = z(x)$ en tal forma que la integral

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2 + z'^2}{y}}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y', z')\, dx$$

sea estacionaria. Una de las ecuaciones diferenciales de Euler da

$$\frac{z'}{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = a.$$

Además, de (13c) se tiene que

$$F - y' F_{y'} - z' F_{z'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = b,$$

donde a y b son constantes. Dividiendo se deduce que $z' = a/b = k$ es, del mismo modo, constante. Por lo tanto, la curva para la cual la integral es estacionaria debe estar en un plano $z = kx + h$. Entonces, de la ecuación adicional

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 + y'^2}} = b,$$

se deduce, como resulta obvio de lo expuesto en la p. 828, que esta curva debe ser, una vez más, una cicloide.

Ejercicios 7.3b

1. Escríbanse las ecuaciones diferenciales para la trayectoria de un rayo de luz en tres dimensiones, en el caso en que (usando coordenadas esféricas r, θ, ϕ la velocidad de la luz es una función de r (ver el Ejercicio 2, p. 743). Demostrar que los rayos son curvas planas.
2. Demostrar que las geodésicas (las curvas de menor longitud que unen dos puntos) sobre una esfera son círculos máximos.
3. Encontrar las geodésicas sobre un cono recto circular.
4. Demostrar que la trayectoria que minimiza la distancia entre dos curvas cerradas suaves que no se cortan es su recta normal común.
5. Demostrar que la trayectoria que da el tiempo mínimo de caída desde un punto dado hasta una curva dada es la cicloide que corta a la curva perpendicularmente.
6. Probar que las extremales de $\int F(x, y) \sqrt{1 + y'^2}\, dx$, con puntos extremos libremente movibles sobre dos curvas, cortan a esas curvas ortogonalmente.

c. Principio de Hamilton. Ecuaciones de Lagrange

El sistema de Euler de ecuaciones diferenciales tiene una relación muy importante con muchas ramas de las matemáticas aplicadas, especialmente la dinámica. En particular, el movimiento de un sistema mecánico que consiste de un número finito de partículas puede expresarse mediante la condición de que una cierta expresión, la llamada integral de Hamilton, sea estacionaria. Aquí se explicará brevemente esta relación.

Un sistema mecánico tiene n grados de libertad si su posición queda determinada por medio de las n coordenadas independientes $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Si, por ejemplo, el sistema consiste de una sola partícula, se tiene $n = 3$ ya que como q_1, q_2, q_3 pueden tomarse las tres coordenadas rectangulares o las tres coordenadas esféricas. Una vez más, si el sistema consiste de dos partículas que se mantienen separadas una distancia unitaria por medio de una conexión rígida — que se supone sin masa — entonces $n = 5$, ya que para las coordenadas q_i pueden tomarse las tres coordenadas rectangulares de una de las partículas y otras dos coordenadas que determinen la dirección de la recta que une a las dos partículas.

Un sistema mecánico puede describirse con suficiente generalidad por medio de dos funciones, la *energía cinética* y la *energía potencial.* Si el sistema está en movimiento, las coordenadas q_i serán funciones $q_i(t)$ del tiempo t, siendo las *componentes de la velocidad* $\dot{q}_i = dq_i/dt$. La energía cinética asociada con el sistema mecánico es una función de la forma

$$T(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = \sum_{i,k=1} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \qquad (a_{ik} = a_{ki}). \tag{14a}$$

Por lo tanto, la energía cinética es una expresión cuadrática homogénea en las componentes de la velocidad, tomándose los coeficientes a_{ik} como funciones conocidas, que no dependen explícitamente del tiempo, de las propias coordenadas $q_1, \ldots, q_n$.[1]

Además de la energía cinética, se supone que el sistema dinámico está caracterizado por otra función, la energía potencial $U(q_1, \ldots, q_n)$, la cual depende de las coordenadas de posición q_i únicamente y no de las velocidades o del tiempo.[2]

---

[1]Esta expresión para la energía cinética T se obtiene considerando las coordenadas rectangulares individuales de las partículas del sistema, expresadas como funciones de las coordenadas $q_1, \ldots, q_n$. Entonces las componentes rectangulares de la velocidad de las partículas individuales pueden expresarse como funciones lineales homogéneas de las $\dot{q}_i'$; a partir de éstas se forma la expresión elemental para la energía cinética, a saber, *la semisuma de los productos de las masas individuales* y los cuadrados de las velocidades correspondientes.

[2] Nos restringiremos aquí a los sistemas mecánicos en los que las fuerzas que actúan son conservativas e independientes del tiempo. Tal y como se demuestra en los libros de texto sobre dinámica, la energía potencial determina las fuerzas externas que actúan sobre el sistema (ver la p. 728 para el caso de una sola partícula). Al llevar el sistema de una posición hacia otra, se efectúa trabajo mecánico; éste es igual a la diferencia entre los correspondientes valores U y no depende del movimiento particular desde una de las posiciones hacia la otra.

El principio de Hamilton afirma que *el movimiento de un sistema dinámico en el intervalo de tiempo $t_0 \leqq t \leqq t_1$, desde una posición inicial dada hasta una posición final también dada, es tal que, para este movimiento, la integral*

$$H\{q_1, \ldots, q_n\} = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt \tag{14b}$$

es estacionaria, en la clase de todas las funciones continuas $q_i(t)$ que tienen derivadas continuas hasta, e incluyendo, las de segunda orden y que tienen los valores de frontera prescritos para $t = t_0$ y $t = t_1$

Este principio de Hamilton es un principio fundamental de la dinámica. Contiene en forma condensada las leyes de la dinámica. Cuando se aplican al principio de Hamilton, las ecuaciones de Euler (13a) dan las *ecuaciones de Lagrange,*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{14c}$$

que son las ecuaciones fundamentales de la dinámica teórica.

Aquí sólo se hará una deducción notable, a saber, la ley de *conservación de la energía.*

Dado que el integrando en la integral de Hamilton no depende explícitamente de la variable independiente t, para la solución $q_i(t)$ de las ecuaciones diferenciales de la dinámica la expresión

$$T - U - \sum \dot{q}_i \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{q}_i}$$

debe ser constante ver (13c). Ya que U no depende de las $\dot{q}_i$, y T es una función cuadrática homogénea en ellas (ver la p. 151),

$$\sum \dot{q}_i \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{q}_i} = \sum \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

De aquí que

$$T + U = \text{constante};$$

es decir, *durante el movimiento, la suma de la energía cinética y la energía potencial no varia con el tiempo.*

d. Integrales que involucran derivadas superiores

Pueden usarse métodos análogos para atacar el problema de los valores extremos de las integrales en las que el integrando F no sólo contiene la función requerida $y = \phi$ y su derivada ϕ', sino que también comprende derivadas superiores. Por ejemplo, supóngase que se desean encontrar los valores extremos de una integral de la forma

$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi, \phi', \phi'')\, dx, \tag{15a}$$

donde, en la comparación, aquellas funciones $y = \phi(x)$ son admisibles cuando, junto con sus primeras derivadas, tienen valores prescritos en los puntos extremos del intervalo y tienen derivadas continuas hasta, e incluyendo, las de cuarto orden.

Con el fin de encontrar las condiciones necesarias para la existencia de un valor extremo, supóngase nuevamente que $y = u(x)$ es la solución deseada. Se incluye $u(x)$ en una familia de funciones $y = \phi(x) = u(x) + \varepsilon\eta(x)$, donde ε es un parámetro arbitrario y $\eta(x)$ una función elegida arbitrariamente con derivadas continuas hasta, e incluyendo, la de cuarto orden, que se anula junto con sus primeras derivadas en los puntos extremos. Entonces la integral toma la forma $G(\varepsilon)$, y la condición necesaria

$$G'(0) = 0 \tag{15b}$$

debe satisfacerse para todas las elecciones de la función $\eta(x)$. Procediendo en una forma análoga a la de la p. 744, se deriva bajo el signo integral y así se obtiene la condición anterior en la forma

$$\int_{x_0}^{x_1} (\eta F_u + \eta' F_{u'} + \eta'' F_{u''})\, dx = 0, \tag{15c}$$

que debe satisfacerse si se sustituye u por $\phi(x)$. Integrando una vez por partes, el término en $\eta'(x)$ se reduce a uno en η, e integrando dos veces por partes el término en $\eta''(x)$ se reduce a uno en η; tomando en consideración las condiciones de frontera, fácilmente se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta\left(F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{u''}\right) dx = 0. \tag{15d}$$

De aquí que la condición necesaria para la existencia de un valor extremo (es decir, para que la integral pueda ser estacionaria) es la ecuación diferencial de Euler

$$L[u] = F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{u''} = 0. \tag{15e}$$

El lector puede verificar por su cuenta que ésta es una ecuación diferencial de cuarto orden.[1]

e. Varias variables independientes

El método general para encontrar las condiciones necesarias para la existencia de un valor extremo puede aplicarse con igual propiedad cuando la integral ya no es una integral simple sino una integral múltiple. Sea D una región dada, limitada por una curva Γ en el plano x, y. Supóngase que D y Γ son lo suficientemente regulares para permitir la aplicación de la regla para la integración por partes (p. 620). Sea $F(x, y, \phi, \phi_x, \phi_y)$ una función continua y continuamente diferenciable por dos veces con respecto a sus cinco argumentos. Si en F se sustituye ϕ por una función $\phi(x, y)$ que tenga derivadas continuas hasta, e incluyendo, la de segundo orden en la región D y tenga valores de frontera prescritos sobre Γ, y si se remplazan ϕ_x y ϕ_y por las derivadas parciales de ϕ, F se transforma en una función de x y de y y la integral

$$I\{\phi\} = \iint_D F(x, y, \phi, \phi_x, \phi_y)\, dx\, dy \tag{16a}$$

tiene un valor que depende de la elección de ϕ. El problema es encontrar una función $\phi = u(x, y)$ para la cual este valor sea un extremo.

Para encontrar las condiciones necesarias se usa nuevamente el método antiguo. Se elige una función $\eta(x, y)$ que se anule sobre la frontera Γ; que tenga derivadas continuas hasta, e incluyendo, la de segundo orden; y que, por lo demás, sea arbitraria. Supóngase que u es la función requerida y sustitúyase $\phi = u + \varepsilon\eta$ en la integral, donde ε es un parámetro arbitrario. Una vez más, la integral se convierte en una función $G(\varepsilon)$, y una condición necesaria para la existencia de un valor extremo es

[1]Al deducir (15e) a partir de (15d) se tiene que restringir la η mencionada en el Lema I (p. 821) a funciones de la clase C^4 para las cuales η y η' se anulen en los puntos extremos. Resulta claro, de la demostración del lema dada en la p. 823, que la conclusión es válida bajo estas condiciones más restrictivas.

$$G'(0) = 0.$$

Como antes, esta condición toma la forma

(16b) $$\iint_D (\eta F_u + \eta_x F_{u_x} + \eta_y F_{u_y})\, dx\, dy = 0.$$

Para eliminar los términos en η_x y η_y bajo el signo integral, se integra por partes uno de los términos con respecto a x y el otro con respecto a y. Puesto que η se anula sobre Γ, los valores de frontera sobre Γ se cancelan y se tiene

(16c) $$\iint \eta \left\{F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y}\right\} dx\, dy = 0.$$

El Lema I (p. 821) puede extenderse de inmediato a dimensiones superiores a la primera y en seguida se obtiene la *ecuación diferencial parcial de Euler de segundo orden*

(16d) $$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0.$$

Ejemplos

1. $F = \phi_x{}^2 + \phi_y{}^2$. Si se omite el factor 2 la ecuación diferencial de Euler queda

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Es decir, se ha obtenido la ecuación de Laplace a partir de un problema de variaciones.

2. Superficies mínimas. El *problema de Plateau* es éste: encontrar, sobre una región D, una superficie $z = f(x, y)$ que pase por una curva prescrita en el espacio, cuya proyección sea Γ y cuya área

$$\iint_D \sqrt{1 + \phi_x{}^2 + \phi_y{}^2}\, dx\, dy$$

sea un mínimo.

Aquí la ecuación diferencial de Euler es

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x{}^2 + u_y{}^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x{}^2 + u_y{}^2}} = 0$$

o, en forma desarrollada,

$$u_{xx}(1 + u_y^2) - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}(1 + u_x^2) = 0.$$

Esta es la célebre ecuación diferencial de las superficies mínimas, que se ha tratado con detalle en otra parte.[1]

7.4 Problemas en que existen condiciones subsidiarias. Multiplicadores de Lagrange

Al discutir los valores extremos ordinarios para funciones de varias variables en el Capítulo 3 (p. 384), se consideró el caso en que estas variables se sujetan a ciertas condiciones subsidiarias. En este caso, el método de los multiplicadores indeterminados condujo a una expresión particularmente clara para las condicones bajo las cuales la función puede tener un valor estacionario. Un método análogo es incluso más importante en el cálculo de variaciones. Aquí sólo se estudiarán brevemente los casos más sencillos.

a. Condiciones subsidiarias ordinarias

Un caso típico es el de encontrar una curva $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, donde $t_0 \leqq t \leqq t_1$, en el espacio tridimensional, expresada en términos del parámetro t, sujeta a la condición subsidiaria de que la curva se encuentre sobre una superficie dada $G(x, y, z) = 0$ y pase por dos puntos dados A y B de esa superficie. El problema entonces es hacer que una integral de la forma

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\, dt \tag{17}$$

sea estacionaria, mediante una elección apropiada de las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, sujetas a la condición subsidiaria $G(x, y, z) = 0$ y a las condiciones de frontera y de continuidad usuales.

Este problema puede reducirse inmediatamente a los casos estudiados en la p. 830. Supóngase que $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son las funciones requeridas. Supóngase además que sobre la porción de la superficie sobre la cual debe estar la curva que se busca z puede expresarse en la forma $z = g(x,y)$; esto es posible si G_z es diferente de cero sobre esta porción de la superficie. Si se supone que sobre la superficie en

[1] R. Courant, *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces,* Interscience: Nueva York, 1950.

cuestión no se cumplen simultáneamente las tres ecuaciones $G_x = 0$, $G_y = 0$, $G_z = 0$ y si nos restringimos a una porción lo suficientemente pequeña de la superficie, sin pérdida de generalidad puede suponerse que $G_z \neq 0$. Sustituyendo $z = g(x, y)$ y $\dot{z} = g_x\dot{x} + g_y\dot{y}$ bajo el signo integral, se obtiene un problema en el que $x(t)$ y $y(t)$ son funciones independientes entre sí. Así, inmediatamente pueden aplicarse los resultados de la p. 832 y escribirse las condiciones para que la integral I sea estacionaria, aplicando las ecuaciones (13a) al integrando

$$F(x, y, g(x, y), \dot{x}, \dot{y}, \dot{x}g_x + \dot{y}g_y) = H(x, y, \dot{x}, \dot{y}).$$

Entonces se tienen las dos ecuaciones

$$\frac{d}{dt}H_{\dot{x}} - H_x = \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} - F_x + \frac{d}{dt}(F_{\dot{z}}g_x) - F_z g_x - F_{\dot{z}}\frac{\partial \dot{z}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}H_{\dot{y}} - H_y = \frac{d}{dt}F_{\dot{y}} - F_y + \frac{d}{dt}(F_{\dot{z}}g_y) - F_z g_y - F_{\dot{z}}\frac{\partial \dot{z}}{\partial y} = 0.$$

Pero

$$\frac{d}{dt}g_x = \frac{\partial \dot{z}}{\partial x}, \qquad \frac{d}{dt}g_y = \frac{\partial \dot{z}}{\partial y},$$

lo que se ve inmediatamente al derivar. De donde,

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{x}} - F_x + g_x\left(\frac{d}{dt}F_{\dot{z}} - F_z\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{y}} - F_y + g_y\left(\frac{d}{dt}F_{\dot{z}} - F_z\right) = 0.$$

Si, por brevedad, se escribe

(18a) $$\frac{d}{dt}F_{\dot{z}} - F_z = \lambda G_z,$$

con un multiplicador apropiado $\lambda(t)$ y se usan las relaciones (p. 275) $g_x = -G_x/G_z$, $g_y = -G_y/G_z$, se obtienen las dos ecuaciones adicionales

(18b) $$\frac{d}{dt}F_{\dot{x}} - F_x = \lambda G_x,$$

(18c) $$\frac{d}{dt}F_{\dot{y}} - F_y = \lambda G_y.$$

Así se tiene la siguiente condición para que la integral pueda ser estacionaria: si se supone que G_x, G_y, G_z no se anulan simultáneamente sobre la superficie $G = 0$, la condición necesaria para tener un valor extremo es la existencia de un multiplicador $\lambda(t)$ tal que se satisfagan simultáneamente las tres ecuaciones (18a, b, c), además de la condición subsidiaria $G(x, y, z) = 0$. Es decir, se tienen cuatro ecuaciones simétricas que determinan a las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ y al multiplicador λ.

El caso especial más importante lo constituye el problema de encontrar la línea más corta que une dos puntos A y B de una superficie dada $G = 0$, suponiendo que el gradiente de G no se anula. Aquí

$$F = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

y las ecuaciones diferenciales de Euler son

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \lambda G_x,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \lambda G_y,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \lambda G_z.$$

Estas ecuaciones son invariantes con respecto a la introducción de un nuevo parámetro t. Es decir, como el lector puede verificar con facilidad, conservan la misma forma si se remplaza t por cualquier otro parámetro $\tau = \tau(t)$, siempre que la transformación sea biunívoca, reversible y continuamente diferenciable. Si se toma la longitud de arco, s, como el nuevo parámetro, de modo que $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1$, las ecuaciones diferenciales anteriores toman la forma

$$(19) \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \lambda G_x, \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = \lambda G_y, \qquad \frac{d^2z}{ds^2} = \lambda G_z.$$

El significado geométrico de estas ecuaciones diferenciales es que los vectores normales principales[1] de las extremales del problema son ortogonales a la superficie $G = 0$. A estas curvas se les da el nombre de *geodésicas* de la superficie. Entonces, la distancia más corta entre dos puntos de una superficie está dada necesariamente por un arco de geodésica.

[1] Es decir, los vectores $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$; ver la p. 257.

Ejercicios 7.4a

1. Demostrar que también se obtienen las misma geodésicas para las trayectorias de una partícula restringida a moverse sobre la superficie dada, $G = 0$, no sujeta a fuerzas externas. En este caso, la energía potencial U se anula y el lector puede aplicar el principio de Hamiltón (p. 836).
2. Sea C una curva sobre una superficie dada $G(x, y, z) = 0$. En cada punto de C tómese un segmento geodésico perpendicular, de longitud y orientación relativa a C fijas. El extremo libre del segmento geodésico genera una curva C'. Demostrar que C', también es perpendicualr al segmento geodésico.

b. Otros tipos de condiciones subsidiarias

En el problema discutido anteriormente se pudo eliminar la condición subsidiaria resolviendo la ecuación que determina a la condición subsidiaria y reduciendo así el problema directamente al tipo de problema discutido con anterioridad. Sin embargo, con los otros tipos de condiciones subsidiarias que aparecen con frecuencia no es posible hacer esto. El caso más importante de este tipo es el de las condiciones subsidiarias *isoperimétricas*. El siguiente es un ejemplo típico: con las condiciones de frontera y de continuidad previas debe hacerse estacionaria la integral

$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi, \phi')\, dx, \tag{20a}$$

sujetándose la función argumento $\phi(x)$ a la condición subsidiaria adicional

$$H\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} G(x, \phi, \phi')\, dx = \text{una constante } c \text{ dada} \tag{20b}$$

El caso particular $F = \phi$, $G = \sqrt{1 + \phi'^2}$ es el problema isoperimétrico clásico.

Este tipo de problema no puede ser atacado por el método anterior de formar la función "variada" $\phi = u + \varepsilon\eta$ por medio de una función arbitraria $\eta(x)$ que sólo se anule sobre la frontera, porque, en general, estas funciones no satisfacen la condición subsidiaria en una vecindad de $\varepsilon = 0$, excepto en $\varepsilon = 0$. Sin embargo, puede llegarse al resultado deseado mediante un método semejante al que se usó en el problema original, introduciendo, en lugar de una función η y

un parámetro ε, dos funciones, $\eta_1(x)$ y $\eta_2(x)$, que se anulen sobre la frontera, y dos paramétros, ε_1 y ε_2. Suponiendo que $\phi = u$ es la función requerida, se forma entonces la función variada

$$\phi = u + \varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2\eta_2.$$

Si se introduce esta función en las dos integrales, el problema se reduce a la deducción de la condición necesaria para que el carácter de la integral sea estacionario

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u + \varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2\eta_2, u' + \varepsilon_1\eta_1' + \varepsilon_2\eta_2')\, dx = K(\varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

sujeta a la condición subsidiaria

$$H = \int_{x_0}^{x_1} G(x, u + \varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2\eta_2, u' + \varepsilon_1\eta'_1 + \varepsilon_2\eta_2')\, dx = M(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = c;$$

la función $K(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ debe ser estacionaria para $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$, donde ε_1, ε_2 satisfacen la condición subsidiaria

$$M(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = c.$$

Una sencilla discusión, basada en los resultados previos para los valores extremos con condiciones subsidiarias y, en otros aspectos, siguiendo los mismos lineamientos descritos en la p. 820, conduce a este resultado:

El carácter estacionario de la integral es equivalente a la existencia de un multiplicador constante, λ, tal que se satisfagan la ecuación $H = c$ y la ecuación diferencial de Euler

$$\frac{d}{dx}(F_{u'} + \lambda G_{u'}) - (F_u + \lambda G_u) = 0.$$

Esto sólo admite una excepción cuando la función u satisface la ecuación

$$\frac{d}{dx} G_{u'} - G_u = 0.$$

Los detalles de la demostración se dejan al lector, quien puede consultar la literatura acerca del tema.[1]

---

[1]Ver, por ejemplo, M. R. Hestenes, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. John Wiley and Sons, Nueva York, 1966. R. Courant y D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics,* Interscience Publishers, Nueva York, 1953, Vol. I, Capítulo IV.

Ejercicios 7.4b

1. Demostrar que las geodésicas sobre un cilindro son hélices.
2. Encontrar las ecuaciones de Euler en los casos que siguen:

   (a) $F = \sqrt{1 + y'^2} + yg(x)$

   (b) $F = \dfrac{y''^2}{(1 + y'^2)^3} + yg(x)$

   (c) $F = y''^2 - y'^2 + y^2$

   (d) $F = \sqrt[4]{1 + y'^2}$

3. Si existen dos variables independientes, encontrar las ecuaciones de Euler en los casos siguientes:

   (a) $F = a\phi_x{}^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y{}^2 + \phi^2 d$

   (b) $F = (\phi_{xx} + \phi_{yy})^2 = (\Delta\phi)^2$

   (c) $F = (\Delta\phi)^2 + (\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}{}^2)$.

4. Encontrar las ecuaciones de Euler para el problema isoperimétrico en el que

$$\int_{x_0}^{x_1} (au'^2 + 2buu' + cu^2)\, dx$$

   debe ser estacionaria, sujeta a la condición

$$\int_{x_0}^{x_1} u^2\, dx = 1.$$

5. Sea $f(x)$ una función dada. La integral

$$I(\phi) = \int_0^1 f(x)\phi(x)\, dx$$

   debe hacerse un máximo, sujeta a la condición integral

$$H(\phi) = \int_0^1 \phi^2\, dx = K^2,$$

   donde k es una constante dada.

   (a) Encontrar la solución $u(x)$ a partir de la ecuación de Euler.

   (b) Probar, aplicando la desigualdad de Cauchy, que la solución encontrada en (a) da el máximo absoluto para I.

6. Usar el método del multiplicador de Lagrange para probar que la solución del problema isoperimétrico clásico es un círculo.
7. Se estira un hilo de densidad uniforme y longitud dada, entre dos puntos A y B. Si la gravedad actúa en la dirección del eje y negativo, la posición de equilibrio del hilo es aquélla en la que el centro de gravedad tiene la posición más baja posible. En consecuencia, es cuestión de hacer mínima una integral de la forma $\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx$ sujeta a la condición subsidiaria de que $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ tiene un valor constante dado. Demostrar que el hilo colgará formando una catenaria.

8. Supóngase que $y = u(x)$ proporciona el menor valor para la integral $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$, entre todas las funciones continuamente diferenciables $y(x)$ con valores de frontera prescritos $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. Probar que $u(x)$ satisface la desigualdad $F_{y'y'}(x, u(x), u'(x)) \geqq 0$ (condición de Legendre) para toda x en el intervalo $x_0 \leqq x \leqq x_1$.
9. Sean (x_0, y_0) y (x_1, y_1) puntos que se encuentran por encima del eje x. Encontrar las extremales para el área debajo de la gráfica de una función que pasa por los dos puntos, sujeta a la condición de que la trayectoria entre los dos puntos tiene una longitud fija.

CAPITULO 8

Funciones de una variable compleja

En la Sección 7.7 del Volumen I se trató brevemente la teoría de las funciones de una variable compleja y se vio que esta teoría arroja nueva luz sobre la estructura de las funciones de una variable real. Aquí se dará una breve, pero más sistemática, descripción de los elementos de esa teoría.

8.1 Funciones complejas representadas por series de potencias

a. Límites y series infinitas con términos complejos

Empezaremos con el concepto elemental de un número complejo, $z = x + iy$ (ver el Volumen I, p. 104), formado a partir de la unidad imaginaria, i, y dos números reales cualesquiera, x, y. Se opera con estos números complejos precisamente como con los números reales, con la regla adicional de que i^2 siempre puede ser remplazado por -1. Se representan x, la *parte real,* y y, la *parte imaginaria* de z, mediante coordenadas rectangulares en un plano x, y o plano complejo z. El número $\bar{z} = x - iy$ se llama número complejo *conjugado* de z. Se introducen las coordenadas polares (r, θ) por medio de las relaciones $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, a θ se le da el nombre de *argumento* (o *amplitud*) del número complejo y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |z|$$

es su *valor absoluto* (o *módulo*). Recuérdese que

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|.$$

Inmediatamente se establece la llamada *desigualdad del triángulo* satisfecha por los números complejos z_1, z_2, y $z_1 + z_2$,

$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|,$$

y la desigualdad adicional

$$|u_1| - |u_2| \leqq |u_1 - u_2|,$$

que se deduce inmediatamente de aquélla si se pone $z_1 = u_1 - u_2$, $z_2 = u_2$.

La desigualdad del triángulo puede interpretarse geométricamente si se representan los números complejos z_1, z_2 por medio de vectores en el plano x, y, con las componentes x_1, y_1 y x_2, y_2, respectivamente. Entonces, el vector que representa la suma $z_1 + z_2$ se obtiene simplemente por medio de la adición vectorial de los dos primeros vectores. Las longitudes de los lados del triángulo formado mediante esta adición (ver la Fig. 8.1) son

$$|z_1|, |z_2|, |z_1 + z_2|.$$

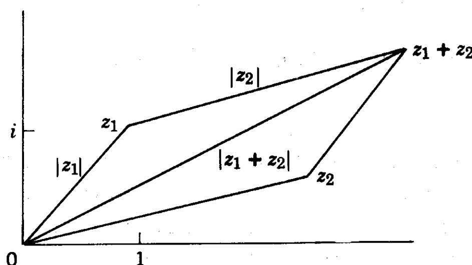


Figura 8.1 La desigualdad del triángulo para los números complejos.

Así, la desigualdad del triángulo expresa el hecho de que cualquiera de los lados de un triángulo es menor que la suma de los otros dos.

Ahora se considerará un concepto esencialmente nuevo: el de *límite de una sucesión de números complejos*. Empecemos con la definición siguiente: una sucesión de números complejos z_n tiende a un límite z siempre que $|z_n - z|$ tienda a cero. Por supuesto, esto significa que tanto la parte real como la parte imaginaria de $z_n - z$ tienden a cero. Se concluye entonces que es aplicable el criterio de Cauchy: la condición necesaria y suficiente para que el límite, z, de una sucesión z_n exista es que

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} |z_n - z_m| = 0.$$

Una clase particularmente importante de límites surge de las *series infinitas con términos complejos*. Se dice que la serie infinita con términos complejos

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu,$$

converge y tiene la suma S, si la sucesión de sumas parciales

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu,$$

tiende al límite S. Si la serie real con términos no negativos

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|$$

converge, se deduce, precisamente como en el Capítulo 7 del Volumen I (p. 514), que la serie original con términos complejos también converge. Entonces se dice que esta última serie es *absolutamente convergente*.

Si los términos c_ν de la serie, en lugar de ser constantes, dependen de (x, y), las coordenadas de un punto que varía en una región R, el concepto de *convergencia uniforme* adquiere un significado. Se dice que la serie es uniformemente convergente en R si para un ε positivo prescrito, arbitrariamente pequeño, puede encontrarse una cota fija N, que sólo dependa de ε, tal que para todo $n \geqq N$ se cumpla la relación $|S_n - S| < \varepsilon$, sin importar dónde se encuentre el punto $z = x + iy$ en la región R. Por supuesto, exactamente en la misma forma se define la *convergencia uniforme de una sucesión de funciones complejas* $S_n(z)$ que dependan del punto z de R. Todas estas relaciones y definiciones, y las demostraciones asociadas, corresponden exactamente a aquéllas que ya hemos visto en la teoría de las variables reales.

El ejemplo más sencillo de una serie convergente es la serie geométrica

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots.$$

Igual que para una variable real, la n-ésima suma parcial de esta serie es

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z},$$

y

$$(8.1) \qquad 1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z} \quad \text{para } |z| < 1.$$

Se ve que la serie geométrica converge absolutamente siempre que $|z| < 1$, y que la convergencia es uniforme cuando $|z| \leqq q$, donde q es cualquier número positivo fijo entre 0 y 1. En otras palabras, *la serie geométrica converge absolutamente para todos los valores de z en el interior del círculo unitario, y converge uniformemente en todo círculo cerrado concéntrico con el círculo unitario y radio menor que la unidad.*

Para la investigación de la convergencia, nuevamente se cuenta con el *criterio de comparación:* si $|c_\nu| \leqq p_\nu$, donde p_ν es real y no negativo, y si la serie infinita

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu$$

converge, entonces la serie compleja $\sum c_\nu$ converge absolutamente.

Si los p_ν son constantes en tanto que los c_ν' dependen de un punto z que varía en R, la serie $\sum c_\nu$ converge *uniformemente* en la región en cuestión. Las demostraciones son las mismas, palabra por palabra, que las demostraciones correspondientes para una variable real (Volumen I, Capítulo 7, p. 535) y, por lo tanto, no es necesario repetirlas aquí.

Si M es una constante positiva arbitraria y q es un número positivo entre 0 y 1, las series infinitas con los términos positivos $p_\nu = Mq^\nu$, $Mq^{\nu-1}$ y

$$\frac{M}{\nu+1} q^{\nu+1}$$

también convergen, como se vio en el Volumen I, p. 543. En seguida se aplicarán estas series con fines de comparación.

b. Series de potencias

Las series infinitas más importantes con términos complejos son las series de potencias, en las que c_ν es de la forma $c_\nu = a_\nu z^\nu$; es

decir, una serie de potencias puede expresarse en la forma

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

o, con un poco más de generalidad, en la forma

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu,$$

donde z_0 es un punto fijo. Sin embargo, como esta forma siempre puede reducirse a la anterior, mediante la sustitución $z' = z - z_0$, sólo es necesario considerar el caso en donde $z_0 = 0$.

El teorema principal acerca de las series de potencias es, palabra por palabra, el mismo que el teorema correspondiente para las series de potencias con términos reales, consideradas en el Capítulo 7 del Volumen I (p. 541):

Si la serie de potencias converge para $z = \xi$, *converge absolutamente para todo valor de z tal que* $|z| < |\xi|$. *Además, si q es un número positivo menor que* 1, *la serie converge uniformemente en el interior del círculo* $|z| \leqq q|\xi|$.

Inmediatamente puede pasarse al siguiente teorema adicional:

Las dos series

$$D(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu z^{\nu+1}$$

$$I(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu + 1} z^{\nu+1}$$

también convergen absoluta y uniformemente si $|z| \leqq q|\xi|$.

La demostración se desarrolla exactamente como antes. Puesto que la serie $P(z)$ converge para $z = \xi$, se deduce que el n-ésimo término, $a_n\xi^n$, tiende a cero conforme n crece. Por tanto, evidentemente existe una constante positiva M tal que se cumple la desigualdad $|a_n\xi^n| < M$ para todos los valores de n. Si ahora $|z| = q|\xi|$, donde $0 < q < 1$, se tiene

$$|a_n z^n| < Mq^n, \quad |na_n z^{n-1}| < \frac{M}{|\xi|} nq^{n-1}, \quad \left|\frac{a_n}{n+1} z^{n+1}\right| < \frac{M|\xi|}{n+1} q^{n+1}.$$

Así, se obtienen las series de comparación que, como ya se ha visto

(p. 771), convergen absolutamente. Por lo tanto, se ha probado el teorema.

En el caso de una serie de potencias se tienen dos posibilidades: la serie converge para todos los valores de z, o bien, existen valores $z = \eta$ para los cuales diverge. Entonces, por el teorema anterior, la serie debe diverger para todos los valores de z para los cuales $|z| > |\eta|$ (ver el Volumen I, p. 541) y, precisamente como en el caso de las series de potencias con términos reales, existe un *radio de convergencia*, ρ, tal que la serie converge cuando $|z| < \rho$ y diverge cuando $|z| > \rho$. Lo mismo se aplica a las dos series $D(z)$ e $I(z)$, siendo el valor de ρ el mismo que para la serie original. El círculo $|z| = \rho$ se llama *círculo de convergencia* de la serie de potencias. Ninguna proposición general puede hacerse acerca de la convergencia o divergencia de la serie sobre la circunferencia del propio círculo, es decir, para $|z| = \rho$.

c. Derivación e integración de series de potencias

Una serie convergente de potencias

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

define una función de la variable compleja z en el interior de su círculo de convergencia. En esa región, es el límite hacia el cual tienden los polinomios

$$P_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$$

a medida que n tiende a infinito.

Un polinomio $f(z)$ puede derivarse con respecto a la variable independiente z exactamente en la misma forma que si se tratase de una variable real. En primer lugar, nótese que se cumple la identidad algebraica

$$\frac{z_1^n - z^n}{z_1 - z} = z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z + \cdots + z^{n-1}$$

Si ahora se hace que z_1 tienda a z, [1] inmediatamente se tiene

[1]El concepto de límite para una variable compleja *continua* ($z_1 \to z$) puede introducirse exactamente en la misma forma que para una variable real.

$$\frac{d}{dz} z^n = \lim_{z_1 \to z} \frac{z_1{}^n - z^n}{z_1 - z} = nz^{n-1}.$$

En la misma forma, es inmediato que

$$P_n'(z) = \frac{d}{dz} P_n(z) = \lim_{z_1 \to z} \frac{P_n(z_1) - P_n(z)}{z_1 - z} = \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu z^{\nu-1} = D_n(z).$$

Es natural que a la expresión $P_n'(z)$ se le dé el nombre de *derivada* del polinomio complejo $P_n(z)$.

Ahora se tiene el teorema siguiente, fundamental en la teoría de las series de potencias:

Una serie de potencias convergente

(8.2a) $$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

puede derivarse término a término en el interior de su círculo de convergencia. Es decir, el límite

(8.2b) $$P'(z) = \lim_{z_1 \to z} \frac{P(z_1) - P(z)}{z_1 - z}$$

existe y

(8.2c) $$P'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu z^{\nu-1} = \lim_{n \to \infty} P_n'(z) = \lim_{n \to \infty} D_n(z) = D(z).$$

A partir de este teorema, es evidente que la serie de potencias

$$I(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu + 1} z^{\nu+1}$$

pueden considerarse como la *integral indefinida* de la primera serie de potencias, es decir, que $I'(z) = P(z)$.

La diferenciabilidad término a término de las series de potencias se demuestra en la forma siguiente:

De lo expuesto en la p. 851, se sabe que se cumple la relación

$$D(z) = \lim_{n \to \infty} D_n(z)$$

dentro del círculo de convergencia. Tiene que probarse que el cociente de diferencias

$$\frac{P(z_1) - P(z)}{z_1 - z}$$

difiere en valor absoluto de $D(z)$ en menos que un número positivo prescrito, ε, con sólo tomar z_1 lo suficientemente próximo a z dentro del círculo de convergencia. Con este fin, fórmese el cociente de diferencias

$$D(z_1, z) = \frac{P(z_1) - P(z)}{z_1 - z} = \frac{P_n(z_1) - P_n(z)}{z_1 - z} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \lambda_\nu,$$

donde, por brevedad, se escribe

$$\lambda_\nu = \frac{z_1^\nu - z^\nu}{z_1 - z} = z_1^{\nu-1} + z_1^{\nu-2} z + \cdots + z^{\nu-1}$$

Si se conserva la notación usada en la p. 851 y si $|z| < q|\xi|$ y $|z_1| < q|\xi|$, entonces

$$|\lambda_\nu| \leqq \nu q^{\nu-1} |\xi|^{\nu-1}.$$

De aquí que

$$|R_n| = \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \lambda_\nu \right| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu| \nu q^{\nu-1} |\xi|^{\nu-1} \leqq \frac{M}{|\xi|} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu q^{\nu-1}.$$

Debido a la convergencia de la serie de términos positivos $\sum \nu q^{\nu-1}$, la expresión $|R_n|$ puede hacerse tan pequeña como se desee, siempre que n se haga lo suficientemente grande. Elíjase n tan grande que esta expresión sea menor que $\varepsilon/3$ y que también se tenga

$$|D(z) - D_n(z)| < \varepsilon/3.$$

Elíjase ahora z_1 tan próximo a z que el valor absoluto de

$$\frac{P_n(z_1) - P_n(z)}{z_1 - z}$$

también difiera de $D_n(z)$ en menos que $\varepsilon/3$. Entonces,

$$|D(z_1, z) - D(z)| \leqq \left|\frac{P_n(z_1) - P_n(z)}{z_1 - z} - D_n(z)\right| + |D_n(z) - D(z)| + |R_n|$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

y esta desigualdad expresa lo afirmado.

Puesto que la derivada de la función es a su vez una serie de potencias con el mismo radio de convergencia, puede derivarse una vez más y repetir el proceso tantas veces como se desee. Es decir, *una serie de potencias puede derivarse tantas veces como se desee en el interior de su círculo de convergencia.*

Las series de potencias son las series de Taylor de las funciones $P(z)$ que representan; es decir, *los coeficientes a_ν pueden expresarse por medio de la fórmula*

(8.3) $$a_\nu = \frac{1}{\nu!} P^{(\nu)}(0).$$

La demostración es, palabra por palabra, la misma que para una variable real (ver el Volumen I, p. 545).

d. Ejemplos de series de potencias

Como se mencionó en el Capítulo 7 (p. 553) del Volumen I, las series de potencias para las funciones elementales pueden ser extendidas inmediatamente al caso en que la variable es compleja; en otras palabras, las series de potencias para las funciones elementales pueden considerarse como series de potencias con términos complejos y, de esta manera, es posible extender las definiciones de estas funciones al dominio complejo. Por ejemplo, las series

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$$

convergen para todos los valores de z. (Esto se deduce inmediatamente con ayuda de los criterios de comparación). Una vez más, las funciones representadas por estas series de potencias se denotan, respectivamente, por los símbolos e^z, $\cos z$, $\operatorname{sen} z$, $\cosh z$, $\operatorname{senh} z$, precisamente como en el caso real. De inmediato se deducen las relaciones

(8.4a) $$\cos z + i \operatorname{sen} z = e^{iz},$$

(8.4b) $$\cosh z = \cos iz, \quad i \operatorname{senh} z = \operatorname{sen} iz$$

a partir de las series de potencias. Nuevamente, derivando término a término se obtiene la relación

(8.4c) $$\frac{d}{dz} e^z = e^z.$$

Como ejemplos de series de potencias con un radio de convergencia finito, que no sean series geométricas, considérense las series

(8.4d) $$\log(1+z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{z^\nu}{\nu}$$

$$\operatorname{arc\,tan} z = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{z^{2\nu+1}}{2\nu+1} = \frac{1}{2i}[\log(1+iz) - \log(1-iz)],$$

cuyas sumas se denotan nuevamente por *log* y *arc tan*. Una vez más, el radio de convergencia es 1. Derivando término a término se obtiene una serie geométrica y se encuentra que

$$\frac{d \log(1+z)}{dz} = \frac{1}{1+z}, \quad \frac{d}{dz}(\operatorname{arc\,tan} z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

Ejercicios 8.1

1. (a) Demostrar que la operación de conjugación compleja se distribuye sobre las operaciones algebraicas racionales, por ejemplo,

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}.$$

(b) Probar que si $f(z)$ se define por medio de una serie de potencias con coeficientes reales, entonces $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$.

2. (a) Probar, para un polinomio $P(z)$ con coeficientes reales, que α es una raíz si y sólo si su complejo conjugado es una raíz.

(b) Probar, bajo la hipótesis anterior, que si $P(\alpha) = 0$ y α no es real, $\alpha = a + ib$ y $b \neq 0$, entonces $P(z)$ tiene el factor cuadrático real

$$(z - \alpha)(z - \bar{\alpha}) = z^2 - 2az + a^2 + b^2.$$

3. (*a*) Demostrar que $|z - \alpha| = \lambda\,|z - \beta|$, $\lambda \neq 1$, λ real, es la ecuación de una circunferencia. Determinar el centro, z_0 y el radio, r, del círculo. Si $\lambda = 1$, ¿cuál es el lugar geométrico de esta ecuación?
(b) Demostrar que la *transformación lineal general*

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

donde $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, transforma círculos y rectas en círculos y rectas.

4. ¿Para qué puntos $z = x + iy$ se tiene

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leqq 1?$$

5. Probar que si $\Sigma\, a_n z^n$ es *absolutamente convergente* para $z = \zeta$, entonces es uniformemente convergente para toda z tal que $|z| \leqq |\zeta|$.

6. Usando las series de potencias para cos z y sen z, demostrar que

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1.$$

7. ¿Para qué valores de z es convergente la serie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{1 - z^\nu}\,?$$

8.2 Fundamentos de la teoría general de las funciones de una variable compleja

a. El postulado de la diferenciabilidad

Como se ha visto en párrafos anteriores, todas las series que se representan mediante series de potencias poseen una derivada y una integral indefinida. Este hecho puede tomarse como el punto de partida en la teoría general de las funciones de una variable compleja. El objeto de tal teoría es extender el cálculo diferencial e integral a las funciones de una variable compleja. En particular, es importante que el concepto de función se generalice para variables complejas independientes, en tal forma que comprenda cualquier función que sea diferenciable en una región compleja.

Por supuesto, podríamos restringirnos desde el principio a considerar únicamente funciones que sean representables por medio de

series de potencias y, así, satisfacer el postulado de la diferenciabilidad. Sin embargo, existen dos objeciones a este procedimiento. En primer lugar, no puede decirse *a priori* si el postulado de la diferenciabilidad de una función compleja necesariamente implica que la función puede desarrollarse en una serie de potencias. (En el caso de una variable real se vió que incluso existen funciones que poseen derivadas de cualquier orden y, sin embargo, no pueden desarrollarse en una serie de potencias; ver el Volumen I, p. 462.) En segundo lugar, la sencilla función $1/(1 - z)$, cuya serie de potencias, la serie geométrica, converge únicamente en el círculo unitario, nos hace ver que incluso para expresiones funcionales sencillas la serie de potencias no representa en todo punto a la función, lo cual, en este caso particular, ya se sabe por otros caminos.

Estas dificultades pueden evitarse mediante un método debido a Weierstrass y, en efecto, la teoría de las funciones de una variable compleja puede desarrollarse con base en la teoría de las series de potencias. Sin embargo, es deseable hacer resaltar otro punto de vista, el de Cauchy y Riemann. En este método las funciones se caracterizan no por *expresiones explícitas* sino mediante simples *propiedades*. Más concretamente, para determinar el dominio en el que una función está definida se usa la propiedad de que la función es diferenciable y no la de que se puede representar por medio de una serie de potencias.

Partiremos del concepto general de una función compleja, $\zeta = f(z)$ de la variable compleja z. Si R es una región del plano z y si a cada punto $z = x + iy$ en R se le asocia un número complejo $\zeta = u + iv$ por medio de cualquier relación, se dice que ζ es una función compleja de z en R. Por lo tanto, esta definición simplemente expresa el hecho de que a toda pareja de números reales, x, y, tales que el punto (x, y) está en R, le corresponde una pareja de números reales, u, v, es decir, que u y v son dos funciones reales cualesquiera, $u(x, y)$ y $v(x, y)$, definidas en R, de las dos variables reales x y y.

Este concepto de función abarca demasiado para el cálculo complejo. Lo limitamos, en primer lugar, por la condición de que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ deben ser funciones continuas en R con primeras derivadas continuas, u_x, u_y, v_x, v_y. En segundo, requerimos que la expresión $u + iv = \zeta = f(z) = f(x + iy)$ sea *diferenciable en R con respecto a la variable independiente compleja z*; es decir, que el límite

$$\lim_{z_1 \to z} \frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

existe para todos los valores de z en R. Este límite, en consecuencia, recibe el nombre de *derivada* de $f(z)$.

Para que la función sea diferenciable no es, de ninguna manera, suficiente que u y v posean derivadas continuas con respecto a x y a y. El presente postulado de diferenciabilidad implica mucho más que la diferenciabilidad para las funciones de variables reales, puesto que $h = r + is$ puede tender a cero a través tanto de valores reales ($s = 0$) como de valores puramente imaginarios ($r = 0$), o en cualquier otra forma, y debe obtenerse el *mismo* límite, $f'(z)$, en todos los casos si la función es diferenciable.

Si, por ejemplo, se pone $u = x$, $v = 0$, es decir, $f(z) = f(x + iy) = x$, se tiene una correspondencia en la que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son continuamente diferenciables. No obstante, poniendo $h = r$ para la derivada de f con respecto a z, se obtiene

$$\lim_{r\to 0} \frac{f(z + r) - f(z)}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{x + r - x}{r} = 1,$$

mientras que si se pone $h = is$, se tiene

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(z + is) - f(z)}{is} = \lim_{s\to 0} \frac{0}{is} = 0;$$

es decir, se obtienen dos límites enteramente diferentes. De modo semejante, si $\zeta = u + iv = x + 2iy$, se obtienen límites diferentes para el cociente de diferencias conforme h tiende a cero en formas diferentes.

Por tanto, para asegurar la diferenciabilidad de $f(z)$ con respecto a z se tiene que imponer aún otra restricción. Este hecho fundamental de la teoría de las funciones de una variable compleja se expresa por medio del teorema siguiente:

Si $\zeta = u(x, y) + iv(x, y) = f(z) = f(x + iy)$, *donde* $u(x, y)$ *y* $v(x, y)$ *son continuamente diferenciables, las condiciones necesarias y suficientes para que la función* $f(z)$ *sea diferenciable en la región compleja son las llamadas ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann:*

(8.5a) $$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

En todo conjunto abierto, R, donde u y v sean continuamente diferenciables y satisfagan estas condiciones, se dirá que $f(z)$ *es una*

función analítica[1] *de la variable compleja z, y la derivada de f(z) estará dada por*

(8.5b) $$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = \frac{1}{i}(u_y + iv_y).$$

Primero se demostrará que las ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann constituyen una condición *necesaria*. Supóngase que $f'(z)$ existe. En consecuencia, debe obtenerse el límite $f'(z)$ tomando h igual a una cantidad *real* r. Es decir,

$$f'(z) = \lim_{r \to 0} \left(\frac{u(x + r, y) - u(x, y)}{r} + i\,\frac{v(x + r, y) - v(x, y)}{r} \right)$$

$$= u_x + iv_x.$$

De la misma manera, debe obtenerse $f'(z)$ si se toma h como un número imaginario puro, is; es decir, debe tenerse

$$f'(z) = \lim_{s \to 0} \left(\frac{u(x, y + s) - u(x, y)}{is} + i\,\frac{v(x, y + s) - v(x, y)}{is} \right)$$

$$= \frac{1}{i}(u_y + iv_y).$$

De aquí que

$$u_x + iv_x = \frac{1}{i}(u_y + iv_y).$$

Igualando las partes reales e imaginarias, inmediatamente se obtienen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Estas ecuaciones también constituyen una condición *suficiente* para la diferenciabilidad de la función $f(z)$. Para probarlo, fórmese el cociente de diferencias [ver la fórmula (13) p. 68]

[1]También se usa el término *holomorfa*. Un teorema de mayores alcances, que no se prueba aquí, asegura que para f diferenciable en una región, las derivadas de u y v no sólo existen sino que automáticamente son continuas. Por tanto, en realidad, la diferenciabilidad de f implica la diferenciabilidad continua. Sin embargo, en lo que sigue no se aplicará ese teorema y siempre *se supondrá* que la f diferenciable que se consideró tiene partes real e imaginaria continuamente diferenciables, o sea, equivalentemente, que $f'(z)$ es una función continua de z.

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{u(x+r, y+s)-u(x,y)+i\{v(x+r,y+s)-v(x,y)\}}{r+is}$$

$$= \frac{ru_x + su_y + irv_x + isv_y + \varepsilon_1|h| + i\varepsilon_2|h|}{r+is},$$

donde ε_1 y ε_2 son dos cantidades reales que tienden a cero con $|h| = \sqrt{r^2+s^2}$. Ahora, si se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, la ecuación anterior inmediatamente se convierte en

$$u_x + iv_x + \varepsilon_1 \frac{|h|}{r+is} + i\varepsilon_2 \frac{|h|}{r+is}.$$

De inmediato se ve que conforme $h \to 0$ esta expresión tiende al límite $u_x + iv_x$, independientemente de la manera en que se lleve a cabo el paso hacia el límite $h \to 0$.

Ahora se usarán las ecuaciones de Cauchy-Riemann, o la equivalente propiedad de diferenciabilidad, como la definición de una función analítica, sobre la cual se basará la deducción de todas las propiedades de tales funciones.

b. Las operaciones más sencillas del cálculo diferencial

Todos los polinomios y todas las series de potencias en el interior de su círculo de convergencia son funciones analíticas (ver la p. 855). Fácilmente se ve que las operaciones que conducen a las reglas elementales del cálculo diferencial pueden aquí llevarse a cabo exactamente en la misma forma que para la variable real (ver el Volumen I, pp. 201-206, 218-220). En particular, se cumplen las reglas siguientes: la suma, la diferencia, el producto y (siempre que el denominador no se anule) el cociente de funciones analíticas pueden derivarse de acuerdo con las reglas elementales del cálculo y, por tanto, a su vez son funciones analíticas. Además, una función analítica de una función analítica puede derivarse de acuerdo con la regla de la cadena y, por lo tanto, es a su vez una función analítica.

También es válido el teorema siguiente:

Si la derivada de una función analítica $\zeta = f(z)$ se anula en todo punto de una región R, la función es constante.

DEMOSTRACION Por (8.5a, b) se tiene $v_y - iu_y = 0$ en todo punto de R. De donde, $v_y = 0$, $u_y = 0$, en virtud de las ecuaciones de

Cauchy-Riemann, $v_x = 0$, $u_x = 0$; es decir, u y v son constantes; por tanto, ζ es constante.

Aplicación a la función exponencial

Usemos este teorema para deducir algunas de las propiedades básicas de la función exponencial, definida para todo complejo z por la serie de potencias

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots.$$

Puesto que puede derivarse esta serie (ver la p. 855), se encuentra que

(8.6) $$\frac{d}{dz} e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = e^z.$$

Así, la función exponencial $f(z) = e^z$ es una solución de la ecuación diferencial

$$f'(z) = f(z)$$

para todo z. Entonces, por la regla de la cadena de la derivación se deduce que, para cualquier complejo fijo ζ,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} e^{z+\zeta} e^{-z} &= \frac{d}{dz} f(z+\zeta) f(-z)\\ &= f'(z+\zeta) f(-z) - f(z+\zeta) f'(-z)\\ &= f(z+\zeta) f(-z) - f(z+\zeta) f(-z) = 0.\end{aligned}$$

Aplicando el teorema anterior, se ve que

$$e^{z+\zeta} e^{-z}$$

es una constante independiente de z. El valor de esta constante se encuentra poniendo $z = 0$, y como $e^0 = 1$, se obtiene

(8.6a) $$e^{z+\zeta} e^{-z} = e^{\zeta}$$

para todo z y todo ζ. Para $\zeta = 0$, se concluye que

(8.6b) $$e^z e^{-z} = 1.$$

Consecuentemente, *la función exponencial es diferente de cero para todo complejo z, y el recíproco de* e^z *es* e^{-z}. Multiplicando ambos miembros de la identidad (8.6a) por e^z se llega a la *ecuación funcional de la función exponencial*

(8.6c) $$e^{z+\zeta} = e^z e^\zeta,$$

la cual no podría deducirse con tanta facilidad a partir de la representación en serie de potencias.

Si $f(z)$ es cualquier solución de la ecuación diferencial

(8.7a) $$f'(z) = f(z),$$

se tiene

$$\frac{d}{dz} f(z)e^{-z} = f'(z)e^{-z} - f(z)e^{-z} = 0.$$

De aquí que,

$$f(z)e^{-z} = \text{constante}, = c.$$

Por lo tanto, la solución más general de la ecuación diferencial (8.7a) tiene la forma

(8.7b) $$f(z) = ce^z,$$

donde c es una constante.

En la p. 856 se encontró que

(8.8a) $$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z,$$

donde $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ están definidas por sus series de potencias. Remplazando z por $-z$ se encuentra, puesto que $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$

$$e^{-iz} = \cos z - i \operatorname{sen} z.$$

Multiplicando las dos relaciones, se ve que

$$e^{iz}\, e^{-iz} = \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z.$$

Como $e^{iz}\, e^{-iz} = e^{iz-iz} = 1$, se ha probado la identidad

(8.8b) $$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$$

para todo complejo z.

Por (8.6c) y (8.8a)

(8.8c) $$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Si aquí x y y son reales, se encuentra que el valor absoluto de $e^z = e^{x+iy}$ está dado por

(8.8d) $$\begin{aligned} |e^z| &= |e^{x+iy}| = |e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y| \\ &= \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \operatorname{sen} y)^2} = \sqrt{e^{2x}(\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y)} \\ &= e^x. \end{aligned}$$

Otra consecuencia importante de la relación (8.8a) que une a las funciones exponenciales y trigonométricas se obtiene si se pone $z = 2\pi$:

(8.9a) $$e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i \operatorname{sen}(2\pi) = 1.$$

De manera más general, haciendo $\zeta = 2\pi i$, en (8.6c) se tiene

(8.9b) $$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Por tanto, *para argumentos complejos, la función exponencial es periódica y tiene el período $2\pi i$.*

La fórmula (8.8a) indica que para cualquier entero n,

(8.9c) $$e^{2n\pi i} = \cos(2n\pi) + i \operatorname{sen}(2n\pi) = 1.$$

Fácilmente se ve que los valores de z de la forma

$$z = 2n\pi i \qquad (n = \text{entero})$$

son los únicos para los cuales

$$e^z = 1,$$

porque si $z = x + iy$, con x, y reales, de $e^z = 1$ y (8.8d) se encuentra que $e^x = 1$, y, por tanto, $x = 0$. Entonces

$$1 = e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y,$$

lo cual conduce a

$$\cos y = 1, \operatorname{sen} y = 0.$$

De aquí que y debe ser un múltiplo de 2π

Se concluye entonces que la ecuación

$$e^z = e^\zeta \tag{8.9d}$$

se cumple si y sólo si

$$z = \zeta + 2n\pi i, \tag{8.9e}$$

donde n es un entero, porque multiplicando (8.9d) por $e^{-\zeta}$, se obtiene

$$e^{z-\zeta} = e^z e^{-\zeta} = 1.$$

c. *Transformación conforme. Funciones inversas*

Por medio de las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$, se hacen corresponder los puntos del plano z, o plano x, y, con los puntos del plano ζ, o plano u, v. Por tanto, se tiene una transformación o aplicación de regiones del plano x, y sobre regiones del plano u, v, determinada por $\zeta = f(z) = u + iv$. Por (8.5a, b), pp. 859-860, el jacobiano de la transformación es

$$D = \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2.$$

Por lo tanto, el jacobiano es diferente de cero y, de hecho, es positivo siempre que $f'(z) \neq 0$. Si se supone que $f'(z) \neq 0$, los resultados obtenidos con anterioridad (p. 308) indican que una vecindad del punto z_0 en el plano z, si es suficientemente pequeña, es aplicada

biunívoca y continuamente sobre una región del plano ζ en la vecindad del punto $\zeta_0 = f(z_0)$. Esta aplicación es *conforme* (es decir, los ángulos no son alterados por ella), porque, como se ha visto en el Capítulo 3 (p. 337), las ecuaciones de Cauchy-Riemann son las condiciones necesarias y suficientes para que la transformación sea conforme y no sólo conserve la magnitud sino también el signo de los ángulos. Así, se tiene el resultado siguiente:

La conformidad de la transformación dada por $u(x, y)$ y $v(x, y)$, y el carácter analítico de la función $f(z) = u + iv$ significan exactamente lo mismo, siempre que se eviten los puntos, z_0, para los cuales $f'(z_0) = 0$.

El lector debe estudiar los ejemplos de representación conforme que se discutieron en el Capítulo 3 (pp. 289-290) y probar que todas estas transformaciones pueden expresarse por medio de funciones analíticas de forma sencilla.

Para una representación conforme biunívoca de una vecindad de z_0 sobre una vecindad de ζ_0, la transformación inversa también es conforme. Se concluye que $z = x + iy$ también puede considerarse como una función analítica, $\phi(\zeta)$, de $\zeta = u + iv$. Esta función se llama *inversa* de $\zeta = f(z)$.

En lugar de aplicar este argumento geométrico, puede establecerse directamente el carácter analítico de esta inversa calculando las derivadas de $x(u, v)$, $y(u, v)$ como en (24d) de la p. 299. Se tiene

$$x_u = \frac{v_y}{D}, \quad x_v = -\frac{u_y}{D}, \quad y_u = -\frac{v_x}{D}, \quad y_v = \frac{u_x}{D}, \tag{8.10}$$

y se ve que las ecuaciones de Cauchy-Riemann $x_u = y_v$, $x_v = -y_u$ son satisfechas por la función inversa. Como puede verificarse inmediatamente, la derivada de la inversa, $z = \phi(\zeta)$, de la función $\zeta = f(z)$ está dada por la fórmula

$$\frac{dz}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz} = 1. \tag{8.10b}$$

Ejercicios 8.2

1. Probar que el producto y el cociente de funciones analíticas y la función de una función analítica son, a su vez, analíticas, no aplicando la propiedad de diferenciabilidad sino las ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann.

2. Demostrar que si $|f(z)|$ es constante en una región, R, entonces $f(z)$ es constante.

3. ¿Dónde son continuas las funciones siguientes? ¿Cuáles son diferenciables?

$$\text{(a)}\ \bar{z}; \qquad \text{(b)}\ |z|; \qquad \text{(c)}\ \frac{z+\bar{z}}{1+|z|}; \qquad \text{(d)}\ \frac{z^2+\bar{z}^2}{|z|^2}.$$

4. Probar que en la transformación $\zeta = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ los círculos con centros en el origen y las rectas que pasan por el origen del plano z se transforman, respectivamente, en elipses e hipérbolas confocales en el plano ζ.

5. Para la transformación lineal general

$$\zeta = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad - bc \neq 0),$$

pueden existir hasta dos *puntos fijos*, valores de z para los cuales $\zeta = z$. Demostrar que si la transformación tiene dos puntos fijos, la familia de círculos que pasa por los dos puntos fijos y la familia de círculos ortogonales a ellos se transforman en sí mismos. (Con este fin, la recta que pasa por los puntos y la mediatriz del segmento que los une se consideran como "círculos" de las respectivas familias.)

6. Relacionar la inversión en el círculo unitario con la función analítica $f(z) = 1/z$ y, así, deducir las propiedades básicas de la inversión enunciadas en la Sección 3.3d, Ejercicio 4, p. 302.

7. Probar que una sustitución de la forma

$$\zeta = \frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}},$$

donde α y β son números complejos cualesquiera que satisfacen la relación

$$\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1,$$

transforma la circunferencia del círculo unitario en sí misma y el interior del círculo en sí mismo. Probar también que si

$$\beta\bar{\beta} - \alpha\bar{\alpha} = 1,$$

el interior se transforma en el exterior.

8. Probar que cualquier círculo puede transformarse, mediante una sustitución de la forma $\zeta = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$, en el semiplano superior limitado por el eje real. (Aplicar el Ejercicio 4, p. 857.)

9. Probar que una sustitución $\zeta = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$, donde $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, no altera la razón cruzada

$$\frac{(z_1 - z_3)/(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_4)/(z_2 - z_4)}$$

de los cuatro puntos z_1, z_2, z_3, z_4

8.3 Integración de funciones analíticas

a. Definición de la integral

El teorema central del cálculo diferencial e integral de las funciones de una variable real establece que la *integral indefinida* de una función (dejando indeterminado el límite superior) puede considerarse como la función primitiva o *antiderivada* de la función original (Volumen I, p. 188). Una relación correspondiente constituye el núcleo de la teoría de las funciones analíticas de una variable compleja.

Empecemos por extender la definición de la integral definida de una función dada, $f(z)$. Aquí resulta conveniente usar $t = r + is$, en lugar de la variable independiente z, para denotar a la variable de integración. Sea la función $f(t)$ analítica en una región R y sean $t = t_0$ y $t = z$ dos puntos en ésta región, unidos por una curva orientada, C, que es seccionalmente suave (ver la p. 118) y está completamente en el interior de R (Fig. 8.2). Subdivídase la curva C en n porciones, por medio de los puntos sucesivos $t_0, t_1, \ldots, t_n = z$ y fórmese la suma

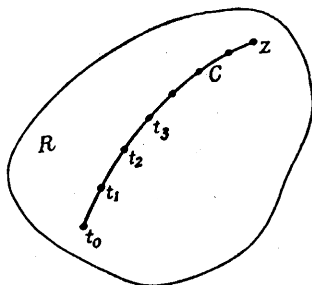


Figura 8.2

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} f(t_\nu')(t_\nu - t_{\nu-1}), \tag{8.11a}$$

donde t_ν' denota cualquier punto que se encuentra sobre C, entre $t_{\nu-1}$ y t_ν. Si ahora se hace la subdivisión cada vez más fina, haciendo que el número de puntos crezca sin límite, de manera tal que la mayor de las longitudes $|t_\nu - t_{\nu-1}|$ tienda a cero, S_n tiende hacia un

límite que es independiente de la elección del punto intermedio particular, t_ν' y de los puntos t_ν.

Esto se puede probar directamente, por medio de un método análogo al que se usó para probar el teorema correspondiente de la existencia de la integral definida para variables reales. Sin embargo, para nuestros fines resulta más conveniente reducir el teorema a lo que ya se conoce acerca de las integrales curvilíneas reales (ver el Capítulo 1, p. 89), como sigue: póngase $f(t) = u(r, s) + iv(r, s)$, $t_\nu = r_\nu + is_\nu$, $t_\nu' = r_\nu' + is_\nu'$, $\Delta t_\nu = t_\nu - t_{\nu-1} = \Delta r_\nu + i\,\Delta s_\nu$. Entonces, se tiene

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} u(r_\nu', s_\nu')\,\Delta r_\nu - v(r_\nu', s_\nu')\,\Delta s_\nu$$
$$+ i\left\{\sum_{r=1}^{n} v(r_\nu', s_\nu')\,\Delta r_\nu + u(r_\nu', s_\nu')\,\Delta s_\nu\right\}.$$

Conforme n crece, las sumas de la derecha tienden hacia las integrales curvilíneas reales

$$\int_C (u\,dx - v\,dy) \qquad \text{y} \qquad i\int_C (v\,dx + u\,dy),$$

respectivamente, y por tanto, como se afirmó, S_n tiende hacia un límite. A este límite se le da el nombre de integral definida de la función $f(t)$ a lo largo de la curva c, desde t_0 hasta z y se escribe

$$\int_{t_0}^{z} f(t)\,dt \qquad \text{o} \qquad \int_C f(t)\,dt.$$

De donde

$$\text{(8.11b)} \qquad \int_C f(t)\,dt = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy).$$

La definición de esta integral definida inmediatamente da una estimación importante: si $|f(t)| \leq M$ *sobre la trayectoria de integración, donde M es una constante y L es la longitud de la trayectoria de integración, entonces*

$$\text{(8.11c)} \qquad \left|\int_C f(t)\,dt\right| \leq ML,$$

porque, por (8.11*a*) *y lo expuesto en el Volumen I* (p. 350),

$$|S_n| \leqq M \sum_{\mathrm{v}} |t_r - t_{r-1}| \leqq ML.$$

Además, hacemos notar que las operaciones con integrales complejas (en particular, las combinaciones de diferentes trayectorias de integración) satisfacen todas las reglas establecidas sobre el particular para las integrales curvilíneas, en el Capítulo I (pp. 93-95).

b. Teorema de Cauchy

La propiedad más importante de las funciones de una variable compleja es que la integral entre t_0 y z es en esencia independiente de la elección de la trayectoria de integración, C. Concretamente, se tiene el teorema de Cauchy:

Si la función $f(t)$ es analítica en una región simplemente conexa, R, la integral

$$\int_{t_0}^{z} f(t)\, dt = \int_C f(t)\, dt$$

es independiente de la elección particular de la trayectoria de integración, C, que une a t_0 y z en R; la integral es una función analítica $F(z)$ tal que

$$\frac{d}{dz} F(z) = \frac{d}{dz}\left[\int_{t_0}^{z} f(t)\, dt\right] = f(z).$$

En consecuencia, $F(z)$ es una función primitiva o integral indefinida de $f(z)$.

El teorema de Cauchy también puede expresarse como sigue:

La integral de $f(t)$ a lo largo de una curva cerrada que se encuentra en una región simplemente conexa en la que f es analítica, es cero.

La demostración de que la integral es independiente de la trayectoria se deduce inmediatamente de (8.11b) y del teorema principal sobre las integrales curvilíneas (ver el Capítulo I, p. 104); porque tanto $u\, dx - v\, dy$, el integrando en la parte real, como $v\, dx +$

udy, el integrado en la parte imaginaria, satisfacen la condición de integrabilidad, en virtud de las ecuaciones de Cauchy-Riemann (8.5a). Por lo tanto, la integral es una función de x, y o de $x + iy = z, F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, y por los resultados obtenidos previamente para las integrales curvilíneas se tienen las relaciones

$$U_x = u, \quad U_y = -v, \quad V_x = v, \quad V_y = u,$$

es decir [ver (8.5b); p 860],

$$U_x = V_y, \quad U_y = -V_x, \quad U_x + iV_x = u + iv,$$

lo cual demuestra que, en realidad, $F(z)$ es una función analítica en R con derivada $F'(z) = f(z)$.

La hipótesis de que la región es *simplemente conexa* es esencial para la validez del teorema de Cauchy. Por ejemplo, considérese la función $1/t$, que es analítica en todo punto del plano t, excepto en el origen. No podemos concluir tomando como base el teorema de Cauchy, que la integral de $1/t$, tomada a lo largo de una curva cerrada que encierre al origen, se anula, porque una curva tal no puede ser encerrada en una región simplemente conexa en la que la función sea analítica. La conectividad simple de la región queda destruída por el punto excepcional $t = 0$. Si, por ejemplo, la integral se toma a lo largo de un círculo, K, dado por $|t| = r$ o $t = re^{i\theta}$ en el sentido positivo, y se elige θ como la variable de integración ($dt = rie^{i\theta}\, d\theta$), se tiene

$$\int_K \frac{dt}{t} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{i\theta}}{re^{i\theta}}\, d\theta = 2\pi i; \tag{8.12a}$$

esto es, el valor de la integral no es cero sino $2\pi i$.

Sin embargo, el teorema de Cauchy puede extenderse a regiones múltiplemente conexas, como sigue:

Si una región múltiplemente conexa, R, está limitada por un número finito de curvas cerradas seccionalmente suaves $C_1, C_2, \ldots$, y si $f(z)$ es analítica en el interior de esta región y sobre su frontera, [1] *entonces la suma de las integrales de la función a lo largo de todas las curvas fronteras es cero, siempre que todas las fronteras se describan en el mismo sentido relativo al interior de la región R, es decir, que*

*Se dice que una función es analítica sobre una curva si es analítica en toda una vecindad de esta curva, no importa qué tan pequeña sea.

la región R siempre esté del mismo lado, digamos el izquierdo, de la curva conforme ésta se describe.

Se llega a la demostración inmediatamente, sobre el modelo de las demostraciones correspondientes para las integrales curvilíneas: se corta la región R en un número finito de regiones simplemente conexas (Figs. 8.3 y 8.4), se aplica el teorema de Cauchy a estas

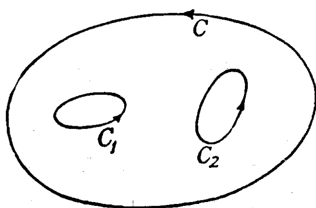


Figura 8.3 $\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$.

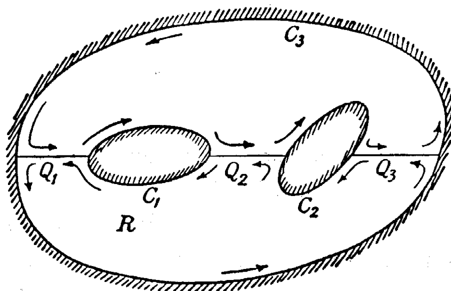


Figura 8.4 Una región múltiplemente conexa, R, subdividida por los segmentos Q_1, Q_2, . . . en regiones simplemente conexas.

regiones por separado y se suman los resultados. Este teorema se puede expresar en una forma un tanto diferente:

Si la región R se forma a partir del interior de una curva cerrada, C, eliminando de este interior los interiores de otras curvas C_1, C_2, . . . , entonces

$$\int_C f(t)\,dt = \sum_\nu \int_{C_\nu} f(t)\,dt, \tag{8.12b}$$

donde las integrales a lo largo de la frontera externa C y las fronteras internas se toman en el mismo sentido.

c. Aplicaciones. El logaritmo, la función exponencial y la función potencia general

Ahora puede usarse el teorema de Cauchy como base para una teoría satisfactoria del logaritmo, la función exponencial y, de aquí, de las otras funciones elementales, siguiendo un procedimiento se-

mejante al adoptado para una variable real (Volumen I, Capítulo 2, p. 145).

Empecemos por definir el logaritmo como la integral de la función $1/t$. Desde un principio se limitará la trayectoria de integración haciendo que se encuentre en una "región de analiticidad" simplemente conexa, mediante un corte a lo largo del eje real negativo, es decir, evitando que la trayectoria de integración cruce el eje real negativo. Más concretamente, si se pone $t = |t|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, se debe limitar θ por la desigualdad $-\pi < \theta \leqq \pi$. En el plano t, después de que se ha hecho el corte, se une el punto $t = 1$ con un punto arbitrario, z, por medio de cualquier curva, C; entonces puede aplicarse el teorema de Cauchy para integrar la función $1/t$ entre estos puntos, independientemente de la trayectoria. El resultado es una función analítica que se llamará $\log z$ y que está definida de modo único para $z \neq 0$:

$$\zeta = \log z = \int_1^z \frac{dt}{t} = f(z). \tag{8.12c}$$

El logaritmo tiene la propiedad de que

$$\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z}. \tag{8.12d}$$

La inversa del logaritmo puede identificarse con la función exponencial. Considérese la función $e^{\log z}$ definida para $z \neq 0$ en el plano cortado a lo largo del eje real negativo, de acuerdo con la definición del logaritmo. Usando la regla de la cadena de la derivación, de (8.12d) y (8.6) se encuentra que, para $z \neq 0$:

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{z}\, e^{\log z} = -\frac{1}{z^2}\, e^{\log z} + \frac{1}{z^2}\, e^{\log z}.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{z}\, e^{\log z} = \text{constante}, = c.$$

Si aquí se toma $z = 1$, se encuentra que

$$c = e^{\log 1} = e^0 = 1.$$

Por tanto,

(8.13a) $$e^{\log z} = z \qquad \text{para todo } z \neq 0.$$[1]

La ecuación (8.13a) indica que la ecuación

(8.13b) $$e^w = z$$

tiene al menos una solución w para todo $z \neq 0$, a saber,

(8.13c) $$w = \log z.$$

De aquí que *la función exponencial toma todos los valores complejos, excepto cero.*

No obstante, la solución no es única. De lo expuesto en la p. 865 se sabe que si w es cualquier solución particular de (8.13b), entonces la solución general tiene la forma

$$w + 2n\pi i,$$

donde n es un entero. Así:

Para cualquier $z \neq 0$ la ecuación

(8.13d) $$e^w = z$$

es equivalente a

(8.13e) $$w = \log z + 2n\pi i,$$

donde n es un entero.

Como una aplicación, se deducirá el *teorema de adición* para logaritmos. De (8.13 a) se tiene, para complejos z, ζ cualesquiera

[1]Uno estaría tentado a concluir, de modo semejante, que

$$\frac{d}{dz}\log(e^z) = \frac{1}{e^z}e^z = 1$$

implica

$$g(z) = \log(e^z) - z = \text{constante}.$$

Pero esto es incorrecto, puesto que $g(0) = 0$ y $g(2\pi i) = -2\pi i$. Se deja al lector descubrir la falsedad del argumento.

que no se anulan,

$$z\zeta = e^{\log z} e^{\log \zeta} = e^{\log z + \log \zeta}$$

y, por otra parte,

$$z\zeta = e^{\log(z\zeta)}.$$

De aquí que

(8.14) $$\log(z\zeta) = \log z + \log \zeta + 2n\pi i,$$

donde n es un entero. Aquí, cuando z, son reales positivos, siempre puede tomarse $n = 0$, pero no para los otros casos, como lo muestra el ejemplo siguiente.

La integral

$$\log z = \int_1^z \frac{dt}{t}$$

se evalúa con facilidad explícitamente, tomando como trayectoria de integración la recta que une a los puntos $t = 1$ y $t = |z|$ junto con el arco circular $|t| = |z|$. Haciendo $t = |z|e^{i\zeta}$ sobre el círculo, se tiene

(8.15) $$\log z = \int_1^{|z|} \frac{dt}{t} + \int_0^{\theta} i\, d\zeta = \log |z| + i\theta,$$

donde θ es el argumento del número complejo z (Fig. 8.5). Por ejemplo,

$$\log 1 = 0, \quad \log i = \frac{\pi i}{2}, \quad \log(-1) = \pi i.$$

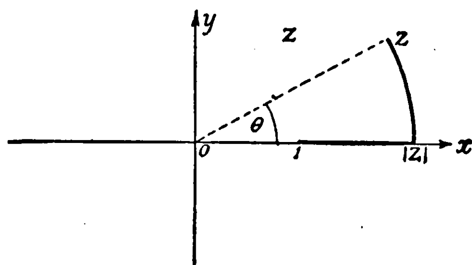


Figura 8.5 Log $z = \log |z| + i\theta$.

Se observa que

$$\log[(-1)(-1)] = \log 1 = 0 = \log(-1) + \log(-1) - 2\pi i.$$

Por tanto, en la fórmula (8.14) no puede tomarse $n = 0$ cuando $z = \zeta = -1$.

Con frecuencia, el valor obtenido de esta manera para el logaritmo de cualquier número complejo z, cuyo argumento está en el intervalo $-\pi < \theta \leqq \pi$, se conoce como *valor principal* del logaritmo. Esta terminología queda justificada por el hecho de que otros valores del logaritmo se pueden obtener eliminando la condición de que no debe cruzarse el eje real negativo: en estas condiciones el punto 1 puede unirse con el punto z mediante una trayectoria que encierre al origen $t = 0$. Sobre esta curva, el argumento de t crecerá hasta un valor mayor o menor en 2 que el argumento previamente asignado a z. Entonces se tiene el valor

$$\log z = \log|z| + i\theta \pm 2\pi i$$

para la integral (Figura 8.6). De manera semejante, haciendo que la curva encierre n veces al origen, recorrida en un sentido o en el otro, se obtiene el valor

$$\log z = \log|z| + i\theta + 2n\pi i. \tag{8.16}$$

Esto expresa la *multiformidad del logaritmo*.[1] La fórmula (8.16) representa la solución general de la ecuación $e^{\log z} = z$.

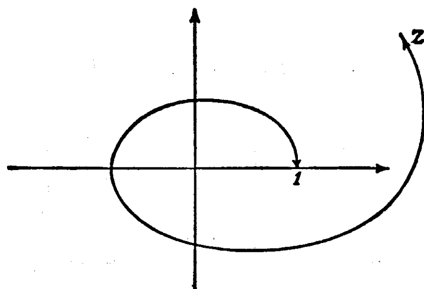


Figura 8.6 Log $z = \log|z| + i\theta + 2\pi i$.

[1]Por supuesto, el logaritmo multiforme no es una función en el sentido de una asignación univalente de un logaritmo complejo a cada número z; el valor principal sí es una función en ese sentido.

Ahora que ya se han introducido el logaritmo y la función exponencial, resulta fácil definir las funciones potencia generalizadas a^z y z^α, donde α y a son constantes complejas (ver la discusión correspondiente para la variable real en el Volumen I, p. 152). Se define a^z por medio de la relación

$$a^z = e^{z \log a} \qquad (a \neq 0), \tag{8.16a}$$

donde debe tomarse el valor principal de $\log a$. De la misma manera, z^α se define por la relación

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} \qquad (z \neq 0). \tag{8.16b}$$

Mientras que la función a^z está definida de modo único si se usa el valor principal de $\log a$ en la definición, la multiformidad de la función z^α va más lejos. Tomando en consideración la multiformidad de $\log z$, se ve que junto con cualquier valor de z^α también se tendrán todos los demás valores, que se obtienen al multiplicar uno de ellos por el multiplicador $e^{2n\pi i\alpha}$, donde n es cualquier entero positivo o negativo. Si α es racional, digamos $\alpha = p/q$, donde p y q son enteros primos relativos, entre esos multiplicadores sólo existe un número finito de valores diferentes (cuya q-ésima potencia debe ser la unidad). Sin embargo, si α es irracional se obtiene un número infinito de multiplicadores diferentes. La multiformidad de la función z^α se discutirá con más detalle en la p. 898.

Como se ve a partir de la regla de la cadena, estas funciones satisfacen las fórmulas de derivación

$$\frac{d(a^z)}{dz} = a^z \log a, \quad \frac{d(z^\alpha)}{dz} = \alpha z^{\alpha-1}. \tag{8.16c}$$

Ejercicios 8.3

1. Considérese $\int \frac{2z-1}{z^2-1}\,dz$.

   (a) ¿Cuáles son los valores de esta integral tomada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de círculos pequeños con centros en 1 y en -1?

   (b) Describir una trayectoria cerrada que rodee tanto a 1 como a -1 y a lo largo de la cual la integral sea cero.

2. Investigar las extensiones de las leyes de los exponentes,

$$a^s a^t = a^{s+t}, \quad s^a t^a = (st)^a, \quad (a^s)^t = a^{st} = (a^t)^s,$$

del dominio real al complejo, y discutir las complicaciones que surgen de la multiformidad en la definición $z^\alpha = \exp[\alpha\,(\log z + 2n\pi i)]$, donde $\log z$ es el valor principal del logaritmo.

3. (a) Demostrar que todos los valores de i^i son reales.
(b) Encontrar condiciones generales sobre los complejos z $(z \neq 0)$ y ζ para que todos los valores de z^ζ sean reales.
(c) ¿Es posible elegir x y ξ reales, tales que todos los valores de x^ξ sean reales?

4. *La función gama:* probar que la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t}\, dt,$$

donde se toma el valor principal de t^{z-1}, extendida sobre todos los valores reales de la variable de integración t, es una función analítica del parámetro $z = x + iy$ si $x > 0$. Demostrar directamente que la expresión $\Gamma(z)$ puede derivarse con respecto a z. Probar que la función gama así definida para la variable compleja satisface la ecuación funcional $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$.

5. *Función zeta de Riemann:* tomando el valor principal de n^z, formar la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \zeta(z). \qquad (z = x + iy),$$

Probar que esta serie converge si $x > 1$, y que representa una función diferenciable [$\zeta(z)$ se llama *función zeta* de Riemann]. La demostración puede realizarse directamente por un método semejante al usado para las series de potencias (ver el Volumen I, p. 525).

6. (a) Aplicar el teorema de Cauchy a la integral

$$\int \left(z + \frac{1}{z}\right)^m z^{n-1}\, dz \qquad (n > m > 0)$$

tomada a lo largo de una trayectoria que consiste del cuadrante positivo del círculo unitario $|z| = 1$ y las partes de los ejes comprendidas entre el origen y el círculo, haciendo una pequeña desviación circular alrededor de $z = 0$; deducir que

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m\theta \cos n\theta\, d\theta = \frac{\operatorname{sen}[(n-m)\pi/2]}{2^{m+1}} \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma[(n-m)/2]}{\Gamma[(n+m)/2+1]}$$

(b) Probar que si $n = m$, el valor de esta última integral es $\pi/2^{m+1}$. (En la integral compleja puede tomarse el integrando como real sobre la mitad positiva del eje.)

8.4 Fórmula de Cauchy y sus aplicaciones

a. Fórmula de Cauchy

El teorema de Cauchy para las regiones múltiplemente conexas conduce a una fórmula fundamental, también de Cauchy, que expresa el valor de una función analítica, $f(z)$, en cualquier punto $z = a$ del interior de una región cerrada, R, en la cual la función es analítica, por medio de los valores de la función sobre la frontera C.

Supóngase que la función $f(z)$ es analítica en la región simplemente conexa, R, y sobre su frontera, C. Entonces la función

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - a}$$

es analítica en todo punto de la región R, incluída la frontera C, excepto en el punto $z = a$. De la región R se elimina un círculo de radio pequeño, ρ, alrededor del punto a, que se encuentre por completo dentro de R (Fig. 8.7), y a continuación se aplica el teorema de Cauchy (p. 870) a la función $g(z)$. Si se denota por K la circunferencia del círculo, descrita en el sentido positivo, y por C la frontera de

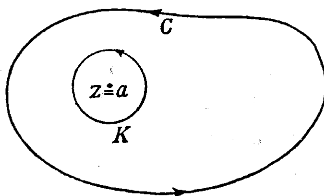


Figura 8.7

R, descrita también en el sentido positivo, el teorema de Cauchy afirma que [ver (8.12b), p. 872]

$$\int_C g(z)\, dz = \int_K g(z)\, dz.$$

Sobre el círculo k se tiene $z - a = \rho e^{i\theta}$, donde el ángulo θ determina la posición del punto sobre la circunferencia. Por lo tanto, sobre el círculo, $dz = \rho i e^{i\theta}\, d\theta$, y por consiguiente

$$\int_K g(z)\, dz = i\int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta})\, d\theta.$$

Ya que $f(z)$ es continua en el punto a, se tiene, siempre que ρ sea lo suficientemente pequeño,

$$f(a + \rho e^{i\theta}) = f(a) + \eta,$$

donde $|\eta|$ es menor que una cantidad positiva arbitraria prescrita, ε. Así,

$$\left|\int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta})\, d\theta - \int_0^{2\pi} f(a)\, d\theta\right| = \left|\int_0^{2\pi} \eta\, d\theta\right| \leqq 2\pi\varepsilon,$$

y, por lo tanto,

$$\int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta})\, d\theta = 2\pi f(a) + \kappa,$$

donde $|\kappa| \leqq 2\pi\varepsilon$. En consecuencia, si ρ es lo suficientemente pequeño,

$$\int_C g(z)\, dz = 2\pi i f(a) + \kappa i,$$

donde $|\kappa i| < 2\pi\varepsilon$.

Si se hace que ε tienda a cero (haciendo que ρ tienda a cero), el segundo miembro de la ecuación tiende a $2\pi i f(a)$, mientras que el valor del primer miembro, a saber,

$$\int_C g(z)\, dz,$$

no se altera. Así se obtiene la *fórmula integral fundamental* de Cauchy

(8.17a) $$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - a}\, dz.$$

Si ahora se regresa al uso de t como variable de integración y en seguida se remplaza a por z, la fórmula toma la forma

(8.17b) $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t - z}\, dt.$$

Esta fórmula expresa los valores de una función en el interior de una región cerrada, en la cual la función es analítica, por medio de los valores que toma la función sobre la frontera de la región.

En particular, si C es un círculo $t = z + re^{i\theta}$ con centro en z — es decir, si $dt = ire^{i\theta}\, d\theta$— entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta.$$

En palabras, *el valor de una función en el centro de un disco circular es igual a la media de sus valores sobre la circunferencia, siempre que la circunferencia y su interior estén contenidos en la región donde la función es analítica.*

b. Desarrollo de las funciones analíticas en series de potencias

La fórmula de Cauchy tiene algunas consecuencias importantes. La principal de éstas es que *toda función analítica puede desarrollarse en una serie de potencias,* la cual relaciona la teoría presente con la de la Sección 8.1 (p. 850). De manera más concreta, se tiene el teorema siguiente:

Si la función $f(z)$ es analítica en el interior y sobre la frontera de un círculo $|z - z_0| \leqq R$, puede desarrollarse como una serie de potencias en $z - z_0$ que converge en el interior de ese círculo.

En la demostración puede tomarse $z_0 = 0$, sin pérdida de generalidad.

(De lo contrario, simplemente puede introducirse una nueva variable independiente, z', por medio de la transformación $z - z_0 = z'$). Aplíquese ahora la fórmula integral de Cauchy (8.17b) a la circunferencia C, $|t| = R$, y escríbase el integrando (usando la serie geométrica) en la forma

$$\frac{f(t)}{t - z} = \frac{f(t)}{t}\frac{1}{1 - z/t} = \frac{f(t)}{t}\left(1 + \frac{z}{t} + \cdots \frac{z^n}{t^n}\right) + \frac{f(t)}{t}\left(\frac{z}{t}\right)^{n+1}\frac{1}{1 - z/t}.$$

Como z es un punto en el interior del círculo, $|z/t| = q$ es un número positivo menor que la unidad; así, el residuo de la serie geométrica

$$r_n = \frac{1}{t}\frac{z^{n+1}}{t^{n+1}}\frac{1}{1 - z/t},$$

se estima mediante

$$|r_n| \leqq \frac{1}{R} q^{n+1} \frac{1}{1-q}.$$

Introduciendo estas expresiones en la fórmula de Cauchy, e integrando término a término, se obtiene

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + R_n,$$

donde

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t^{\nu+1}} dt,$$

$$R_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t) r_n \, dt.$$

Si M es una cota superior de los valores de $|f(t)|$ sobre la circunferencia del círculo, la estimación (8.11c) para las integrales complejas inmediatamente da

$$|R_n| \leqq \frac{1}{2\pi R} \frac{q^{n+1}}{1-q} 2\pi R M = \frac{q^{n+1}}{1-q} M$$

para el residuo. Como $q < 1$, este residuo tiende a cero a medida que n crece, y en esta forma se obtiene el desarrollo en serie de potencias para $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu,$$

donde

(8.18a) $$c_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t^{\nu+1}} dt.$$

Así, ha quedado probada la afirmación.

Este teorema tiene importantes consecuencias. Para empezar, por lo expuesto en la p. 855 se sabe que toda serie de potencias puede derivarse tantas veces como se desee en el interior de su círculo de convergencia. Puesto que toda función analítica puede representarse por medio de una serie de potencias, se concluye que *la derivada de una función en el interior de una región donde la función es ana-*

lítica, también es diferenciable (es decir, nuevamente es analítica). En otras palabras, *la operación de derivación no nos saca de la clase de las funciones analíticas*. Como ya se sabe que se cumple lo mismo para la operación de integración, se ve que *pueden llevarse a cabo la derivación y la integración de las funciones analíticas sin restricción alguna*. Esta es una situación muy cómoda, que no se tiene en el caso de las funciones reales.

Dado que, como se vió en la Sección 8.1 (p. 850), toda serie de potencias es la serie de Taylor de la función que representa, ahora se puede afirmar que toda función analítica puede desarrollarse en una serie de Taylor

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z - z_0)^{\nu}. \tag{8.18b}$$

en la vecindad de un punto $z = z_0$, en una región R en donde la función sea analítica. En consecuencia, los coeficientes c_ν en (8.18a) están dados por las fórmulas

$$\frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z_0 + t)}{t^{\nu+1}}\, dt. \tag{8.18c}$$

De este resultado, también puede deducirse un importante hecho acerca del radio de convergencia de una serie de potencias. *La serie de Taylor de una función $f(z)$, en la vecindad de un punto $z = z_0$, converge en el interior del círculo más grande cuyo interior se encuentre por completo dentro de la región en donde la función está definida y es analítica.*

En virtud de los teoremas sobre la derivación y la integración, que ahora se han establecido como también válidos para la variable compleja, todas las funciones elementales de una variable real que se pueden desarrollar en serie de Taylor, tienen exactamente la misma serie de Taylor cuando la variable independiente es compleja. Para la mayoría de estas funciones ya se ha visto que tal afirmación es correcta.

Aquí puede señalarse que, por ejemplo, la serie binomial (ver el Volumen I, p. 456),

$$(1 + z)^{\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} z^{\nu}, \tag{8.19a}$$

también es válida para la variable compleja, si $|z| < 1$ y α es cual-

quier exponente complejo, siempre que

$$(1 + z)^{\alpha} = e^{\alpha \log(1+z)} \tag{8.19b}$$

se forme con el *valor principal* de log $(1 + z)$.

El hecho de que el radio de convergencia de esta serie es igual a la unidad se deduce de lo que se acaba de decir y de la observación de que la función $(1 + z)^{\alpha}$ no es analítica en el punto $z = -1$, porque, si lo fuera, en ese punto todas las derivadas existirían, lo cual evidentemente no es el caso. Por lo tanto, el círculo de radio 1 con el punto $z = 0$ como centro es el círculo más grande en cuyo interior la función es todavía analítica.

Este ejemplo ilustra el hecho de que el comportamiento de las series de potencias desde el punto de vista de su convergencia, que el análisis real deja en el misterio, se vuelve completamente inteligible a la luz de lo que se acaba de probar acerca del radio de convergencia.

Por ejemplo, el que la serie geométrica que representa a $1/(1 + z^2)$ no converja sobre el círculo unitario es una consecuencia sencilla del hecho de que la función deja de ser analítica para $z = i$ y $z = -i$. Ahora también se ve que la serie de potencias

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum \frac{B_\nu^* z^\nu}{\nu!}, \tag{8.20}$$

que define a los *números de Bernoulli* (ver el Volumen I, p. 562), debe tener al círculo $|z| = 2\pi$ como círculo de convergencia, porque el denominador de la función se anula para $z = 2\pi i$ pero (aparte del origen) no se anula en ningún otro punto interior al círculo $|z| \leqq 2\pi$.

c. *La teoría de funciones y la teoría del potencial*

Como las funciones analíticas $f = u + iv$ pueden derivarse tantas veces como se desee, se concluye que las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ también tienen derivadas continuas de cualquier orden. Por lo tanto, pueden derivarse las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Si se deriva la primera ecuación con respecto a x y la segunda con respecto a y y se suman, se tiene

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0;$$

en la misma forma, la parte imaginaria, v, satisface la misma ecuación:

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

En otras palabras, *la parte real y la parte imaginaria de una función analítica son funciones de potencial.*

Si dos funciones de potencial, u, v, satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se dice que v es la *conjugada* a u y $-u$ la conjugada a v.

Esto sugiere que la teoría de funciones de una variable compleja y la teoría del potencial en dos dimensiones son esencialmente equivalentes entre sí.

d. El recíproco del teorema de Cauchy

El teorema de Cauchy tiene un recíproco valioso (teorema de Morera):

Si la integral de la función continua $\zeta = u + iv = f(z)$, *a lo largo de toda curva cerrada contenida en su región de definición, R, se anula, entonces* $f(z)$ *es una función analítica en R.*

Para probarlo, nótese que la integral

$$F(z) = \int_{t_0}^{z} f(t)\, dt,$$

calculada a lo largo de cualquier trayectoria que una un punto fijo t_0 con un punto variable z, es independiente de la trayectoria. Entonces, por (8.11c), p. 869.

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} [f(t) - f(z)]\, dt \to 0 \qquad (h \to 0).$$

De donde, $F(z)$ tiene por derivada $F'(z) = f(z)$. Por lo tanto, $F(z)$ es analítica y, por el resultado antes obtenido, también lo es su derivada, $f(z)$.

El recíproco del teorema de Cauchy indica que podría haberse remplazado el postulado de diferenciabilidad por el postulado de integrabilidad (es decir, que la integral de línea es independiente de la trayectoria). La equivalencia de estos dos postulados es una característica muy especial de la teoría de funciones de una variable compleja.

e. Ceros, polos y residuos de una función analítica

Si la función $f(z)$ se anula en el punto $z = z_0$, se anula el término constante en la serie de Taylor de la función,

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + \cdots,$$

y, posiblemente, también se anulen otros términos de la serie. Entonces puede factorizarse $(z - z_0)^n$ en la serie de potencias, con lo cual resulta

$$f(z) = (z - z_0)^n\, g(z)$$

donde $g(z_0) \neq 0$. Se dice que un punto z_0 para el cual esto ocurre es *un cero de n-ésimo orden de la función $f(z)$*.

Como se vió anteriormente, la recíproca, $1/f(z) = q(z)$, de una función analítica, también es analítica, excepto en los puntos donde $f(z)$ se anula. Si z_0 es un cero de n-ésimo orden de $f(z)$, la función $q(z)$ puede representarse en la vecindad del punto z_0 en la forma

$$q(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^n} h(z),$$

donde $h(z)$ es analítica en la vecindad de $z = z_0$. En el punto $z = z_0$ la función $q(z)$ deja de ser analítica. A este punto se le da el nombre de *singularidad* (*punto singular*). En este caso particular se dice que la singularidad es un *polo de la función $q(z)$, de n-ésimo orden*. Si se considera la función $h(z)$ desarrollada en potencias de $(z - z_0)$ y, a continuación se divide entre $(z - z_0)^n$ término a término, en la vecindad del polo se obtiene un desarrollo de la forma

$$q(z) = c_{-n}(z - z_0)^{-n} + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots,$$

donde los coeficientes de las potencias de $(z - z_0)$ se denotan por c_{-n}, $\ldots$, c_{-1}, c_0, c_1, $\ldots$.

Si se trata de un polo de primer orden (es decir, si $n = 1$), inmediatamente se obtiene el coeficiente c_{-1} a partir de la relación

$$c_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) q(z).$$

Puesto que

$$\frac{1}{q(z)\,(z-z_0)} = \frac{f(z)}{z-z_0} = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0},$$

para el coeficiente de $1/(z - z_0)$ en el desarrollo de $q(z)$ se tiene

(8.21a) $$c_{-1} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Del mismo modo, si $q(z) = r(z)/\phi(z)$, donde $\phi(z)$ tiene un cero de primer orden en $z = z_0$ y $r(z_0) \neq 0$, en el desarrollo de $q(z)$ se tiene

(8.21b) $$c_{-1} = \frac{r(z_0)}{\phi'(z_0)}.$$

Si una función está definida y es analítica en toda una vecindad del punto z_0 pero no en el propio punto, su integral a lo largo de una circunferencia completa que encierre al punto z_0 no será, en general cero. Sin embargo, por el teorema de Cauchy, la integral es independiente del radio de esta circunferencia y tiene, por lo común, el mismo valor para todas las curvas cerradas, C, que formen la frontera de una región suficientemente pequeña que encierre al punto z_0. El valor de la integral calculada alrededor del punto para un recorrido en el sentido positivo se llama *el residuo* en dicho punto.

Si la singularidad es un polo de n-ésimo orden y si se integra el desarrollo de la función, la integral de la serie con índices positivos es cero, ya que esta serie de potencias aún es analítica en el punto z_0.

Una vez integrado, el término $c_{-1}(z - z_0)^{-1}$ da el valor $2\pi i c_{-1}$, mientras que los términos con índices negativos superiores dan 0, porque la integral indefinida de $(z - z_0)^{-\nu}$ para $\nu > 1$ es $(z - z_0)^{-\nu+1}/(1 - \nu)$, como en el caso real, de modo que la integral sobre una curva cerrada se anula.

Por lo tanto, el residuo de una función en un polo es $2\pi i c_{-1}$.

En la sección siguiente nos familiarizaremos con la utilidad de esta idea según la expresa el teorema siguiente:

Teorema de los residuos *Si la función $f(z)$ es anlítica en el interior de una región R y sobre su frontera, C, excepto en un número finito de polos interiores, la integral de la función tomada a lo largo de C en el sentido positivo es igual a la suma de los residuos de la función en los polos encerrados por la frontera C.*

Partiendo de las proposiciones anteriores inmediatamente se llega a la demostración.

Ejercicios 8.4

1. Probar, sin aplicar directamente la teoría de las series de potencias, que la derivada de una función analítica es diferenciable, por medio de derivación sucesiva bajo del signo integral en la fórmula de Cauchy; justificar la validez de este proceso.

2. Demostrar que la función

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\frac{z^n}{\zeta^n}\, d\zeta,$$

donde la integral se evalúa sobre un contorno simple que encierra a los puntos $\zeta = 0$ y $\zeta = z$, es un polinomio $g(z)$ de grado $n - 1$ tal que

$$g^{(m)}(0) = f^{(m)}(0) \qquad (m = 0, 1, \ldots, n - 1).$$

3. Demostrar que para toda función de potencial, u, es posible construír una función conjugada, v, y determinarla de modo único, aparte de una constante aditıva, siempre que el dominio sea simplemente conexo.

4. ¿Cuáles son los residuos de $f(z) = (2z - 1)/(z^2 - 1)$ en sus polos?

5. Si $f(z)$ es acotada, $|f(z)| < M$, en todo el plano complejo, demostrar que

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\right] dt$$

puede hacerse tan pequeña como se desee, tomando la integral sobre una circunferencia lo suficientemente grande. En consecuencia, $f(z) = f(0)$; es decir, la función es constante.

6. Sea $f(z)$ analítica para $|z| \leqq \rho$. Si M es el máximo de $|f(z)|$ sobre la circunferencia $|z| = \rho$, entonces los coeficientes de la serie de potencias para f,

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu,$$

satisfacen la desigualdad

$$|a_\nu| \leqq \frac{M}{\rho^\nu}.$$

Nótese que partiendo de este resultado también se llega a la conclusión del Ejercicio 5.

7. Sea $P(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_0$ un polinomio de grado positivo, n. Demostrar que la hipótesis de que $P(z)$ no tiene raíces implica que $f(z) = 1/P(z)$ es acotada y, por tanto, constante (por el Ejercicio 5 o el Ejercicio 6) y, entonces, que $f(z)$ es idénticamente cero. Esto prueba el *teorema fundamental del álgebra:* que todo polinomio de

grado positivo con coeficientes complejos tienen al menos una raíz compleja.

8. Sea $f(z)$, analítica sobre una curva simple cerrada, C, y en su interior, con la excepción posible de un número finito de puntos interiores. Considérese

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

tomada en el sentido positivo sobre C.

(a) Demostrar que si f tiene un cero de orden n en α y ningunos otros polos o ceros en el interior de C o sobre ella, entonces $I = n$.

(b) Demostrar que si f tiene un polo de orden m en α y ningún otro polo o cero en el interior de C o sobre ella, entonces $I = -m$.

(c) Demostrar que si f tiene un número finito de ceros y polos en el interior de C, ninguno sobre C, entonces I es el número de ceros menos el número de polos, contando la multiplicidad; es decir, si los ceros tienen multiplicidades $n_1, n_2, \ldots, n_j$ y los polos, multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_k$, entonces

$$I = n_1 + n_2 + \cdots + n_j - m_1 - m_2 - \cdots - m_k.$$

9. (a) Dos polinomios, $P(z)$ y $Q(z)$, son tales que en todo punto sobre un cierto contorno cerrado, C,

$$|Q(z)| < |P(z)|.$$

Probar que las ecuaciones $P(z) = 0$ y $P(z) + Q(z) = 0$ tienen el mismo número de raíces dentro de C. (Considerar la familia de funciones $P(z) + \theta Q(z)$, donde el parámetro θ varía desde 0 hasta 1.)

(b) Probar que todas las raíces de la ecuación

$$z^5 + az + 1 = 0$$

están dentro del círculo $|z| = r$ si

$$|a| < r^4 - \frac{1}{r}.$$

10. Usar el Ejercicio 8(b) para demostrar que un polinomio, $P(z)$, de grado n tiene precisamente n raíces, contando la multiplicidad.

11. (a) Si $f(z)$ tiene una raíz simple, α, dentro de una curva cerrada, C, probar que esta raíz está dada por

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_C z \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

(b) Interpretar la integral de la parte (a) cuando $f(z)$ tiene un número finito de ceros y polos, todos en el interior de C.

12. Probar que e^z no puede anularse para valor alguno de z.

8.5 Aplicaciones a la integración compleja (Integración de contorno)

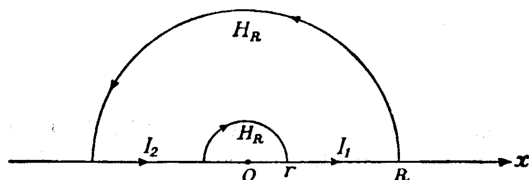
A menudo, el teorema de Cauchy y el teorema de los residuos nos permiten evaluar integrales definidas reales, considerando éstas como integrales a lo largo del eje real de un plano complejo y, a continuación, simplificando el argumento mediante la modificación apropiada de la trayectoria de integración.[1] De esta manera, a veces se obtienen evaluaciones sorprendentemente elegantes de integrales definidas que parecen complicadas, sin que necesariamente sea posible calcular las integrales indefinidas correspondientes. Se discutirán algunos ejemplos típicos.

a. Demostración de la fórmula

(8.22) $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Aquí se da la siguiente demostración instructiva de esta importante fórmula que ha sido discutida ya por otros métodos (Volumen I, p. 589); Volumen II, p. 471).

Intégrese la función e^{iz}/z en el plano complejo z, a lo largo de la trayectoria C que se muestra en la Fig. 8.8, la cual consiste de un semicírculo. H_R de radio R y un semicírculo, H_r de radio r, ambos con sus centros en el origen, y de los dos intervalos simétricos, I_1 e I_2 del eje real. Como la función e^{iz}/z es regular en el anillo circular encerrado por estas fronteras, el valor de la integral en cuestión es cero. Combinando las integrales a lo largo de I_1 e I_2, se tiene



$$\int_{H_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{H_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + 2i\int_r^R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = 0.$$

[1]Siempre es necesario reducir la integral considerada a otra integral sobre una trayectoria *cerrada* en el plano complejo.

Hágase tender ahora R a infinito. Entonces la integral a lo largo del semicírculo H_R tiende a cero, porque si se pone $z = R(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = Re^{i\theta}$ para los puntos del semicírculo, se tiene

$$e^{iz} = e^{iR\cos\theta}\, e^{-R\operatorname{sen}\theta},$$

y la integral queda

$$i\int_0^\pi e^{iR\cos\theta}\, e^{-R\operatorname{sen}\theta}\, d\theta.$$

El valor absoluto del factor $e^{iR\cos\theta}$ es 1, mientras que el valor absoluto del factor $e^{-R\operatorname{sen}\theta}$ es menor que 1 y, además, tiende uniformemente a cero conforme R tiende a infinito, en todo intervalo $\varepsilon \leqq \theta \leqq \pi - \varepsilon$. Así, inmediatamente se deduce que la integral a lo largo de H_R tiende a cero a medida que $R \to \infty$. Como el lector puede probar fácilmente por sí mismo, la integral a lo largo del semicírculo H_r tiende a $-\pi i$ a medida que $r \to 0$. La integral a lo largo de los dos intervalos simétricos I_1, I_2 del eje real tiende a

$$2i\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \quad \text{conforme} \quad R\to\infty \quad \text{y} \quad r\to 0.$$

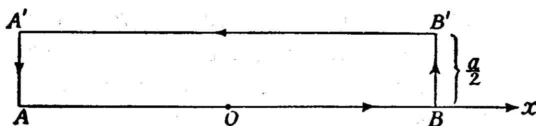
Combinando estas proposiciones se obtiene inmediatamente la relación (8.22).

b. Demostración de la fórmula

$$\text{(8.23)} \qquad \int_0^\infty (\cos ax)e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{\,a^2/4}$$

(Ver la Sección 4.12, p. 476, Ejercicio 9a).

Intégrese la expresión e^{-z^2} a lo largo de un rectángulo $ABB'A'$ (Fig. 8.9), en el cual la longitud de los lados verticales AA', BB' es $a/2$ y la de los lados horizontales AB, $A'B'$ es $2R$. Por el teorema de Cauchy, esta integral vale cero. Sobre los lados verticales se tiene



$$|e^{-z^2}| = |e^{-(x^2-y^2)}\, e^{-2ixy}| = e^{-R^2}e^{y^2} < e^{-R^2}\, e^{a^2/4},$$

y esta expresión tiende uniformemente a cero conforme R tiende a infinito. Así, las porciones de la integral completa que provienen de los lados verticales tienden a cero y, si se realiza el paso hacia el límite $R \to \infty$ y se nota que $dz = d(x + \frac{1}{2}ia) = dx$, sobre $A'B'$, puede expresarse el resultado del teorema de Cauchy como sigue:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia/2)^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Es decir, puede desplazarse la trayectoria de integración de la integral infinita paralelamente a sí misma. Por los resultados antes obtenidos (ver la p. 472) el valor de la integral de la derecha es $\sqrt{\pi}$. La integral de la izquierda inmediatamente queda

$$e^{a^2/4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(\cos\ ax - i \operatorname{sen}\ ax)dx = 2e^{a^2/4}\int_0^{\infty} \cos ax\, e^{-x^2}\, dx,$$

dado que sen ax es una función impar y cos ax una función par. Esto prueba la fórmula (8.23).

c. *Aplicación del teorema de los residuos a la integración de funciones racionales*

Para la función racional

$$Q(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n},$$

si el denominador no tiene ceros reales y su grado es mayor que el del numerador al menos en dos unidades, la integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x)\, dx$$

puede evaluarse del modo siguiente: empiécese por tomar la integral a lo largo de un contorno que consista de la frontera de un semicírculo, H, de radio grande, R, (sobre el cual $z = Re^{i\theta}$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$), y el eje real desde $-R$ hasta $+R$. El radio R se elige tan grande que todos

los ceros del denominador se encuentren en el interior del círculo. Consecuentemente, todos los polos de la función $Q(z)$ están en el interior del círculo. Por una parte, la integral es igual a la suma de los residuos de $Q(z)$ en el interior del semicírculo, mientras que, por otra, es igual a la integral

$$I_R = \int_{-R}^{R} Q(x)\, dx$$

más la integral a lo largo del semicírculo H. Por las hipótesis establecidas, existe una constante positiva fija, M, tal que, para valores lo suficientemente grandes de R, se tiene[1]

$$|Q(z)| < \frac{M}{R^2}.$$

La longitud de la circunferencia del semicírculo es πR. Por la fórmula de estimación (8.11c) de la p. 869, la integral a lo largo del semicírculo es, en consecuencia, menor en valor absoluto que

$$\pi R \frac{M}{R^2} = \frac{\pi M}{R}$$

y, por tanto, tiende a cero conforme $R \to \infty$. Esto significa que *la integral*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x)\, dx$$

es igual a la suma de los residuos de $Q(z)$ en el semiplano superior.

Apliquemos ahora este principio a algunos casos especiales de interés. Empecemos por tomar

$$Q(z) = \frac{1}{az^2 + bz + c} = \frac{1}{f(z)},$$

donde los coeficientes a, b, c son reales y satisfacen las condiciones $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$. La función $Q(z)$ tiene un polo simple en el punto

[1]Esto se deduce inmediatamente del hecho de que $Q(z) = (1/z^2)\, R(z)$, donde $R(z)$ tiende a cero conforme $z \to \infty$ (cuando $n > m + 2$) y a a_m/b_n (cuando $n = m + 2$).

$$z_1 = \frac{1}{2a}\{-b + i\sqrt{4ac - b^2}\},$$

del semiplano superior; la raíz cuadrada debe tomarse positiva. Por lo tanto, por la regla general (8.21a), el residuo es $2\pi i\,[1/f'(z_1)]$. Puesto que

$$f'(z_1) = 2az_1 + b = i\sqrt{4ac - b^2},$$

se tiene

(8.24a) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ax^2 + bx + c}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{4ac - b^2}}.$$

Como un segundo ejemplo, se probará la fórmula (ver el Volumen I, p. 290)

(8.24b) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{2}.$$

Aquí, una vez más, se puede aplicar inmediatamente el principio general enunciado. En el semiplano superior la función $1/(1 + z^4) = 1/f(z)$ tiene los dos polos $z_1 = \varepsilon = e^{(1/4)\pi i}$, $z_2 = -\varepsilon^{-1}$ (las dos raíces cuartas de -1 que tienen una parte imaginaria positiva). La suma de los residuos es

$$2\pi i\left\{\frac{1}{f'(z_1)} + \frac{1}{f'(z_2)}\right\} = 2\pi i\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z_1^3} + \frac{1}{z_2^3}\right) = \frac{\pi i}{2}(\varepsilon^{-3} - \varepsilon^3),$$

$$= -\pi i \cdot i\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{4} = \pi\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{2},$$

como se afirmó.

La siguiente demostración de la fórmula

(8.24c) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{4^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

ejemplifica el caso en que se tiene que calcular el residuo en un polo de orden superior.

Si se remplaza x por z, el denominador del integrando es de la forma $(z + i)^{n+1}(z - i)^{n+1}$, y, en consecuencia, el integrando tiene un

polo de $(n+1)$-ésimo orden en el punto $z = +i$. Para encontrar el residuo en ese punto, se escribe

$$\frac{1}{(z^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-i)^{n+1}} \frac{1}{(2i+z-i)^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{(z-i)^{n+1}} \frac{1}{(2i)^{n+1}} \left(1 + \frac{z-i}{2i}\right)^{-n-1}.$$

Si se desarrolla el último factor por el teorema del binomio, el coeficiente del término en $(z-i)^n$ es

$$\frac{1}{(2i)^n} \binom{-n-1}{n} = \frac{1}{(2i)^n} (-1)^n \frac{(n+1) \cdot \cdot \cdot 2n}{1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot n} = \frac{i^n}{2^n} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Por lo tanto, el coeficiente c_{-1} en la serie para el integrando, en la vecindad del punto $z = i$ es igual a

$$\frac{1}{2^{2n+1}} \frac{1}{i} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Entonces, el residuo $2\pi i c_{-1}$ es

$$\frac{\pi}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

lo cual prueba la fórmula.

Como un ejercicio más, aplicando el teorema de los residuos el lector puede probar que

(8.24d) $$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+c^2}\, dx = \frac{1}{2}\pi e^{-|c|}$$

(remplazando sen x por e^{ix}).

d. El teorema de los residuos y las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Sea

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdot \cdot \cdot + a_n z^n = P(z)$$

un polinomio de n-ésimo grado y sea t un parámetro real. Consi-

dérese la integral

(8.25) $$u(t) = \int_C \frac{e^{tz}f(z)}{P(z)}\,dz,$$

tomada a lo largo de cualquier trayectoria cerrada, C, en el plano z que no pase por ninguno de los ceros de $P(z)$, como una función $u(t)$ del parámetro t. Sea $f(z)$ una constante o cualquier polinomio en z de grado menor que n. Por las reglas para la derivación bajo el signo integral, que siguen siendo válidas para el plano complejo, puede derivarse la expresión $u(t)$ una vez, o repetidamente, con respecto a t. Esta derivación con respecto a t bajo el signo integral es equivalente a la multiplicación del integrando por $z, z^2, z^3, \ldots$, según el caso. Si ahora se forma la expresión diferencial $L[u] = a_0u + a_1u' + a_2u'' + \cdots + a_nu^{(n)}$, o, en notación simbólica, $P(D)u$, donde D denota el símbolo de derivación, $D = d/dt$, se tiene

$$P(D)u = L[u] = \int_C e^{tz} f(z)\,dz.$$

Por el teorema de Cauchy, el valor de la integral compleja de la derecha es 0; es decir, la función $u(t)$ es una solución de la ecuación diferencial $L[u] = 0$. Si $f(z)$ es cualquier polinomio de $(n-1)$-ésimo grado, esta solución contiene n constantes arbitrarias. Consecuentemente, puede esperarse que sea posible obtener de este modo la solución más general de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, $L[u] = 0$.

De hecho, las soluciones se obtienen en la forma conocida (ver el Capítulo 6, p. 769), evaluando la integral por la teoría de los residuos, con la hipótesis de que la curva C encierra todos los ceros $z_1, z_2, \ldots, z_n$ del denominador $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$. Si se supone, para empezar, que todos estos ceros son ceros simples, son también polos simples del integrando y, por la fórmula (8.21b), el residuo en el punto z_ν está dado por

$$2\pi i\,\frac{f(z_\nu)}{P'(z_\nu)}\,e^{tz_\nu}.$$

Eligiendo apropiadamente el polinomio $f(z)$ las expresiones $f(z_\nu)/P'(z_\nu)$ pueden hacerse constantes arbitrarias, por consiguiente, se obtiene la solución en la forma

$$u(t) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu e^{z_\nu t},$$

que concuerda con los resultados anteriores.

Si un cero, z_ν del polinomio $P(z)$ es múltiple, digamos de multiplicidad r, de modo que el polo correspondiente del integrando es de r-ésimo orden, el residuo en el punto z_ν debe determinarse desarrollando el numerador $e^{tz} f(z) = e^{tz_\nu} e^{t(z-z_\nu)} f(z)$ en potencias de $z - z_\nu$. Se deja al lector demostrar que el residuo en el punto z_ν da las soluciones $te^{tz_\nu}, \ldots, t^{r-1}e^{tz_\nu}$ así como la solución e^{tz_ν}.

Ejercicios 8.5

1. (a) Supóngase que $f(z)$ es analítica y que $g(z)$ tiene un polo de orden n en $z = \alpha$. Obtener una expresión para el residuo de $f(z)g(z)$ en $z = \alpha$.
   (b) En particular, si $g(z) = (z - \alpha)^{-n}$, demostrar que el residuo es

$$\frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\alpha).$$

2. Si $f(z)$ tiene un cero de orden 2 en α, demostrar que el residuo de $1/f(z)$ en α es

$$-\frac{4\pi i}{3} \frac{f'''(\alpha)}{f''(\alpha)^2}.$$

3. Evaluar, para los enteros no negativos n, m, con $n > m$, las integrales siguientes:

   (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx$

   (b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + x^4)^2} dx$

   (c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} dx.$

4. Sea $f(z)$ un polinomio de grado n que tiene las raíces simples $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Probar que

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu^k}{f'(\alpha_\nu)} = 0 \qquad (k = 0, 1, \cdots, n-2).$$

(Considérese $\int \frac{z^k}{f(z)}$ sobre una curva cerrada que encierre a todas las α_ν.)

5. Deducir el resultado de (8.24d), a saber,

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + c^2} = \frac{1}{2}\pi e^{-|c|}.$$

8.6 Funciones multiformes y la extensión analítica

Al definir las funciones tanto reales como complejas, hasta ahora siempre se ha adoptado el punto de vista de que para cada valor de la variable independiente el valor de la función debe ser *único*. Aún el teorema de Cauchy, por ejemplo, se basa en la hipótesis de que la función puede definirse de modo único en la región bajo consideración. Con todo, a menudo la multiformidad surge como una necesidad en la construcción de las funciones (por ejemplo, al encontrar la inversa de una función única tal como la n-ésima potencia). En el caso real se separaron las diferentes *ramas uniformes* de la función inversa, en procesos de inversión tales como $\sqrt{z}$ $\sqrt[n]{z}$. Sin embargo, se verá que en el caso complejo esta separación ya no es razonable, porque ahora las diversas ramas uniformes están interconectadas en una forma que hace un tanto artificial cualquier separación entre ellas.

Aquí debemos contentarnos con una discusión muy sencilla basada en ejemplos típicos.

Por ejemplo, considérese la inversa, $\zeta = \sqrt{z}$ de la función $z = \zeta^2$. A cada valor de z diferente de cero le corresponden las dos soluciones posibles ζ y $-\zeta$ de la ecuación $z = \zeta^2$. Estas dos ramas de la función están conectadas en la forma siguiente: sea $z = re^{i\theta}$. si entonces se pone $\zeta = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} = f(z)$, $\zeta = f(z)$ es en verdad analítica en toda región simplemente conexa, R, que excluya al origen [donde $f(z)$ ya no es diferenciable]. En tal región, ζ está definida de modo único por el enunciado anterior. Si, empero, se hace que el punto z se mueva alrededor del origen sobre un círculo concéntrico, K, digamos, en la dirección positiva, $\zeta = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$ variará continuamente; sin embargo, el ángulo θ no regresará a su valor original sino que se incrementará en 2π. Así, en esta extensión continua, cuando se regresa al punto z ya no se tiene el valor inicial $\zeta = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$ sino el valor $\sqrt{r}\, e^{i\theta/2}\, e^{2\pi i/2} = -\zeta$. Se dice entonces que cuando la función $f(z)$ se extiende de continuamente sobre la curva cerrada K, no es única.

La función $\sqrt[n]{z}$, donde n es un entero, exhibe exactamente el mismo comportamiento. Aquí, cada revolución multiplica el valor de la función por la n-ésima raíz de la unidad—a saber, $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$— y la función sólo regresa a su valor original después de n revoluciones.

En el caso de la función log z se vió (p. 876) que existe una multiformidad semejante, es decir, cada vez que se rodea continuamente el origen en el sentido positivo, el valor de log z se incrementa en $2\pi i$.

Nuevamente, la función z^α se multiplica por $e^{2\pi i\alpha}$ a cada revolución.

Aunque, en primera instancia, todas estas funciones están definidas de modo único en una región R, se encuentra que son multiformes cuando se les extiende continuamente (como funciones analíticas) y se regresa al punto de partida siguiendo una cierta trayectoria cerrada. Este fenómeno de la multiformidad y la correspondiente teoría general de la extensión analítica no pueden investigarse con mayor detalle dentro de los límites de este libro. Simplemente se señalará que la unicidad de los valores de una función puede asegurarse teóricamente trazando ciertas líneas en el plano z que la trayectoria recorrida por z no pueda cruzar o, como se dice, haciendo *cortes* a lo largo de ciertas líneas. Estos cortes se arreglan de manera tal que ya no sean posibles las trayectorias cerradas en el plano que conducen a multiformidades.

Por ejemplo, la función log z se hace uniforme con sólo cortar el plano z a lo largo del eje real negativo. Lo mismo se aplica a la función $\sqrt{z}$. La función $\sqrt{1 - z^2}$ se vuelve uniforme si se hace un corte a lo largo del eje real entre -1 y $+1$.

Una vez que se ha cortado el plano en esta forma, de inmediato puede aplicarse el teorema de Cauchy a esas funciones. Se dará un ejemplo sencillo, probando la fórmula

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{(x - k)\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - 1}}, \tag{8.27}$$

donde k es una constante que no está sobre la porción del eje real comprendida entre -1y $+1$.

Empecemos por observar que la función

$$\frac{1}{(z - k)\sqrt{1 - z^2}}$$

es uniforme en el plano z, siempre que se haga un corte a lo largo del eje real desde -1 hasta $+1$. Si en el plano complejo nos aproximamos a este corte, S, primero desde arriba y después desde abajo, obtenemos valores iguales y opuestos para la raíz cuadrada $\sqrt{1 - z^2}$,

digamos, positivo desde arriba y negativo desde abajo. Tomemos ahora la integral compleja

$$\int_C \frac{dz}{(z-k)\sqrt{1-z^2}}$$

a lo largo de una trayectoria C como se indica en la Fig. 8.10. Por el teorema de Cauchy, puede hacerse que esta trayectoria se contraiga en torno al corte sin alterar el valor de la integral. Por lo tanto, la integral es igual al valor límite que se obtiene cuando se hace esta contracción, el cual obviamente es igual a $2I$. Por otra parte, si se toma la integral del mismo integrando a lo largo de la circunferencia de un círculo K con radio R y centro en el origen, por las investigaciones anteriores se sabe que esta integral tiende a cero a medida que crece R.[1] Sin embargo, por el teorema de los residuos, la suma de las integrales a lo largo de C y de K es igual al residuo del integrando en el

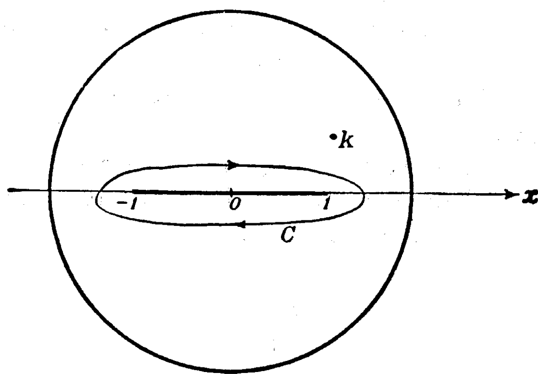


Figure 8.10

polo encerrado, $z = k$; de aquí que $2I$ es igual al residuo en cuestión. Este residuo es

$$2\pi i \lim_{z\to k}(z-k)\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\frac{1}{(z-k)} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2-1}},$$

lo cual prueba la afirmación hecha.

[1] De hecho, su valor es cero, ya que por el teorema de Cauchy es independiente del radio R, siempre que el círculo encierre al polo $z = k$.

Ejemplo de extensión analítica: La función gama

Como conclusión, se dará aún otro ejemplo que muestra la manera en que una función analítica, originalmente definida en una parte del plano, puede extenderse más allá de la región original de definición. La función gama, que se definió para $x > 0$ por medio de la ecuación

$$(8.28) \qquad \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt,$$

será extendida analíticamente también para $x \leqq 0$. Esto pudo haberse hecho por medio de la ecuación funcional

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1),$$

usando esta ecuación para definir $\Gamma(z-1)$ una vez que se conoce $\Gamma(z)$ Por medio de esta ecuación puede imaginarse que $\Gamma(z)$ se extiende primero hacia la franja $-1 < x \leqq 0$, a continuación se extiende hacia la franja siguiente, $-2 < x \leqq -1$, y así sucesivamente.

Aquí se adopta otro método, de mayor interés teórico, para extender la función gama. Considérese la trayectoria C en el plano t, que se indica en la Fig. 8.11, la cual rodea al eje real positivo del plano t y tiende asintóticamente hacia este eje desde cada lado. Por el teorema de Cauchy, fácilmente se ve que el valor de la integral de lazo [1]

$$\int_C t^{z-1} e^{-t}\, dt,$$

no se altera cuando el lazo se contrae teniendo como límite al eje x. Entonces, el integrando $t^{z-1}e^{-t}$ tiende a valores diferentes conforme nos aproximamos al eje x desde arriba y desde abajo, difiriendo los valores en el factor $e^{2\pi i z}$. Así, para $x > 0$ se obtiene la fórmula

[1] Nuevamente ésta es una integral impropia que surge, al efectuar el paso hacia un límite, de una integral a lo largo de una porción finita de C. El lector puede comprobar que tal integral existe, mediante un argumento semejante a los empleados con anterioridad.

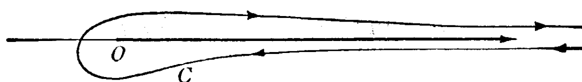


Figura 8.11 Integral de lazo para la función gama.

$$(1 - e^{2\pi iz})\,\Gamma(z) = \int_C t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

Se deduce esta fórmula sujeta a la hipótesis de que x, la parte real de z, es positiva. Sin embargo, ahora se ve que la integral de lazo tiene un significado, sin importar cuál sea el número complejo z, ya que evita el origen $t = 0$. Por lo tanto, esta integral de lazo representa una función definida en todo el plano z. Esta función se define entonces diciendo que es igual a $(1 - e^{2\pi iz})\Gamma(z)$ en todo el plano z. Así, la función gama se ha extendido analíticamente hacia todo el plano complejo, excepto los puntos $x \leqq 0$ para los cuales se anula el factor $(1 - e^{2\pi iz})$, es decir, excepto los puntos $z = 0$, $z = -1$, $z = -2$, y así sucesivamente.

Para investigaciones más detalladas y extensas el lector deberá consultar la literatura de la teoría de funciones.[1]

Ejercicios misceláneos 8

1. Dar la condición para que los tres puntos z_1, z_2, z_3 puedan estar en línea recta.
2. Demostrar que tres puntos distintos, α, β, γ, del plano complejo, forman un triángulo isósceles con vértice en γ si y sólo si existe un real positivo, K, para el cual
$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \quad \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} = k.$$
3. Dar la condición para que los cuatro puntos z_1, z_2, z_3, z_4 estén sobre una circunferencia.
4. Sean A, B, C, D cuatro puntos ordenados sobre la circunferencia de un círculo en el plano z, con coordenadas z_1, z_2, z_3, z_4. Usando estas coordenadas complejas demostrar que $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$.
5. Probar que la ecuación $\cos z = c$ puede resolverse para todos los valores de c.
6. ¿Para qué valores de c la ecuación $\tan z = c$ no tienen solución?

[1] Por ejemplo, L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, Nueva York; MacGraw-Hill, 1953.

7. ¿Para qué valores de z es real (a) $\cos z$, (b) $\operatorname{sen} z$?

8. Encontrar el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum a_n z^n$, donde

(a) $a_n = \frac{1}{n^s}$, siendo s un número complejo con una parte real positiva

(b) $a_n = n^n$

(c) $a_n = \log\ n$.

9. Evaluar las integrales

(a) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1 + x^4}\,dx$

(b) $\int_0^\infty \frac{x^2 \cos x}{1 + x^4}\,dx$

(c) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{q^2 + x^2}\,dx$

(d) $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(x+1)(x+2)}\,dx$ for $1 < \alpha < 2$

mediante integración compleja.

10. Entontrar los polos y los residuos de las funciones

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z},\quad \frac{1}{\cos z},\quad \Gamma(z),\quad \cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$$

11. Demostrar que si x y y son reales

$$|\operatorname{senh}(x + iy)| \geqq A(x),$$

donde $A(x)$ es independiente de y y tiende a ∞ conforme $x \to \pm\infty$.

Integrando $1/[(z - w)\ \operatorname{senh}\ z]$ sobre una sucesión apropiada de contornos, demostrar que

$$\frac{1}{\operatorname{senh}\ w} = \frac{1}{w} + 2w \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{w^2 + \pi^2 n^2}$$

12. Encontrar el valor límite de la integral

$$\int_{C_n} \frac{\cot \pi t}{t - z}\,dt$$

conforme $n \to \infty$, donde la trayectoria de integración es un cuadrado, C_n, con sus lados paralelos a los ejes y a una distancia $n \pm \frac{1}{2}$ del origen. De aquí, aplicando el teorema de los residuos, obtener la expresión para $\cot \pi z$ en fracciones parciales.

13. Usando la ecuación

$$\log(1 + z) = \int_0^z \frac{dt}{1 + t},$$

demostrar que la serie de potencias para $\log(1 + z)$ converge en todo punto del círculo unitario $|z| = 1$, excepto en el punto $z = -1$. Igualando la parte imaginaria de la serie con la parte imaginaria de $\log(1 + e^{i\theta})$ se establece la veracidad de la serie de Fourier (ver el Volumen I, p. 592)

$$\frac{1}{2}\theta = \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta + \frac{1}{3}\operatorname{sen}3\theta - \cdots \qquad (-\pi < \theta < \pi).$$

14. Probar que si f es analítica, $(d^n/dx^n)\, f(\sqrt{x})$ es igual al resultado que se obtiene haciendo y y a iguales a $\sqrt{x}$ en la expresión para

$$2\frac{\partial^n}{\partial y^n}\frac{yf(y)}{(y + a)^{n+1}}.$$

15. (a) Probar que la serie

$$f(z) = f(x + iy) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu^z}$$

converge para $x > 0$.

(b) Probar que esta serie proporciona una extensión para la función zeta (definida en el Ejercicio 5, p. 878) hacia valores de z tales que $0 < x \leqq 1$, por medio de la fórmula

$$f(z) = (1 - 2^{1-z})\zeta(z),$$

la cual es válida para $x > 1$.

(c) Probar que la función zeta tiene un polo de residuo 1 en $z = 1$.

Soluciones

Ejercicios 1.1 (p. 10)

1. (a) Escríbase $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, en forma polar, con $0 < \theta < 2\pi$. Entonces, por el teorema de De Moivre (Volumen I, p. 105),

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

Para $r < 1$, se tiene $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$; por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$. Para $r > 1$, se tiene $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$; por lo tanto, la distancia de z^n al origen y, de aquí, a cualquier punto dado, puede hacerse arbitrariamente grande y sucesión diverge. Para $r = 1$, se tienen dos casos: $z = 1$ $(\theta = 0)$, para el cual $\lim_{n\to\infty} z^n = 1$, $z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$. En este último caso se tiene, para la distancia entre dos puntos sucesivos de la sucesión,

$$|z^{n+1} - z^n| = |z^n| \cdot |z-1| = |z-1|$$
$$= 2 - 2\cos\theta,$$

un valor positivo fijo; entonces, por el criterio de Cauchy, la sucesión debe divergir.

(b) La n-ésima raíz primitiva de z está dada en forma polar por

$$z^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right).$$

Si $z = 0$, se tiene $\lim_{n\to\infty} z^{1/n} = 0$. En todo otro caso se tiene, haciendo $z^{1/n} = x_n + iy_n$,

$$\lim_{n\to\infty} z^{1/n} = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n$$
$$= \lim_{n\to\infty} r^{1/n}\cos\frac{\theta}{n} + i \lim_{n\to\infty} r^{1/n}\operatorname{sen}\frac{\theta}{n} = 1.$$

2. Aplíquense los teoremas sobre límites del Volumen I a las componentes de P_n por separado.
3. Para un punto (a, b) que satisfaga $a^2 + b^2 < 1$, hágase $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$. La vecindad $(x-a)^2 + (y-b)^2 < (1-\alpha)^2$ de (a, b) está contenida en el disco.

   Para un punto (a, b) que satisfaga $a^2 + b^2 = 1$, toda vecindad contiene puntos que no están en el disco.
4. Sea (a, b) cualquier punto de S. Póngase $\gamma = b - a^2 > 0$. Considérese una vecindad ε de (a, b),

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2.$$

Para todos los puntos de la vecindad se tiene $|x - a| < \varepsilon$, $|y - b| < \varepsilon$. Usando

$$a^2 = x^2 - 2(x - a)a - (x - a)^2,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} y > b - \varepsilon &= a^2 + \gamma - \varepsilon \\ &= x^2 - 2(x - a)\, a - (x - a)^2 + \gamma - \varepsilon \\ &> x^2 + \gamma - 2\varepsilon|a| - \varepsilon^2 - \varepsilon > x^2 \end{aligned}$$

siempre que se tome ε igual al menor de los números 1 y $\gamma/(2|a| + 2)$. Así, la vecindad ε está en S.

5. El segmento (junto con sus puntos extremos si éstos no están considerados como puntos del segmento),

Problemas 1.1 (p. 36)

1. Por definición, toda vecindad del punto frontera P contiene puntos de S. Elíjase P_1 en S de modo que $\overline{P_1P} < 1/2$. Como P no está en S, $P_1 \neq P$, y, por lo tanto, $\overline{P_1P} > 0$. Procédase ahora por inducción: dado P_n elíjase P_{n+1} en S de modo que $\overline{P_{n+1}P} < \frac{1}{2}\, \overline{P_nP}$. Evidentemente, los P_n son distintos y $\overline{P_nP} < 1/2^n$.
2. Sea S el conjunto dado; S_c, la cerradura de S; y S_{cc}, la cerradura S_c. Todo punto de S_{cc} está ya sea en S_c o en la frontera de S_c. Si P está en la frontera de S_c, entonces toda vecindad de P contiene al menos un punto, Q, de S_c y un punto, R, fuera de S_c. Puesto que R no está en S_c, no está en S. Dado que un vecindad es abierta, la vecindad de P contiene una vecindad de Q que a su vez debe contener un punto de S. Por tanto, P está en S_c.
3. Sea X cualquier punto de S sobre $\overline{PQ}$. El conjunto de los valores de $\overline{PX}$ es acotado, puesto que $\overline{PX} \leqslant \overline{PQ}$. Sea R el punto sobre $\overline{PQ}$ a una distancia de P igual a la mínima cota superior de los $\overline{PX}$. Cualquier vecindad de R contiene puntos de $\overline{PQ}$ que están en S y puntos que no están en S.
4. Todos los puntos de G son puntos interiores.

Ejercicios 1.2 (p. 41)

1. (a) $\dfrac{27}{8}$

   (c) $\dfrac{1}{(\log \pi)^e}$

   (e) 5.

2. El dominio es el conjunto de los puntos (x, y) y el recorrido es el conjunto de los valores u, donde

(a) $y \geq -x$, $u \geq 0$

(c) $y > -x$, $u > 0$

(e) $y > -\frac{x}{5}$, u real

(g) $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $0 \leq w \leq a$

(h) $y \neq -x$, u real

(i) $x^2 + 2y^2 \leq 3$, $0 \leq u \leq \sqrt{3}$

(j) $x = y = 0$, $u = 0$

(k) $|y| < |x|$, u real

(l) $(x, y) \neq (0, 0)$, $0 \leq u \leq \frac{\pi}{4}$

(m) $y \neq -x$, $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$

(n) $x \neq 0$, $0 < u \leq 1$

(o) $\frac{1}{e} < x + y < e$, $0 \leq u \leq \pi$

(p) $2n\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ y $y \geq 0$, o bien,

$2n\pi + \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2n\pi + \frac{3\pi}{2}$ y $y \leq 0$, $u \geq 0$

3. Para k variables,

$$\frac{1}{k!}(n + 1)(n + 2) \cdots (n + k).$$

(Ver el Volumen I, Capítulo 1, p. 117, Ejercicio 11.)

Ejercicios 1.3 (p. 49)

2. Discontinua en $x = y = 0$.
3. (a) Hágase $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$. Entonces

$$|f(x, y)| = \rho^3 |\cos^3\theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2\theta| < 4\rho^3.$$

Tómese $\delta(\varepsilon) = \sqrt[3]{\varepsilon/4}$. $f(x, y)$ tiene al menos el orden de ρ^3.

4. Como en la teoría de las funciones de una variable real, sumas y productos de funciones continuas y funciones continuas de funciones continuas son continuas.
   (a) Continua.
   (b) Discontinuidad posible sólo en $(0, 0)$. Nótese que con $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$, de $|\operatorname{sen} \alpha| < |\alpha|$, se obtiene

$$\left| \frac{\operatorname{sen} xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| < \rho;$$

de aquí que el límite en $(0, 0)$ existe y es 0.

5. Aplicar el teorema del valor medio del cálculo diferencial con el fin de obtener, para $z \geq 0$, $z + h > 0$,

$$\left| \sqrt{1 + (z + h)} - \sqrt{1 + z} \right| = \frac{|h|}{2\sqrt{1 + (x + \theta h)}} \leq \frac{|h|}{2};$$

de donde, con la elección apropiada de z en cada caso, es suficiente requerir que $|h| < 2\varepsilon$. Hágase $\Delta x = \rho \cos \theta$, $\Delta y = \rho \operatorname{sen} \theta$, donde $\rho < \delta(\varepsilon, x, y)$

(a) Con $z = x^2 + 2y^2$ y $h = \Delta z$, nótese que

$$|\Delta z| = \rho|2x \cos\theta + 4y \operatorname{sen}\theta + \rho(\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta|$$
$$\leq \rho(2|x| + 4|y| + 3\rho) \leq \rho(2|x| + 4|y| + 3),$$

donde se impone $\delta < 1$. Para $|\Delta z| < 2\varepsilon$, basta con requerir

$$\delta < \text{mín}\left(\frac{2\varepsilon}{2|x| + 4|y| + 3}, 1\right).$$

6. Sobre las rectas $y = \pm x$.
7. Sobre las rectas $x = n + \frac{1}{2}$, $y = n + \frac{1}{2}$.
8. Para todos los valores. (Por definición, una función es continua en el exterior de su dominio.)
9. Hágase $z = 1/u$, donde $u = 1 - x^2 - y^2$. $|\Delta z| = |\Delta u|/(u + \theta\,\Delta u)^2$. Para $u > 0$, elíjase $|\Delta u| < 2/u$. Entonces $u + \theta\,\Delta u > u/2$ y

$$|\Delta z| < \frac{4|\Delta u|}{u^2}.$$

Ahora, con $\Delta x = \rho\cos\theta$, $\Delta y = \rho\operatorname{sen}\theta$, $\rho < \delta \leq 1$ y $|x|$, $|y| < 1$,

$$|\Delta u| = |\rho(2x\cos\theta + 2y\operatorname{sen}\theta) + \rho^2|$$
$$< \rho(2|x| + 2|y| + 1) < 5\delta.$$

Por lo tanto, para tener $|z| < \varepsilon$, tómese

$$\delta = \text{mín}\left[\frac{\varepsilon}{20}(1 - x^2 - y^2)^2, 1\right].$$

10. Con $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta$, se tiene

$$P = \rho^2(a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\operatorname{sen}\theta + c\operatorname{sen}^2\theta)$$
$$= \rho^2 f(\theta).$$

La expresión $f(\theta)$ no debe anularse para ningún valor de θ. Por tanto, debe tenerse $ac - b^2 > 0$.

11. Todas discontinuas, (a) sobre la recta $x = 0$, (c) sobre la recta $y = -x$.
12. Para la aproximación a lo largo de una recta, hágase $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta$ con θ fijo. Con el fin de demostrar la discontinuidad para $f(x, y)$, realícese la aproximación a lo largo de la parábola $x = ay^2$, con a arbitraria; para $g(x, y)$, a lo largo del círculo $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.
13. Para (e) y (g) los límites existen. Para (h), hágase $y = e^{-\alpha/|x|}$ con α positiva arbitraria, y demuéstrese para

$$f(x, y) = \frac{y^{|x|}\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} + \left|\frac{y}{x}\right|}$$

que $\lim_{x \to 0} f(x, e^{-\alpha/|x|}) = e^{-\alpha}$.

14. Para el Ejercicio 13(e),

$$\delta(\varepsilon) = -\frac{1}{\sqrt{2}\log\varepsilon}.$$

Para el Ejercicio 13(g)

$$\delta = \min\left(-\frac{\log 2}{\log \varepsilon}, \frac{1}{2}\right).$$

15. Primero hágase $x = y = 0$, enseguida hágase $z = 0$.
16. Se llega a esa conclusión ya que $R(x, y)$ no está definida en el origen y éste es un punto frontera del dominio de R.
17. (a) 1
    (b) 0
    (c) 0.
18. Hágase $y = mx$. Entonces $\lim_{x\to 0} z = 3(1 - m)/(1 + m)$.
19. Ver el Ejercicio 12.
20. La aproximación a lo largo de rectas diferentes de la $x = 0$ da el valor límite 0. La aproximación a lo largo de la curva $y = a/\log x$ da el valor límite arbitrario a.
22. ϕ aplica la parte de su dominio que está dentro de cualquier círculo de radio ρ lo suficientemente pequeño, alrededor del origen, sobre un intervalo de radio $C\rho$ con centro en 0, pudiendo fijarse la constante C independientemente de ρ.

Problemas 1.3 (p. 52)

1. Sea S el dominio de f, S^* el dominio de f^*. Si Q es un punto interior de S, entonces existe una vecindad de Q completamente dentro de S, y la continuidad para f^* es idéntica a la continuidad para f. Si Q en S^* es un punto frontera de S, entonces, ya sea que Q esté o no en S, existe una vecindad δ de Q en la cual $|f(P) - f^*(Q)| < \varepsilon/2$. Para cualquier punto $\hat{Q}$ de S^* en la vecindad δ de Q pero no en S, existen puntos P en S para los cuales $f(\rho)$ está arbitrariamente próxima a $f^*(\hat{Q})$, digamos, $|f(P) - f^*(\hat{Q})| < \varepsilon/2$. Se concluye que $|f^*(\hat{Q}) - f^*(Q)| < \varepsilon$.
2. Si lím $f(x, y) = L$ y $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (\xi, \eta)$, entonces para cualquier ε positivo existe un δ tal que $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ siempre que (x, y) esté dentro de la vecindad δ de (ξ, η). Además, existe un N tal que (x_n, y_n) está dentro de la vecindad δ de (ξ, η) cuando $n > N$. Entonces, para $n > N$, $|f(x_n, y_n) - L| < \varepsilon$.

   Recíprocamente, supóngase que para toda sucesión de puntos (x_n, y_n) en el dominio de f, con límite (ξ, η), se tiene $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = L$. Si f no tuviera el límite L en (ξ, η), entonces, para algún $\varepsilon > 0$ y para todo $\delta > 0$, existiría un punto $(x, y) \neq (\xi, \eta)$ en la vecindad δ de (ξ, η), para el cual $|f(x, y) - L| > \varepsilon$. Hágase $\delta_1 = 1$ y elíjase (x_1, y_1) en la vecindad δ_1 de (ξ, η) de modo que $|f(x_1, y_1) - L| \geq \varepsilon$. Defínanse δ_n y (x_n, y_n) secuencialmente por medio de $\delta_n = \frac{1}{2}\sqrt{(x_{n-1} - \xi)^2 + (y_{n-1} - \eta)^2}$, y $\sqrt{(x_n - \xi)^2 + (y_n - \eta)^2} < \delta_n$ con $|f(x_n, y_n) - L| \geq \varepsilon$. En esta forma se construye una sucesión (x_n, y_n) que viola la hipótesis, si se supone que el límite de f en (ξ, η) no es L.

Ejercicios 1.4a (p. 56)

1. (a) $\frac{\partial z}{\partial x} = nax^{n-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = mby^{m-1}$.

(c) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x^2 - 3y^2}{x^2 y}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3y^2 - 2x^2}{xy^2}$.

(e) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^{3/2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2} x^2 y^{1/2}$.

(g) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^{3/4}}{2x^{1/2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3x^{1/2}}{4y^{1/4}}$.

(j) $\frac{\partial z}{\partial x} = -2x \operatorname{sen}(x^2 + y)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\operatorname{sen}(x^2 + y)$.

(l) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos x \cos y}{\operatorname{sen}^2 y}$.

(n) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

2. (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{3(x^2 + y^2)^{2/3}}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{3(x^2 + y^2)^{2/3}}$

(c) $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{x-y}$

(e) $\frac{\partial f}{\partial x} = yz \cos xz$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{sen} xz$; $\frac{\partial f}{\partial z} = xy \cos xz$.

3. (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = y$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 1$.

(c) Usar $f(x, y) = \frac{x + y}{1 - xy}$;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 + y^2}{(1 - xy)^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1 + x^2}{(1 - xy)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(y + y^3)}{(1 - xy)^3}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{2\,(x + y)}{(1 - xy)^3}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x + x^3)}{(1 - xy)^3}.$$

(e) $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}\, e^{(x^y)}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y\, e^{(x^y)} \log x$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = yx^{y-2}\, e^{(x^y)}\,(y - 1 + yx^y);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = x^{y-1}\, e^{(x^y)}\,(1 + y \log x + yx^y \log x);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y (\log x)^2\, e^{(x^y)}\,(1 + x^y).$$

4. $f_x = 0, f_y = 0, f_z = -3$.

5. 1.

8. $(2/r)$.

9. $a = -3$.

Problemas 1.4a (p. 58)

1. $\binom{n+k}{k}$. (Ver Ejercicios 1.2, número 3.)
2. Considérese una función de la forma $f(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$ donde α es diferenciable y β no lo es.
3. Derivar con respecto a x y a y para obtener, para toda x y y,

$$\phi'(x^2 + y^2) = \frac{\psi'(x)}{2x}\psi(y) = \frac{\psi'(y)}{2y}\psi(x);$$

de donde, $\psi'(x)/2x\psi(x)$ es constante. $f(x, y) = ce^{a(x^2 + y^2)}$.

Ejercicios 1.4c (p. 62)

2. (a) Obsérvese que las primeras derivadas parciales,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \exp\,[-1/(x^2 + y^2)], & x, y \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \exp\,[-1/(x^2 + y^2)], & x, y \neq 0 \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

son acotadas.

(b) El origen es el único punto en cuestión. Considérese

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x\,\dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} + 4x^3 \log\,(x^2 + y^2), & x, y \neq 0 \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

en la vecindad $x^2 + y^2 < \delta^2$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &< 2\delta^3 + 8\delta^2|\delta \log \delta| \\ &< 10\delta^2, \end{aligned}$$

para $\delta < 1$, donde se ha usado $|\delta \log \delta| < 1$, para $\delta < 1$.

Ejercicios 1.4d (p. 66)

1. (a) $2ab$

(c) $ab\,f''(ax + by)$

(e) $-\dfrac{1}{(x+y)^2}$.

2. (b) $f_x = y \operatorname{senh} xy$, $f_y = x \operatorname{senh} xy$, $f_{xx} = y^2 \cosh xy$,

$f_{xy} = xy \cosh xy + \operatorname{senh} xy$, $f_{yy} = x^2 \cosh xy$,

$f_{xxx} = y^3 \operatorname{senh} xy$, $f_{xxy} = xy^2 \operatorname{senh} xy + 2y \cosh xy$,

$f_{xyy} = x^2 y \operatorname{senh} xy + 2x \cosh xy$, $f_{yyy} = x^3 \operatorname{senh} xy$.

(d) $f_x = 1/y - y/x^2$, $f_y = 1/x - x/y^2$, $f_{xx} = 2y/x^3$,

$f_{xyy} = 2/y^3$, $f_{yyy} = -6x/y^4$.

Problemas 1.4d (p. 66)

1. (a), Hágase $z = \log u$. Entonces $z_{xy} = 0$. Por tanto, z_x no depende de y. Hágase $z_x = \alpha(x)$; entonces,

$$z = \int \alpha(x)\,dx + \psi(y) = \phi(x) + \psi(y);$$

de donde

$$u = e^z = e^{\phi(x)}\, e^{\psi(y)}.$$

Ejercicios 1.5a (p. 69)

1. (a) , (b) $f_x(0, 0)$ no existe.
   (c) Hágase $h = \rho \cos\theta$, $k = \rho \operatorname{sen}\theta$. Para la diferenciabilidad sería necesario que

$$f(h, k) - f(0, 0) = \rho \operatorname{sen} 2\theta = f_x(0, 0)h + f_y(0, 0)k + o(\rho),$$

pero $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, lo cual es una contradicción.

2. Para s entre x y $x + \delta_1$, t entre y y $y + \delta_2$, se tiene $|g(s) - g(x)| < \varepsilon_1(\delta_1)$, $|h(t) - h(y)| < \varepsilon_2(\delta_2)$, donde $\lim\limits_{\delta_1 \to 0} \varepsilon_1(\delta_1) = \lim\limits_{\delta_2 \to 0} \varepsilon_2(\delta_2) = 0$. Consecuentemente, por el teorema del valor medio del cálculo integral,

$$\int_{x_0}^{x+\delta_1} g(s)\,ds = \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds + \delta_1 g(\xi),$$

donde $|g(\xi) - g(x)| < \varepsilon_1(\delta_1)$; un resultado semejante se cumple para $h(t)$. Se concluye que

$$f(x + \delta_1, y + \delta_2) = \left[\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds + \delta_1 g(x) + o(\delta_1)\right]$$
$$\left[\int_{y_0}^{y} h(t)\,dt + \delta_2 h(y) + o(\delta_2)\right]$$
$$= f(x.\ y) + \delta_1 g(x) + \delta_2 h(y) + o(\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}).$$

Problemas 1.5a (p. 70)

1. Hágase $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$. Entonces

$$|f(x, y) - f(a, b)| \leq \rho(|f_x(a, b)| + |f_y(a, b)| + \varepsilon),$$

donde $\lim_{\rho \to 0} \varepsilon = 0$. Por tanto, f no sólo es continua sino continua según Lipschitz: para $P = (x, y)$, $A = (a, b)$, se tiene, en alguna vecindad de A, $|f(P) - f(A)| \leq M|P - A|$, donde M es constante.

Ejercicios 1.5b (p. 73)

1. La pendiente de la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $\arctan [(y - y_0)/(x - x_0)] = \alpha$; es decir, la pendiente en el plano z, ρ de la curva $z = \phi(\rho) = f(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \operatorname{sen} \alpha)$.

2. (a) $a, \dfrac{a\sqrt{3} + b}{2}, \dfrac{a + b\sqrt{3}}{2}, b.$

   (c) $2, \sqrt{3} - 2, 1 - 2\sqrt{3}, -4.$

   (e) $-1, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0.$

   (g) $0, 0, 0, 0.$

3. (a) $-8/5$

   (b) -1

   (c) $-2/\sqrt{3}$.

4. $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$.

6. $\partial^2 f/\partial r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$.

Ejercicios 1.5c (p. 76)

1. (a) $z = 8y - 4$

   (c) $3x + 3y - 4z + 5 - 3 \log 2 = 0$

   (e) $z = [\exp(1/\sqrt{2})/\sqrt{2}]\,(x - y + \sqrt{2} + \pi/4)$

   (g) $z = 2e^{-2}(x + y + \frac{1}{2} e^2 \int_0^2 e^{-t^2}\, dt - 2)$.

2. El punto común es el origen.
3. La ecuación del plano que pasa por los tres puntos puede ponerse en la forma

$$z - z_0 = \frac{(x - x_0)[k_1(z_2 - z_0) - k_2(z_1 - z_0)] + (y - y_0)[h_2(z_1 - z_0) - h_1(z_2 - z_0)]}{h_2k_1 - h_1k_2},$$

donde $h_i = x_i - x_0, k_i = y - y_0$, para $i = 1,2$. Hágase $h_i = \rho_i \cos\alpha_i, k_i = \rho_i$ sen α_i. Entonces $z_i - z_0 = \rho_i[(\cos \alpha_i)(\partial z/\partial x) + (\operatorname{sen} \alpha_i)(\partial z/\partial y)] + o(\rho_i)$. Introdúzcase esto en la ecuación del plano, con sen $(\alpha_1 - \alpha_2) \neq 0$, y (x, y) fijo, para obtener el resultado deseado,

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{o(\rho_2)}{\rho_2} + \frac{o(\rho_1)}{\rho_1}.$$

4. Puede suponerse que no todos los coeficientes se anulan, digamos $c \neq 0$. Entonces (x_0, y_0, z_0) está sobre una de las superficies

$$z = \pm\sqrt{\frac{1 - ax^2 - by^2}{c}}.$$

El plano tangente tiene la ecuación

$$z - z_0 = (x - x_0)\, z_x(x_0, y_0) + (y - y_0)\, z_y(x_0, y_0).$$

Derívase la ecuación dé la superficie cuadrática para obtener

$$2ax_0 + 2cz_0\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$2by_0 + 2cz_0\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

e introdúzcanse los valores para $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en la ecuación del plano tangente para obtener si $z_0 \neq 0$),

$$z - z_0 = -\frac{ax_0}{cz_0}(x - x_0) - \frac{by_0}{cz_0}(y - y_0),$$

de donde

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 = 1.$$

Ejercicios 1.5d (p. 79)

1. (a) $(2xy^2 + 3y^3)\, dx + (2x^2y + 9xy^2 - 8y^3)\, dy$.
   (c) $4x^3\, dx - 3y^2\, dy/(x^4 - y^4)$.
   (e) $-(dx + y^{-1}\, dy)$ sen $(x + \log y)$.
   (g) $dx + dy/(1 + (x + y)^2)$.
   (i) $(dx + dy - dz)$ senh $[x + y - z]$.
2. $(-2/10) + (7\sqrt[3]{5}/25)$
3. $e^{x^2+y^2}[(8x^3 + 12x)\, dx^3 + (8x^2y + 4y)\, dx^2\, dy + (8xy^2 + 4x)\, dx\, dy^2 + (8y^3 + 12y)\, dy^3]$.

Ejercicios 1.5e (p. 80)

1. z varía desde -3 hasta -3.5.

2. $-\dfrac{1}{600}$
3. $1/2\,(y|h| + x|k|)$.
4. A partir de $dz = y\,dx + x\,dy$, $dz/z = dx/x + dy/y$.
5. A partir de $dg = 2dx/t^2 - 4x\,dt/t^3$, el error relativo en g es $dg/g = dx/x - 2dt/t$. Por lo tanto, un cierto error relativo en la medición de t tendrá el doble del efecto que el mismo error relativo en la medición de x.

Ejercicios 1.6a (p. 85)

1. (a) $z_x = -2x \log(1+y)$, $z_y = -\dfrac{x^2}{1+y}$, $z_{xx} = -2\log(1+y)$,

$z_{xy} = -\dfrac{2x}{(1+y)}$, $z_{yy} = \dfrac{x^2}{(1+y)^2}$.

(e) Hágase $u = x$, $v = \text{arc tan}\, y$, $z_x = v\sec^2(uv)$, $z_y = [\sec^2(uv)]/(1+y^2)$,

$z_{xx} = 2v^2 \sec^2(uv)\tan(uv)$, $z_{xy} = [\sec^2(uv)/(1+y^2)]\,[1 + 2v\tan(uv)]$,

$z_{yy} = x\sec^2(uv)/(1+y^2)^2\,[x\tan(uv) - 2y]$.

2. (a) $w_x = \dfrac{-x - y\cos z}{(x^2+y^2+2xy\cos z)^{3/2}}$,

$w_y = \dfrac{-y - x\cos z}{(x^2+y^2+2xy\cos z)^{3/2}}$,

$w_z = \dfrac{xy \,\text{sen}\, z}{(x^2+y^2+2xy\cos z)^{3/2}}$.

(b) $w_x = \dfrac{1}{\sqrt{z^2+2zy^2+y^4-x^2}}$,

$w_y = \dfrac{-2xy}{(z+y^2)\sqrt{z^2+2zy^2+y^4-x^2}}$,

$w_z = \dfrac{-x}{(z+y^2)\sqrt{z^2+2zy^2+y^4-x^2}}$

(c) $w_x = 2x + \dfrac{2xy}{1+x^2+y^2+z^2}$,

$w_y = \log(1+x^2+y^2+z^2) + \dfrac{2y^2}{1+x^2+y^2+z^2}$,

$w_z = \dfrac{2yz}{1+x^2+y^2+z^2}$.

(d) $w_x = \dfrac{1}{2(1+x+yz)\sqrt{x+yz}}$,

$w_y = \dfrac{z}{2(1+x+yz)\sqrt{x+yz}}$,

$w_z = \dfrac{y}{2(1+x+yz)\sqrt{x+yz}}$.

3. (a) Considérese la derivada de $z = u^v$ donde u y v son funciones de x:

$$\frac{dz}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \log u \frac{dv}{dx}.$$

Empléese esta fórmula con $u = x$, $v = x$, para obtener

$$\frac{d}{dx}(x^x) = x^x(1 + \log x).$$

Aplíquese una vez más la fórmula con $u = x$, $v = x^x$ para obtener

$$\frac{d}{dx}(x^{(x^x)}) = x^{(x^x)}\, x^x\left[\frac{1}{x} + \log x + (\log x)^2\right].$$

(b) Hágase $y = 1/x$. Entonces

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dz}{dy}.$$

Usese $z = (y^y)^y = u^v$, donde $u = y$, $v = y^2$, para obtener

$$\frac{dz}{dy} = y^{(y^2+1)}(1 + 2\log y) = yz(1 + 2\log y),$$

de donde,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2\log x - 1}{x^{3+1/x^2}}.$$

4. Ver el Problema 1.
5. Hágase uso de la simetría con respecto a las diversas variables y calcúlese en cada caso:

(a) $f_{xx} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$,

(b) $g_{xx} = \dfrac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2)^2}$,

(c) $h_{xx} = \dfrac{6x^2 - 2y^2 - 2z^2 - 2w^2}{(x^2 + y^2)^3}$.

Problemas 1.6a (p. 86)

1. Usense las ecuaciones de Cauchy-Riemann en

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = (u_x^2 + u_y^2)f_{uu} + 2(u_xv_x + u_yv_y)f_{uv} + (v_x^2 + v_y^2)f_{vv} + (u_{xx} + u_{yy})f_u + (v_{xx} + v_{yy})f_v,$$

y obsérvese que u y v también son soluciones de la ecuación de Laplace.

2. Supóngase que el vértice del cono está localizado en el origen (no se pierde generalidad, puesto que una traslación de los ejes no afectará a las derivadas de f). Si un punto (x, y, z) está sobre el cono, entonces también lo está el punto $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, donde λ es cualquier número real. Por lo tanto, se tiene

$$\frac{z}{x}=f\left(\frac{x}{x},\frac{y}{x}\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\phi\left(\frac{y}{x}\right);$$

así, la ecuación del conò puede escribirse en términos de una función ϕ de una variable real:

$$z = x\phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Derivando se llega al resultado.

3. (a) $g_{rr} + \frac{2}{r} g_r$.

(b) A partir de $g_{rr}/g_r = -2/r$, obténgase $\log g_r = -2 \log r +$ constante, etc.

4. (a) $g_{rr} + \frac{n-1}{r} g_r$.

(b) Si $n = 1$, $ar + b$.

Si $n = 2$, $a \log r + b$.

Si $n > 2$, $a/r^{n-2} + \mathrm{b}$ (ver el Problema 3).

Ejercicios 1.6c (p. 91)

1. $\sqrt{u_r^2 + (1/r^2)\, u_\theta^2}$.
2. Hágase $u = f(x, y)$ e introdúzcanse nuevas variables por medio de $\xi = x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta$, $\eta = y\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta$. Obténgase $u_{xx} = \cos^2\theta\, u_{\xi\xi} - 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta\, u_{\xi\eta} + \operatorname{sen}^2\theta\, u_{\eta\eta}$, $u_{yy} = \operatorname{sen}^2\theta\, u_{\xi\xi} + 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\, u_{\xi\eta} + \cos^2\theta\, u_{\eta\eta}$.
4. $z_x = 3$, $z_y = 1$, $z_r = z_x \cos\theta + z_y \operatorname{sen}\theta$, $z_\theta = -z_x r \operatorname{sen}\theta + z_y r\cos\theta$.
5. Nótese que las derivadas no dependen de a y b. La transformación es esencialmente una rotación y traslación de los ejes x, y. Ver los Ejercicios 2 y 3. Usese

$$u_{xx} = \alpha^2 U_{\xi\xi} - 2\alpha\beta U_{\xi\eta} + \beta^2 U_{\eta\eta},$$
$$u_{xy} = \alpha\beta U_{\xi\xi} + (\alpha^2 - \beta^2)\, U_{\xi\eta} - \alpha\beta U_{\eta\eta},$$
$$u_{yy} = \beta^2 U_{\xi\xi} + 2\alpha\beta U_{\xi\eta} + \alpha^2 U_{\eta\eta}.$$

Respecto a una interpretación geométrica, ver 1.6a, Problema 2.

6. $\frac{z^3}{2x^2} T_z + T_{xx} + \frac{z}{x} T_{xz} + \frac{z^2}{x^2} T_{zz}$.

Problemas 1.6c (p. 92)

1. $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$.

Para comparar con 1.6a, Problema 3, anúlense las derivadas de u con respecto a θ y ϕ.

2. Bajo la transformación dada, la ecuación $Af_{xx} + 2Bf_{xy} + Cf_{yy} = 0$ se transforma en $A^*f_{\xi\xi} + 2B^*f_{\xi\eta} + C^*f_{\eta\eta} = 0$, donde

$$A^* = a^2A + 2abB + b^2C$$

$$B^* = acA + (ad + bc)B + bdC$$

$$C^* = c^2A + 2cdB + d^2C$$

(ver el Ejercicio 3). Obsérvese que

$$B^{*2} - A^*C^* = (ad - bc)^2 (B^2 - AC).$$

Por tanto, el signo de $B^{*2} - A^*C^*$ es independiente de la transformación lineal. Se concluye que no existe transformación de este tipo para (a) $B^2 - AC \geqq 0$ o para (b) si $B^2 - AC < 0$

(a) Supóngase que $B^2 - AC < 0$, y hágase $A^* = 1$, $B^* = 0$, $C^* = 1$ en las expresiones anteriores. Obsérvese, a partir de $AC > B^2 \geq 0$, que A y C tienen el mismo signo, que puede suponerse positivo. Si $B = 0$, tómese $b = c = 0, a = 1/\sqrt{A}$, $d = 1/\sqrt{C}$. Si $B \neq 0$, redúzcase primero al caso $B = 0$, tomando, por ejemplo,

$$b = 0, \quad a = \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad c = \frac{B}{\sqrt{A(AC - B^2)}}, \quad d = \frac{-A}{\sqrt{A(AC - B^2)}}.$$

(b) Supóngase que $B^2 - AC > 0$ y hágase $A^* = C^* = 0$, $B^* = 1$ en las expresiones anteriores. Si $B = 0$, entonces A y C tienen signos opuestos. En ese caso, satisfacen las ecuaciones

$$\frac{a}{b} = \sqrt{-\frac{C}{A}}, \quad \frac{d}{c} = \sqrt{-\frac{C}{A}}, \quad bc\sqrt{-AC} = 1;$$

por ejemplo, tómense

$$a = 1, \quad b = \sqrt{-\frac{A}{C}}, \quad c = \frac{1}{2}, \quad d = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{C}{A}}$$

Si $B \neq 0$ y al menos uno de los valores A y C no se anula, digamos, $A > 0$, redúzcase primero la situación al caso $B = 0$, tomando, por ejemplo, $A^* = A$, $C^* = -1/A$, $b = 0$. entonces

$$a = 1, \quad d = \frac{1}{\sqrt{B^2 - AC}}, \quad c = -\frac{B}{\sqrt{A(B^2 - AC)}}$$

Ejercicios 1.7a (p. 94)

1. (a) $(h + k) \cos (x + h + y + k)$

(b) $-\dfrac{h(y + k)}{(x + h)^2} + \dfrac{k}{x + h}$.

2. (a) $-\dfrac{1}{8}$.

(b) $\dfrac{5}{8}e^{5/16}$.

(c) $\dfrac{\pi}{8}$.

Ejercicios 1.7b (p. 97)

1. Para una curva definida por la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con un plano vertical $h(\eta - y) - k(\xi - x) = 0$ que pasa por el punto (x, y), existe una tangente en algún punto interior de cualquier arco, que es paralela a la cuerda que une a los puntos extremos.

2. (a) $\frac{1}{2}$.

   (b) $\frac{8}{3\pi} \text{ arc sen } \frac{8 - 4\sqrt{2} - \sqrt{2}}{3\pi}$.

3. Tómese $x = 0, y = -\frac{1}{2}, \; h = k = \frac{1}{2}$.

5. (a) $\frac{3}{7}$.

   (b) $\frac{23}{54}$.

Problemas 1.7b (p. 97)

1. Basta con probar que f tiene el mismo valor para dos puntos cualesquiera que puedan unirse por medio de un segmento dentro del dominio.

Ejercicios 1.7c (p. 99)

1. xy
2. Obsérvese que df se anula en $(2, 3)$ para $h = 0.1, k = -0.1$. De donde. aproximadamente, $f(2.1, 2.9) = f(2, 3) + \frac{1}{2}d^2f(2, 3) = 79.9$.
3. La aproximación es exacta. El error es cero para todos los órdenes.
4. (a) $x^3 - 2x^2y + y^2 + h(3x^2 - 4xy) + k(2y - 2x^2) + h^2(3x - 2y) - hk4x + k^2 + 6h^3 - 2h^2k$.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(h + 2k)^{2n-1}}{(2n - 1)!}$

   (c) Los casos $x + h > 0$, $x + h < 0$ deben tomarse por separado; los dos casos proporcionan términos de primer orden en h que resultan diferentes:

$$x^4y - 2y^2x - \sqrt{3}\,|x| + h(4x^3y - 2y^2 - \sqrt{3}\,\text{sgn}(x + h)$$
$$+ k(x^4 - 4yx) + h^2 6x^2y + hk4x^3 - k^2 2x + h^3 4xy$$
$$+ h^2k6x^2 - 2hk^2 + h^4y + 4h^3k + h^4k.$$

5. $x + x(y - 1) - 2x(z + 1) - 2x(y - 1)(z + 1) + 2x(z + 1)^2 + x(y - 1)(z + 1)^2$

6. (a) $y - x^2 - \frac{y^3}{3} + x^4y - x^2y^3 + \frac{y^5}{5} + \cdots$

(b) $y + \frac{x^2y}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{x^2y^3}{12} + \frac{x^4y}{24} + \frac{y^5}{120} \cdots$

(c) $1 + y + \frac{y^2}{2} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^3y}{3} + \frac{xy^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \cdots$

(d) $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2} + \cdots$

(e) $x - \frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3y^2}{12} + \frac{5xy^4}{24} + \cdots$

(f) $xy + \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{4} + \frac{xy^3}{3} + \cdots$

(g) $1 + x^2 - y^2 + \frac{x^4}{2} - x^2y^2 + \frac{y^4}{2} + \cdots$

(h) $1 - \frac{3x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} + \cdots$

(i) $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{120} - \frac{x^4y^2}{12} + \frac{x^2y^4}{3} + \cdots$

(j) $x^2 + y^2 - \frac{x^6}{6} - \frac{x^4y^2}{2} - \frac{x^2y^4}{2} - \frac{y^6}{6} + \cdots$

7. Obsérvese que el error es de cuarto orden. En cuarto orden

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 1 - \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{x^4 - 6x^2y^2 + 5y^4}{24} + \cdots;$$

para el término de cuarto orden se tiene

$$\frac{x^4 - 6x^2y^2 + 5y^4}{24} = \frac{(y^2 - x^2)(5y^2 - x^2)}{24}.$$

Para $|x| \leq \pi/6$, $|y| \leq \pi/6$, los dos factores alcanzan sus máximos en $x = 0$, $y = \pi/6$. Por lo tanto, el error se estima aproximadamente en

$$\frac{5}{24}\left(\frac{\pi}{6}\right)^4 \approx .016$$

Problemas 1.7c (p. 99)

1. (a) $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r y^{n-r} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}x^m y^n;$

converge en la franja $|x + y| < 1$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{x^r}{r!}\frac{y^{n-r}}{(n-r)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!};$

converge para todos los valores de x y y.

2. Desarrollar ambos miembros de la fórmula esférica hasta segundo orden en x, y, y z.

3. Desarrollar $f(2h, e^{-1/2h})$ y $f(0, 0)$ hasta segundo orden, en la vecindad de $(h, e^{-1/h})$; súmese y divídase entre h^2.
4. La convergencia se deduce de la convergencia del desarrollo de la función exponencial para una variable. Derivar con respecto a x para obtener

$$2yf(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)y^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2H_{n-1}(x)y^n}{(n-1)!},$$

de donde se llega a (b) simplemente igualando los coeficientes. Partiendo de (b) y de $H_0(x) = 1$, se llega inductivamente a (a). Para obtener (c), derívese con respecto a y e iguálense los coeficientes. Para obtener (d), úsese (b) para remplazar $2nH_{n-1}$ en (c) por H_n' y, a continuación, derívese para obtener

$$H_{n+1}' - 2xH_n' + 2H_n' + H_n'' = 0.$$

En seguida, úsese (b) en este resultado para remplazar H_{n+1}' por $2(n + 1)$ H_n.

Ejercicios 1.8b (p. 109)

1. Aplíquese la continuidad uniforme de $\beta_k(x, k)$ para x en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y k restringido a cualquier subintervalo cerrado de $k_0 < k < k_1$.
2. (a) Para $\varepsilon = k^{-2/3}$ y $1 - \varepsilon < x < 1$, se tiene, para k grande,

$$k \log x = k(x - 1) + 0(k^{-1/3})$$

$$\frac{x-1}{\log x} = 1 + 0(k^{-2/3}),$$

de aquí que

$$\frac{x^k(x-1)}{\log x} = e^{k(x-1)}\,(1 + 0(k^{-1/3})),$$

mientras que para $0 < x < 1 - \varepsilon$,

$$\frac{x^k(x-1)}{\log x} = 0\left(\frac{x-1}{\log x}\, e^{-k^{1/3}}\right).$$

Se deduce que

$$F(k) = \int_{1-\varepsilon}^{1} + \int_{0}^{1-\varepsilon} = \frac{1}{k} + 0(k^{-4/3}).$$

(b) Por el Ejercicio 1,

$$F'(k) = \int_0^1 x^k(x-1)\,dx = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}.$$

De aquí que $F(k) = \log \dfrac{2+k}{1+k} + c$, donde el valor de la constante c resulta ser 0, debido a (a).

Ejercicios 1.9b (p. 121)

1. (a) $\int_0^{2\pi}(-t \operatorname{sen} t + \cos^2 t + \operatorname{sen} t)\, dt = 3\pi$

(b) $\int_{-1}^{1}(-2t^2x_0 - 2tx_0y_0(1 - t^2) + y_0(1 - t^2))\, dt = -\frac{4}{3}(x_0 - y_0).$

Ejercicos 2.1 (p. 176)

1. Si $X = (x, y, z)$ es un punto arbitrario de la recta, entonces

$$\overrightarrow{PX} = \lambda \mathbf{A},$$

donde λ puede ser cualquier número real. Por lo tanto,

$$(x + 2, y, z - 4) = \lambda(2, 1, 3),$$

o bien,

$$\frac{x+2}{2} = y = \frac{z-4}{3}.$$

2. Sea $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{A}$. Cualquier punto X de la recta satisface $\overrightarrow{PX} = \lambda\mathbf{A}$. Sean $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, y $\mathbf{V}$ los vectores de posición de P, Q y X, respectivamente. Entonces,

$$\overrightarrow{PX} = \mathbf{V} - \mathbf{B} = \lambda\mathbf{A} = \lambda(\mathbf{C} - \mathbf{B});$$

o

$$\mathbf{V} = (1 - \lambda)\mathbf{B} + \lambda\mathbf{C}.$$

En particular, si $P = (3, -2, 2)$ y $Q = (6, -5, 4)$, como se dan en (a),

$$(x, y, z) = \lambda(3, -3, 2),$$

o bien,

$$\frac{x}{3} = -\frac{y}{3} = \frac{z}{2}.$$

3. Si $\mathbf{V}$ es el vector de posición de cualquier punto X sobre la recta que une a P con Q, entonces, por la solución del Ejercicio 2,

$$\mathbf{V} = (1 - \lambda)\,\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B},$$

para algún real λ. Por tanto,

$$(1 - \lambda)\,(\mathbf{V} - \mathbf{A}) = \lambda\,(\mathbf{B} - \mathbf{V}) = (1 - \lambda)\,\lambda\,(\mathbf{B} - \mathbf{A})$$

Si $0 < \lambda < 1$, se concluye que $\mathbf{V} - \mathbf{A}$, $\mathbf{B} - \mathbf{V}$ y $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ tienen la misma dirección y $|\mathbf{V} - \mathbf{A}|/|\mathbf{B} - \mathbf{V}| = \lambda/(1 - \lambda)$.

4. Escribir el vector de posición en la forma

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} + \lambda(\mathbf{B} - \mathbf{A}),$$

donde $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ se representa por $\overrightarrow{PQ}$, para ver que $\lambda > 0$.

5. Sean **A, B, C, D, E** los vectores de posición de los puntos P, Q, R, S, M, respectivamente. Tómese el origen 0 en el punto que divide a MS en la razón 1/3. Así, $\mathbf{D} = -3\mathbf{E}$. Como $\mathbf{E} = 1/3\ (\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})$, se deduce que

$$\frac{1}{4}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{0}.$$

De aquí que, por la definición general, 0 es el centro de masa y, eviden temente, no depende del orden de los vértices.

6. Sean PQ y RS las aristas; en la notación de la solución precedente, sus puntos medios tienen los vectores de posición $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ y $\frac{1}{2}(\mathbf{C} + \mathbf{D})$, respectivamente. Por la solución del Ejercicio 5, $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{C} + \mathbf{D})$; de donde los puntos medios son colineales con el centro de masa, 0, y equidistantes de él.

7. Si $P_k = (x_k, y_k, z_k)$, para $k = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$G = (x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\Sigma m_k x_k}{\Sigma m_k}, \frac{\Sigma m_k y_k}{\Sigma m_k}, \frac{\Sigma m_k z_k}{\Sigma m_k}\right)$$

$$\Sigma m_k \mathbf{A}_k = (\Sigma m_k(x_k - x_0), \Sigma m_k(y_k - y_0), \Sigma m_k(z_k - z_0)) = (0, 0, 0).$$

8. El vector cero es el número real 1. La "multiplicación" del "vector" a por el escalar λ significa elevar a a la potencia λ. Por lo tanto, si la "adición" vectorial se denota por $\oplus$, y la multiplicación por un escalar por $\odot$,

$$\lambda \odot (a \oplus b) = (ab)^\lambda = a^\lambda b^\lambda = (\lambda \odot a) \oplus (\lambda \odot b).$$

9. El número complejo $a + ib$ corresponde al vector (a, b).

10. Tómese el origen como el centro de la esfera y sean **A, B, R** los vectores de posición de P, Q, R, respectivamente. Si el radio de la esfera es ρ,

$$|\mathbf{A}|^2 = |\mathbf{B}|^2 = |\mathbf{R}|^2 = \rho^2$$

y $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$. Consecuentemente, de (15c),

$$(\mathbf{R} - \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{B}) = (\mathbf{R} - \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{R} + \mathbf{A}) = |\mathbf{R}^2| - |\mathbf{A}|^2 = 0.$$

11. (a) De $(\mathbf{X} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{A} = 0$, una ecuación del plano es

$$x + 2y - 2z = -1.$$

Con el vector normal unitario $\mathbf{B} = (-1/3, -2/3, 2/3)$, obténgase la forma normal

$$-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = \frac{1}{3}.$$

(b) 2/3.

(c) En el mismo.

12. (a) Hágase $P = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ y sea **B** el vector de posición de P. Si $Q = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$, con vector de posición **X**, es el pie de la perpendicular, entonces

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = c \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} - \mathbf{X} = \lambda\mathbf{A}.$$

Por tanto, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{A}) = c$; de aquí que $\lambda = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - c)/|\mathbf{A}|^2$ y

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} + \mathbf{A}\,(c - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B})/|\mathbf{A}|^2.$$

(b) $(-1/9, 2/9, 2/9)$ y $(7/9, -13/9, -5/9$, respectivamente.

13. Obsérvese primero que $\mathbf{C} \neq \mathbf{O}$; de lo contrario,

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}\mathbf{B},$$

lo que viola la condición de que **A** y **B** son no paralelos. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = 0$.

14. El ángulo entre la recta y el plano es el complemento del ángulo entre la recta y la normal; es decir,

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{\alpha A + \beta B + \gamma C}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\,\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ejercicios 2.2 (p. 195)

1. (a) La recta $x = -1 + 4\lambda$, $y = 2$, $z = 1 + 3\lambda$.
   (b) El plano $x = 2 + 3\mu + \nu$, $y = 1 - 2\mu$, $z = -4 + \mu - \nu$; o bien, $x + 2y + z = 0$.
   (c) El espacio bidimensional lineal de los puntos (x, y, z, w) que satisfacen $x + 2y + z = 0$ y $2y + 2z + w = -4$.
2. (a) $\mathbf{A}_1 = \sqrt{2}\,\mathbf{E}_1 + 2\mathbf{E}_3$.
3. Para $\mathbf{E}_1$ sólo es posible $\mathbf{E}_1 = \mathbf{A}_1/|\mathbf{A}_1|$. Supóngase que se han encontrado esos vectores hasta el de índice $k - 1$. Tómese $\mathbf{E}_k = \mathbf{V}_k/|\mathbf{V}_k|$, donde

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{A}_k - \sum_{\mu=1}^{k-1}(\mathbf{A}_\mu \cdot \mathbf{E}_\mu)\,\mathbf{E}_\mu.$$

Obsérvese que si $\mathbf{E}_\mu$ depende de $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_\mu$, para $\mu = 1, 2, \ldots, k - 1$, entonces $\mathbf{E}_k$ depende de $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$.

4. Sea $\mathbf{A}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n + 1$ cualquier conjunto de $n + 1$ vectores. Si $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ son dependientes, lo es el conjunto completo de $n + 1$ vectores; si no lo son, por el Ejercicio 3, los vectores $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n$ dependen de $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$. Puesto que los $\mathbf{E}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ pueden tomarse como los vectores coordenados, $\mathbf{A}_{n+1}$ depende de $\mathbf{E}_1, \ldots. \mathbf{E}_n$; de aquí que, *a fortiori*, depende de $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$.
5. En la forma vectorial, la recta tiene la ecuación

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}t + \mathbf{B},$$

donde $\mathbf{B} = (b, d, f)$ y $\mathbf{A} = (a, c, e)$. Sea Q el pie de la perpendicular bajada de P a la recta, y $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{X}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, los vectores de posición de P y Q, respectivamente. Puesto que Q está sobre la recta, para algún número τ, se tiene $\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}\tau + \mathbf{B}$. Pero, por $(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{A} = 0$, la distancia que se desea, d, está dada por

$$d^2 = |\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0|^2 = (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) \cdot (\mathbf{A}\tau + \mathbf{B} - \mathbf{X}_0) = (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{X}_0)$$
$$= (x_1 - x_0)(b - x_0) + (y_1 - y_0)(d - y_0) + (z_1 - z_0)(f - z_0),$$

donde,

$$(x_1, y_1, z_1) = (a\tau + b, c\tau + d, e\tau + f)$$

y

$$\tau = \frac{(\mathbf{X}_0 - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|^2} = \frac{a(x_0 - b) + c(y_0 - d) + e(z_0 - f)}{a^2 + c^2 + e^2}.$$

6. No. Para probarlo, demuéstrese que los vectores coeficiente (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) son linealmente independientes. Por ejemplo, úsese el método de solución del Ejercicio 3 para construir un conjunto de tres vectores mutuamente perpendiculares que dependan de los vectores coeficiente.
7. Esto es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones lineales del Ejercicio 6, con las constantes a_1, a_2, a_3, en lugar de 0, 0, 0, a la derecha

$$x_1 = \frac{1}{18}(-5a_1 + a_2 + 7a_3), \quad x_2 = \frac{1}{18}(a_1 + 7a_2 - 5a_3),$$

$$x_3 = \frac{1}{18}(7a_1 - 5a_2 + a_3).$$

8. De la solución del Ejercicio 7,

$$\frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Si a es singular, los vectores columna $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ son dependientes. Si existiera una solución $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para todo $\mathbf{Y}$, entonces cada $\mathbf{Y}$ tendría una representación

$$\mathbf{Y} = x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n,$$

pero los $\mathbf{A}_k$ no generan el espacio.

10.
$$\mathbf{ab} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{ba} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. $\Delta = ad - bc \neq 0$.

$$\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

12. Supóngase que $\mathbf{ae} = \mathbf{ea} = \mathbf{a}$ y $\mathbf{a'e} = \mathbf{e'a} = \mathbf{a}$ para todas las matrices cuadradas a. Entonces $\mathbf{e'e} = \mathbf{ee'} = \mathbf{e} = \mathbf{e'}$.
13. $\mathbf{b}^{-1}\ \mathbf{a}^{-1}$.
14. De la definición, una matriz es singular si y sólo si los vectores columna son dependientes. Por lo tanto, al menos uno de los vectores columna puede expresarse como una combinación lineal de los otros. Se concluye

que cualquier vector imagen que resulte en la aplicación puede expresarse como una combinación lineal de no más de $n - 1$ vectores dados. Recíprocamente, si la dimensión del espacio imagen es menor que n, los vectores columna de la matriz deben ser linealmente dependientes, porque si fueran independientes sus combinaciones lineales generarían un espacio n dimensional.

15. Exprésese $\mathbf{X}$ en la forma $(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$. Entonces, para

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\operatorname{sen} \gamma \\ \operatorname{sen} \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{aX} = (r \cos (\theta + \gamma), \ r \operatorname{sen}(\theta + \gamma));$$

así, puede interpretarse $\mathbf{a}$ como una rotación de los vectores dada por el ángulo γ o bien, una rotación de los ejes dada por el ángulo $-\gamma$. Para

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \operatorname{sen} \gamma \\ \operatorname{sen} \gamma & -\cos \gamma \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{bX} = (r \cos(\gamma + \theta), \ r \operatorname{sen}(\gamma - \theta));$$

que puede interpretarse como una reflexión de los vectores con respecto a la recta inclinada un ángulo $\frac{1}{2}\gamma$ en relación con el eje x, o una inversión del sentido del eje y, seguida por una rotación de los ejes a través del ángulo $-\gamma$.

16. Por (49a), la condición es necesaria para la ortogonalidad. También es suficiente, porque si $\mathbf{A}_k$ es el k-ésimo vector columna de $\mathbf{a}$, también es el k-ésimo vector fila de $\mathbf{a}^T$. Por la definición de multiplicación de matrices, $\mathbf{aa}^T = \mathbf{e}$ implica que

$$\mathbf{A}_j \cdot \mathbf{A}_k = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k \\ 1, & \text{si } j = k. \end{cases}$$

17. Hágase $\mathbf{c} = \mathbf{ab}$. Si $\mathbf{c} = (c_{ij})$, entonces $\mathbf{c}^T = (\mathbf{c}_{ij}{}^T)$, donde

$$c_{ij}{}^T = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}{}^T\, a_{kj}{}^T = \mathbf{b}^T\mathbf{a}^T.$$

18. De los Ejercicios 13, 17 y 16, si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales,

$$(\mathbf{ab})^T = \mathbf{b}^T\mathbf{a}^T = \mathbf{b}^{-1}\, \mathbf{a}^{-1} = (\mathbf{ab})^{-1},$$

lo cual es suficiente para la ortogonalidad de $\mathbf{ab}$.

19. Si $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, entonces, por (47),

$$(\mathbf{aX}) \cdot (\mathbf{aY}) = (x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n) \cdot (y_1\mathbf{A}_1 + y_2\mathbf{A}_2 + \cdots + y_n\mathbf{A}_n)$$
$$= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

20. Una matriz $\mathbf{a}$ que conserva la longitud también debe conservar los productos escalares; porque

$$|\mathbf{aX} + \mathbf{aY}|^2 = |\mathbf{aX}|^2 + |\mathbf{aY}|^2 + 2(\mathbf{aX}) \cdot (\mathbf{aY})$$
$$= |\mathbf{X}|^2 + |\mathbf{Y}|^2 + 2(\mathbf{aX}) \cdot (\mathbf{aY}) = |\mathbf{a}(\mathbf{X} + \mathbf{Y})|^2 = |\mathbf{X} + \mathbf{Y}|^2$$
$$= |\mathbf{X}|^2 + |\mathbf{Y}|^2 + 2\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$$

(compárese con la respuesta al Ejercicio 18). Se llega así a la condición (47), ya que cada vector coordenado $\mathbf{E}_k$ se aplica sobre el vector columna $\mathbf{A}_k$ de $\mathbf{a}$.

21. Sean $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_k$ las partículas y $m_1, m_2, \ldots, m_k$, sus masas, respectivamente. Supóngase que la transformación afín está dada en la forma $\mathbf{X}' = \mathbf{aX} + \mathbf{A}$. Supóngase además que los centros de masa antes y después de la transformación son $\mathbf{X}_0 = \left(\sum_{j=1}^{k} m_j\mathbf{X}_j\right) \Big/ \sum_{j=1}^{k} m_j$, $\mathbf{Y}_0 = \left(\sum_{j=1}^{k} m_j \mathbf{X}_j'\right) \Big/ \sum_{j=1}^{m} m_j$, , respectivamente, y nótese que $\mathbf{X}_0' = \mathbf{aX}_0 + \mathbf{A} = \mathbf{Y}_0$.

Ejercicios 2.3 (p. 216)

1. (a) 0.
   (b) 2.
   (c) 12.
   (d) $(x - y)(y - z)(z - x)(x + y + z)$.
2. $a + c = 2b$.
3. (a) Usese $\det(\mathbf{ea}) = \det(\mathbf{a})$.
   (b) Usese $\det(\mathbf{e}) = \det(\mathbf{aa}^{-1})$.
4. (a) -1.
   (b) 1.
   (c) -1.
   (d) 1.

5. Si todos los elementos del determinante se anulan, el resultado es inmediato. De lo contrario, puede suponerse que $a_{11} \neq 0$, porque si $a_{ij} \neq 0$, pueden intercambiarse la primera y la i-ésima filas y la primera y la j-ésima columnas para colocar a_{ij} en la primera fila y primera columna con, quizá, un cambio de signo en el determinante. Multiplíquese la primera columna por a_{1j}/a_{11} y réstese de la j-ésima columna, con el fin de anular el primer elemento de la j-ésima columna. Procédase de modo semejante para hacer que se anule el primer elemento de cualquier fila. Por medio de esta operación, y una multiplicación de la primera fila por -1 si es necesario, se lleva el determinante a la forma

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

Los mismos procedimientos aplicados al subdeterminante $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$ lo llevan a la forma $\begin{vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{vmatrix}$. Puesto que las operaciones sobre el subdeterminante pueden hacerse extensivas a las filas y columnas del determinante original sin afectar a los elementos nulos de la primera fila y primera columna, se ha llegado a la forma deseada.

6. En (66a), el único término posible, diferente de cero, es aquél para el cual $j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_n = n$.
7. En $a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$, sea k el menor índice para el cual $j_k \neq k$. $j_k < k$, el producto se anula. Si $j_k > k$, entonces k debe aparecer como un índice de fila para un factor a_{km}, donde $k < m$; por lo tanto, el producto se anula un vez más. Así, $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ es el único término posible diferente de cero en (66a).
8. (a) $(x - y)(y - z)(z - x)$.
   (b) -12.
   (c) $2!^2 3!^2 4!$.
9. $x = 3, \quad y = 2, \quad z = 1$.
10. Hágase uso de $\det(\mathbf{a}) \cdot \det(\mathbf{b}) = \det(\mathbf{a}^T\mathbf{b})$.
11. Usese $D = (A + 2B)(A - B)^2$
   $= [(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)]^2$.
12. Dado que el determinante es una forma alternante en los vectores columna, resulta inmediato que $\Delta = A + Bx$. Para $x = -a$, la matriz es triangular inferior, y para $x = -b$, es triangular superior.
   Así, por el resultado del Ejercicio 7, $A + Ba = f(a)$ y $A + Bb = f(b)$.
13. De (57a), con $\mathbf{c} = (c_{jk})$,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk} a_j b_k \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{n} c_{jk} b_k \\ &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{cB}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{n} c_{jk} a_j \\ &= \mathbf{B} \cdot (\mathbf{c}^T\mathbf{A}). \end{aligned}$$

14. Hágase $\mathbf{X} = (x, y, z)$, $\mathbf{A} = (g, h, i)$, y

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}l \\ \frac{1}{2}d & b & \frac{1}{2}f \\ \frac{1}{2}l & \frac{1}{2}f & c \end{pmatrix}$$

y reescríbase la ecuación de la cuádrica en la forma

$$\mathbf{X} \cdot (\mathbf{aX}) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + j = 0.$$

Si la transformación afín está dada en la forma

$$\mathbf{X}' = \mathbf{bX} + \mathbf{B},$$

su inversa es

$$\mathbf{X} = \mathbf{cX}' + \mathbf{C},$$

donde $\mathbf{c} = \mathbf{b}^{-1}$ y $\mathbf{C} = -\mathbf{b}^{-1}\,\mathbf{B}$. Por tanto, la ecuación de la cuádrica en el nuevo sistema coordenado es

$$\mathbf{cX}' \cdot (\mathbf{ac\,X}') + \mathbf{C} \cdot (\mathbf{ac\,X}') + \mathbf{cX}' \cdot (\mathbf{aB})$$
$$+ \mathbf{A} \cdot \mathbf{cX}' + \mathbf{C} \cdot (\mathbf{aC}) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + j = 0.$$

Aplíquese el resultado del ejercicio precedente para poner esto en la forma

$$\mathbf{X}' \cdot (\mathbf{a}'\mathbf{X}') + \mathbf{A}' \cdot \mathbf{X}' + j' = 0,$$

donde

$$\mathbf{a}' = \mathbf{c}^T\mathbf{ac},$$
$$\mathbf{A}' = \mathbf{c}^T(\mathbf{a}^T\mathbf{C} + \mathbf{aB} + \mathbf{A}),$$
$$j' = \mathbf{C} \cdot \mathbf{aC} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + j.$$

15. Compárese con el sistema lineal homogéneo

$$a_1x + a_2y + dz = 0$$
$$b_1x + b_2y + ez = 0$$
$$c_1x + c_2y + fz = 0.$$

Si este sistema tiene una solución con $z = -1$, y, por tanto, una solución no trivial, debe anularse el determinante D. Recíprocamente, si el determinante se anula, los vectores columna son dependientes. En consecuencia, existen las constantes x, y, z, no todas cero, tales que

$$x\mathbf{A}_1 + y\mathbf{A}_2 + z\mathbf{B} = 0,$$

donde $\mathbf{A}_i = (a_i, b_i, c_i)$ y $\mathbf{B} = (d, e, f)$. No es posible que $z = 0$, porque entonces $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ serían dependientes y los tres determinantes de 2×2 dados se anularían. Por lo tanto, puede dividirse entre $-z$ para hacer que el coeficiente de $\mathbf{B}$ sea -1 de esta manera, existe la solución deseada.

16. En la forma vectorial las rectas pueden escribirse como

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}t + \mathbf{B}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{C}t + \mathbf{D}.$$

Las rectas son paralelas si y sólo si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$ son paralelos (esto incluye el caso en el que las rectas coinciden). Se intersectan si y sólo si existen números t_1, y t_2 para los cuales $\mathbf{A}t_1 + \mathbf{B} = \mathbf{C}t_2 + \mathbf{D}$. Así, por la solución del ejercicio precedente, la condición es que la matriz con vectores columna $\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{B} - \mathbf{D}$ tenga un determinante que se anule; es decir,

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 - d_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 - d_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 - d_3 \end{vmatrix} = 0$$

17. Un conjunto de permutaciones que convierte a $j_1, j_2, \ldots, j_n$ en $1, 2, \ldots, n$, también convierte a $1, 2, \ldots, n$ en $k_1, k_2, \ldots, k_n$. En consecuencia, $j_1, j_2, \ldots, j_n$ y $k_1, k_2, \ldots, k_n$ son ambas permutaciones pares o ambas impares de $1, 2, \ldots, n$.
18. En forma vectorial, esto afirma que la ecuación vectorial

$$\mathbf{aX} = \lambda\mathbf{X}$$

debe tener al menos una solución no trivial. Reescríbase la ecuación en la forma de una ecuación homogénea:

$$(\mathbf{a} - \lambda\mathbf{e})\,\mathbf{X} = O,$$

donde $\mathbf{e}$ es la matriz unidad. Esta ecuación tiene una solución no trivial si y sólo si

$$\det(\mathbf{a} - \lambda\mathbf{e}) = 0.$$

En el espacio n dimensional, ésta es una ecuación polinomial de n-ésimo grado en λ, cuyo primer término es $(-1)^n\lambda^n$. Por tanto, siempre existe una solución si n es impar.

Ejercicios 2.4 (p. 245)

1. Sea $\mathbf{X}_0$ el vector de posición de P y exprésese la recta en la forma vectorial $\mathbf{X} = \mathbf{A}t + \mathbf{B}$. La distancia, r, desde P hasta l es $|\mathbf{X}_0 - \mathbf{B}|$ sen θ, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{P} - \mathbf{B}$ y $\mathbf{A}$; de aquí que

$$r = |(\mathbf{X}_0 - \mathbf{B}) \times \mathbf{A}|/|\mathbf{A}|.$$

2. La velocidad es $r\omega$, donde r es la distancia del punto al eje de rotación. Por la solución del ejercicio anterior, con $\mathbf{B}$ representando al origen $\mathbf{X}_0 = (x, y, z)$ y $\mathbf{A} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

$$r\omega = \omega\,[(y\gamma - z\beta)^2 + (z\alpha - x\gamma)^2 + (x\beta - y\alpha)^2]^{1/2}.$$

3. Denótense por $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$, respectivamente, los vectores de posición de los tres puntos. Si $\mathbf{X} = (x, y, z)$ representa cualquier punto del plano, los tres vectores $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}$, $\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}$, $\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}$ están en un espacio bidimensional y, por lo tanto, son dependientes. Como consecuencia,

$$\det(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}, \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}, \mathbf{X}_3 - \mathbf{X}) = 0.$$

4. Sean las ecuaciones de las rectas dadas en forma vectorial por $l: \mathbf{X} = \mathbf{A}t + \mathbf{B}$ y $l': \mathbf{X}' = \mathbf{A}'t' + \mathbf{B}'$. El segmento más corto PP' con un extremo sobre cada recta, debe ser perpendicular a ambas. Porque, digamos, si PP' no fuese perpendicular a l' en P', entonces la perpendicular bajada de P a l' sería más corta. Si $\mathbf{X}$ y $\mathbf{X}'$ son los vectores de posición de P y P', respectivamente,

$$\mathbf{X} - \mathbf{X}' = \mathbf{A}t + \mathbf{B} - \mathbf{A}'t' + B$$
$$= k(\mathbf{A} \times \mathbf{A}').$$

Para determinar k, multiplíquese esta ecuación escalarmente por $\mathbf{A} \times \mathbf{A}'$ lo cual da

$$k = \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{B}') \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{A}')}{|\mathbf{A} \times \mathbf{A}'|},$$

que permite conocer la distancia deseada, d, pues resulta

$$d^2 = |\mathbf{X} - \mathbf{X}'|^2 = k^2 |\mathbf{A} \times \mathbf{A}'|^2$$

o sea,

$$d = \frac{|(\mathbf{B} - \mathbf{B}') \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{A}')|}{|\mathbf{A} \times \mathbf{A}'|}.$$

5. La suma no depende de la elección del origen, ya que una diferente elección del origen, (a, b) equivale a remplazar cada determinante

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} \quad \text{por} \quad \Delta_k' = \begin{vmatrix} x_k - a & x_{k+1} - a \\ y_k - b & y_{k+1} - b \end{vmatrix}$$

Debido a que

$$\Delta_k' = \Delta_k - \begin{vmatrix} x_k & a \\ y_k & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{k+1} & a \\ y_{k+1} & b \end{vmatrix},$$

cada determinante adicional $\begin{vmatrix} x_k & a \\ y_k & b \end{vmatrix}$ aparece dos veces en el total, pero con signos opuestos. Por lo tanto, puede elegirse el origen en el interior del polígono. El polígono es la suma de las áreas de los triángulos OP_kP_{k+1}, $k = 1, \ldots, n$ (donde $P_{n+1} = P_1$), pero el área de OP_kP_{k+1} es precisamente

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}.$$

6. Réstese la tercera fila de las dos primeras para demostrar que el determinante es igual a $\frac{1}{2} \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$, donde $\mathbf{X}_1 = (x_1 - x_3, \; y_1 - y_3)$ y $\mathbf{X}_2 = (x_2 - x_3, y_2 - y_3)$.
7. Si las coordenadas de los vértices son racionales, el área del triángulo, como se define por medio del determinante, evidentemente es racional. Pero para un triángulo equilátero de lado s el área es $\frac{1}{4} s^2\sqrt{3}$, donde

$$s^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \qquad (i \neq j).$$

es claramente racional.
8. (a) En forma vectorial, esto afirma que

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}' \times \mathbf{A}'') \leq |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}'| \cdot |\mathbf{A}''|,$$

lo cual obviamente es cierto, ya que

$$|\mathbf{A}' \times \mathbf{A}''| \leq |\mathbf{A}'| \cdot |\mathbf{A}''|$$

y

$$|D| = |\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}' \times \mathbf{A}'')| \leq |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}' \times \mathbf{A}''|.$$

(b) Sólo puede cumplirse la igualdad si se cumple en las dos desigualdades anteriores. Por tanto **A**, **A**$'$, y **A**$''$ deben ser mutuamente perpendiculares.

9. (a) Si **B** y **C** son dependientes, digamos $\mathbf{C} = \lambda\mathbf{B}$, la identidad es trivialmente cierta. En caso contrario, fórmese la base ortonormal $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, donde los vectores respectivos son vectores unitarios en las direcciones de $\mathbf{B}$, $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$, $\mathbf{B} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$. Escríbanse **A**, **B** y **C** en términos de esta base:

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{E}_1 + a_2\mathbf{E}_2 + a_3\mathbf{E}_3$$
$$\mathbf{B} = b\mathbf{E}_1, \quad \mathbf{C} = c_1\mathbf{E}_1 + c_3\mathbf{E}_3,$$

para obtener $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = -bc_3\mathbf{E}_2$ y

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = bc_3(a_3\mathbf{E}_1 - a_1\mathbf{E}_3).$$

Usese $\mathbf{E}_1 = (1/b)\,\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}_3 = 1/c_3\,[\mathbf{C} - (c_1/b)\mathbf{B}]$ para obtener

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (a_1c_1 + a_3c_3)\mathbf{B} - (a_1b)\mathbf{C}.$$

(b) Obsérvese que

$$\begin{aligned} Z = (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{X}' \times \mathbf{Y}') &= \det(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}' \times \mathbf{Y}') \\ &= \det(\mathbf{Y}, \mathbf{X}' \times \mathbf{Y}', \mathbf{X}) \\ &= [\mathbf{Y} \times (\mathbf{X}' \times \mathbf{Y}')] \cdot \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Aplíquese el Ejercicio 9a para obtener

$$Z = [\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}')\mathbf{X}' - (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}')\mathbf{Y}'] \cdot \mathbf{X}$$

(c) Aplíquese el Ejercicio 9a para reescribir la expresión de la izquierda en la forma

$$U = [(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Z})\mathbf{Y} - (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})\mathbf{Z}] \cdot \mathbf{V},$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= [(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{X})\mathbf{Z} - (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Z})\mathbf{X}] \times [(\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y})\mathbf{X} - (\mathbf{Z} \cdot \mathbf{X})\mathbf{Y}] \\ &= (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{X})(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Z})(\mathbf{Z} \times \mathbf{X}) + (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Z})(\mathbf{Y} \times \mathbf{Z}) \\ &\qquad + (\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y})(\mathbf{Z} \cdot \mathbf{X})(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} U = (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Z})(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{X})(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Z})\,[\mathbf{Y} \cdot (\mathbf{Z} \times \mathbf{X})] \\ - (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})(\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y})(\mathbf{Z} \cdot \mathbf{X})\,[\mathbf{Z} \cdot (\mathbf{X} \times \mathbf{Y})] = 0. \end{aligned}$$

10. Sea **E** el vector unitario en la dirección de $(-1, 0, 1)$; entonces $\mathbf{E} = (-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \tfrac{1}{2}\sqrt{2})$. Sea $\mathbf{X} = (x, y, z)$ el vector de posición de cualquier punto **A** el pie de la perpendicular bajada desde el punto al eje de rotación:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{X} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} = \left(\frac{1}{2}(x - z),\ 0,\ \frac{1}{2}(z - x)\right).$$

Nótese que $\mathbf{X}-\mathbf{A}$ es perpendicular a $\mathbf{A}$ e introdúzcase $\mathbf{E}\times(\mathbf{X}-\mathbf{A})$ perpendicular a estos dos. Si $\mathbf{X}'$ es el vector de posición de la imagen de (x, y, z) bajo la rotación, entonces $\mathbf{X}'-\mathbf{A}$ es perpendicular a $\mathbf{A}$ y la condición de orientación dada conduce a

$$(\mathbf{X}-\mathbf{A})\times(\mathbf{X}'-\mathbf{A}) = r^2 \operatorname{sen}\phi\, \mathbf{E},$$

donde $r = |\mathbf{X}-\mathbf{A}| = |\mathbf{X}'-\mathbf{A}|$ es la distancia de $\mathbf{X}$ al eje. Hágase

$$\mathbf{X}' = \lambda\mathbf{A} + \mu(\mathbf{X}-\mathbf{A}) + \nu[\mathbf{E}\times(\mathbf{X}-\mathbf{A})],$$

lo cual tiene sentido ya que los vectores que aparecen en la combinación lineal son mutuamente perpendiculares. A partir de $(\mathbf{X}'-\mathbf{A})\cdot\mathbf{A} = 0$, se deduce que $\lambda = 1$; de $(\mathbf{X}'-\mathbf{A})\cdot(\mathbf{X}-\mathbf{A}) = r^2\cos\phi$, se tiene $\mu = \cos\phi$. Por último, de lo obtenido en el Ejercicio 9a,

$$\begin{aligned} r^2\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{E} &= (\mathbf{X}-\mathbf{A})\times(\mathbf{X}'-\mathbf{A}) \\ &= \nu(\mathbf{X}-\mathbf{A})\times[\mathbf{E}\times(\mathbf{X}-\mathbf{A})] \\ &= \nu r^2\mathbf{E}; \end{aligned}$$

de donde, $\nu = \operatorname{sen}\phi$. Usese

$$\mathbf{X}-\mathbf{A} = \left(\frac{1}{2}(x+z), y, \frac{1}{2}(x+z)\right)$$

$$\mathbf{E}\times(\mathbf{X}-\mathbf{A}) = \mathbf{E}\times\mathbf{X} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(-y, x+z, -y)$$

para obtener $\mathbf{X}' = \mathbf{a}\mathbf{X}$, donde

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos\phi+1) & -\frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{sen}\phi & \frac{1}{2}(\cos\phi-1) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & \frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{sen}\phi \\ \frac{1}{2}(\cos\phi-1) & -\frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{sen}\phi & \frac{1}{2}(\cos\phi+1) \end{pmatrix}.$$

11. Por el Ejercicio 9a,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{D}]\mathbf{C} - [(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}]\mathbf{D} \\ &= [(\mathbf{C}\times\mathbf{D})\cdot\mathbf{A}]\mathbf{B} - [(\mathbf{C}\times\mathbf{D})\cdot\mathbf{B}]\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Dado que $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ son independientes, $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}\neq 0$ y puede resolverse la ecuación para encontrar $\mathbf{D}$.

12. Sean $\mathbf{E}_1'$, $\mathbf{E}_2'$, $\mathbf{E}_3'$ los vectores coordenados unitarios en el nuevo sistema coordenado. Se dan $\mathbf{E}_3\cdot\mathbf{E}_3' = \cos\theta$, $\mathbf{E}_1\times(\mathbf{E}_3\times\mathbf{E}_3') = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{E}_3$, y $\mathbf{E}_1'\times(\mathbf{E}_3\times\mathbf{E}_3') = -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi\,\mathbf{E}_3'$. Además, $\mathbf{E}_1\cdot(\mathbf{E}_3\times\mathbf{E}_3') = \operatorname{sen}\theta\cos\phi$ y $\mathbf{E}_1'\cdot(\mathbf{E}_3\times\mathbf{E}_3') = \operatorname{sen}\theta\cos\psi$. Donde, por el Ejercicio 9a, $(\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_3') = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$ y $\mathbf{E}_1'\cdot\mathbf{E}_3 = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi$. Ahora, hágase

$$\mathbf{E}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\,\mathbf{E}_j'$$

donde

$$(a_{ij}) = (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j')$$

es la matriz que se busca. La información que ya se tiene conduce a

$$a_{13} = \text{sen } \theta \text{ sen } \phi, \ a_{31} = \text{sen } \theta \text{ sen } \psi, \ a_{33} = \cos \theta.$$

Fórmese $\mathbf{E}_3 \times \mathbf{E}_3' = \text{sen } \theta \text{ sen } \psi\ \mathbf{E}_2' + a_{32}\, \mathbf{E}_1'$ y fórmese el producto escalar con $\mathbf{E}_1'$ para encontrar

$$\mathbf{E}_1' \cdot (\mathbf{E}_3 \times \mathbf{E}_3') = \text{sen } \theta \cos \psi = a_{32}.$$

Por tanto,

$$\mathbf{E}_3 = -\text{sen } \theta \text{ sen } \psi\ \mathbf{E}_1' + \text{sen } \theta \cos \psi\ \mathbf{E}_2' + \cos \theta\ \mathbf{E}_3'.$$

Usando esta expresión para $\mathbf{E}_3$, para encontrar a_{11} y a_{12} resuélvanse las ecuaciones

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_3 = 0, \ |\mathbf{E}_1|^2 = 1,$$

se obtiene

$$a_{11} = -\cos \theta \text{ sen } \phi \text{ sen } \psi \pm \cos \phi \cos \psi,$$

$$a_{12} = -\cos \theta \text{ sen } \phi \cos \psi \pm \cos \phi \text{ sen } \psi.$$

Los signos no determinados en estas expresiones para a_{11} y a_{12} se fijan por medio de la condición $\mathbf{E}_1 \cdot (\mathbf{E}_3 \times \mathbf{E}_3') = \text{sen } \theta \cos \phi$, la cual proporciona el signo más en la expresión para a_{11} y el signo menos para a_{12}. Por último, hágase $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_3 \times \mathbf{E}_1$ para obtener

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} -\cos \theta \text{ sen } \phi \text{ sen } \psi & -\cos \theta \text{ sen } \phi \cos \psi & \text{sen } \theta \text{ sen } \phi \\ \quad + \cos \phi \cos \psi & \quad -\cos \phi \text{ sen } \psi & \\ \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \theta \cos \phi \cos \psi & -\text{sen } \theta \cos \phi \\ \quad + \text{sen } \phi \cos \psi & \quad -\text{sen } \phi \text{ sen } \psi & \\ \text{sen } \theta \text{ sen } \psi & \text{sen } \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Nótese que este resultado también se cumple para $\theta = 0$ ó π, cuando ϕ y ψ se vuelven indeterminados, teniéndose $\phi + \psi = x0x'$ ó $\phi - \psi = x0x'$, respectivamente. Los ángulos ϕ, ψ, θ, son los llamados ángulos eulerianos, y el resultado obtenido indica que la matriz ortogonal más general con determinante Δ igual a $+1$ puede expresarse "paramétricamente" por medio de las tres variables ϕ, ψ, θ, sujetas a las desigualdades

$$0 \leqq \theta \leqq \pi, \quad 0 \leqq \phi < 2\pi, \quad 0 \leqq \psi < 2\pi.$$

13. Sea $\mathbf{A} = a_1\mathbf{E}_1 + a_2\mathbf{E}_2 + \cdots + a_m\mathbf{E}_m$ un vector no nulo de π perpendicular a todos los vectores de π' con, digamos, $a_1 \neq 0$. De (85a), usando $\mathbf{E}_1 = 1/a_1(\mathbf{A} - a_2\mathbf{E}_2 - \cdots - a_m\mathbf{E}_m)$, se obtiene

$$\mu = \frac{1}{a_1} [\mathbf{A} - a_2\mathbf{E}_2 - \cdots - a_m\mathbf{E}_m, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_m; \mathbf{E}_1', \ldots, \mathbf{E}_m')$$

$$= \frac{1}{a_1} [\mathbf{A}, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_m; \mathbf{E}_1', \mathbf{E}_2', \ldots, \mathbf{E}_m'] = 0.$$

Recíprocamente, si $\mu = 0$, los vectores columna en la representación en

forma de determinante, (85ab), de μ son dependientes: para algún conjunto no trivial de coeficientes se tiene

$$\lambda_1 \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_1' + \lambda_2 \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_2' + \cdots + \lambda_m \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_m' = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Entonces

$$\mathbf{E}_k \cdot (\lambda_1 \mathbf{E}_1' + \lambda_2 \mathbf{E}_2' + \cdots + \lambda_m \mathbf{E}_m') = 0$$

y tiene un vector de π' ortogonal a cada vector base y, por consiguiente, a cada vector de π.

Ejercicios 2.5 (p. 259)

1. Sean (x_1', x_2', x_3') las coordenadas de P; (x_1'', x_2'', x_3'') las de Q. Así, $\overrightarrow{PQ}$ representa el vector $\mathbf{U}$, donde $u_i = x_i'' - x_i'$. Las coordenadas de P y Q en el nuevo sistema están dadas por (89a) con apóstrofos apropiados y $\overrightarrow{PQ}$ representa al vector $v_i = y_i'' - y_i'$ cuyas componentes es claro que satisfacen (89a).

5. Represéntese la curva vectorialmente por $\mathbf{X}(t)$ y supóngase que los tres valores del parámetro están dados por t, t_1, t_2, y los puntos correspondientes por $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$, $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}(t_1)$, $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}(t_2)$. La normal al plano que pasa por los tres puntos es paralela a

$$(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}) \times (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}).$$

Haciendo $t_1 - t = h_1$, $t_2 - t = h_2$ y aplicando el teorema de Taylor, se obtiene

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X} + \frac{d\mathbf{X}}{dt} h_i + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} h_i^2 + \cdots.$$

Así se tiene, hasta el orden más bajo,

$$(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}) \times (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}) = \frac{1}{2}\frac{d\mathbf{X}}{dt}\,\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2}(hk^2 - kh^2).$$

En el límite, conforme h y k tienden a 0 y t tiende a t_0, la normal al plano osculador toma la dirección de $d\mathbf{X}/dt \times d^2\mathbf{X}/dt^2$ en $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0)$. Entonces, el vector de posición $\mathbf{Y}$ de un punto del plano osculador satisface

$$(\mathbf{Y} - \mathbf{X}_0) \cdot \left(\frac{d\mathbf{X}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2}\right) = 0.$$

6. Partiendo del resultado del ejercicio precedente debe demostrarse que tanto $d\mathbf{X}/ds$ como $d^2\mathbf{X}/ds^2$ son perpendiculares a $d\mathbf{X}/dt \times d^2\mathbf{X}/dt^2$. Esto es inmediato a partir de

$$\frac{d\mathbf{X}}{ds} = \frac{d\mathbf{X}}{dt}\frac{dt}{ds} \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2\mathbf{X}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{X}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2.$$

7. Supóngase que la curva se da por medio de $\mathbf{X}(s)$, donde s es la longitud de arco, y desarróllese $\mathbf{X}$ por el teorema de Taylor:

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}(s_0) + \mathbf{X}'(s_0)l + \mathbf{Y}0(l^2),$$

donde $l = s - s_0$ y $\mathbf{Y}$ está acotado. Entonces, como $|\mathbf{X}'(s_0)| = 1$,

$$\begin{aligned} d - l &= |\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(s_0)| - l \\ &= |\mathbf{X}'(s_0)l + \mathbf{Y}0(l^2)| - l \\ &\leq |\mathbf{X}'(s_0)|\, l + 0(l^2) - l; \end{aligned}$$

es decir, $d - l = O(l^2) = o(l)$.

8. De la solución del problema 6 anterior,

$$k = \left|\frac{d^2\mathbf{X}}{ds^2}\right| = \left|\mathbf{X}'\frac{d^2t}{ds^2} + \mathbf{X}''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\right|.$$

Nótese que

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\mathbf{X}'|};$$

de donde

$$\frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{\mathbf{X}' \cdot \mathbf{X}''}{|\mathbf{X}'|^4}.$$

Por lo tanto,

$$k^2 = \frac{|\mathbf{X}'|^2|\mathbf{X}''|^2 - (\mathbf{X}' \cdot \mathbf{X}'')^2}{|\mathbf{X}'|^6}.$$

9. De la solución al Ejercicio 6 $d^2\mathbf{X}/dt^2$ es una combinación lineal de $d\mathbf{X}/ds$ y $d^2\mathbf{X}/ds^2$.

10. Considérese C representada por $\mathbf{X}(t)$ y supóngase que el vector de posición $\mathbf{X}(t_0)$, de B no es un punto extremo de C. Sea $\mathbf{Y}$ el vector de posición de A. $|\mathbf{Y} - \mathbf{X}(t_0)|$ es un mínimo si

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{Y} - \mathbf{X}(t)|^2\bigg|_{t = t_0} = 0;$$

es decir,

$$[\mathbf{Y} - \mathbf{X}(t_0)] \cdot \mathbf{X}'(t_0) = 0.$$

11. Sea la curva dada paramétricamente por $\mathbf{X}(\theta)$ donde $x = a \cos\theta$, $y = a \operatorname{sen}\theta$. El plano tangente sólo depende de x y de y, no de z, y forma el ángulo θ con el eje y. La componente z del vector $\mathbf{X}'$ tangente a la curva, satisface

$$\frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \cos\theta,$$

o bien,

$$\frac{z'}{\sqrt{a^2 + z'^2}} = \cot\theta.$$

Por lo tanto,

$$z' = \pm\, a \cot \theta;$$

de donde

$$z = c \pm a \log \operatorname{sen} \theta.$$

Respecto a la curvatura, ver el Ejercicio 8.

12. De $d\mathbf{X}/d\theta = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, \operatorname{senh} A\theta)$, se tiene

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{d\theta^2} = (-\cos\theta,\ -\operatorname{sen}\theta,\ A\cosh A\theta),$$

la solución da la ecuación, para cualquier punto $\mathbf{Y}$, del plano osculador

$$0 = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}) \cdot \left(\frac{d\mathbf{X}}{d\theta} \times \frac{d^2\mathbf{X}}{d\theta^2}\right),$$

donde el vector normal está dado por

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\theta} \times \frac{d^2\mathbf{X}}{d\theta^2} = (N_1, N_2, N_3)$$

y

$$N_1 = A \cos\theta \cosh A\theta + \operatorname{sen}\theta \operatorname{senh} A\theta.$$
$$N_2 = A \operatorname{sen}\theta \cosh A\theta - \cos\theta \operatorname{senh} A\theta$$
$$N_3 = 1.$$

La distancia del plano al origen es $|\mathbf{X} \cdot \mathbf{N}|/|\mathbf{N}|$ y, puesto que $\mathbf{X} \cdot \mathbf{N} = (A + 1/A) \cosh A\theta$ y $|\mathbf{N}|^2 = (A^2 + 1) \cosh^2 A\theta$, el resultado se obtiene inmediatamente.

13. (a) Sea $\mathbf{X}(t)$ la representación paramétrica de la curva y hágase $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}(t_i)$. Por el Ejercicio 3 de la Sección 2.4 el plano que pasa por los tres puntos es

$$(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}) \cdot [\, (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}) \times (\mathbf{X}_3 - \mathbf{X})\,] = 0,$$

o bien,

$$\mathbf{X} \cdot [\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \times \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_3 \times \mathbf{X}_1] = \mathbf{X}_1 \cdot (\mathbf{X}_2 \times \mathbf{X}_3),$$

de lo cual se obtiene el resultado.

(b) Los tres planos osculadores tienen las ecuaciones

$$(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) \cdot (\mathbf{X}_i' \times \mathbf{X}_i'') = 0$$

(Por lo obtenido en el Ejercicio 6) o, en términos de las coordenadas,

$$\frac{3x}{a} - \frac{6t_i}{b} y + \frac{3t_i^2}{c} z - t_i^3 = 0.$$

Por lo tanto, si (x, y, z) es un punto común a los tres planos osculadores, t_1, t_2, t_3 son las tres raíces de la ecuación anterior con coeficientes.

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{3z}{c},$$

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = \frac{6y}{b},$$

$$t_1t_2t_3 = \frac{3x}{a}.$$

14. Dado que una esfera queda determinada por cuatro cualesquiera de sus puntos no coplanares, pueden imponerse cuatro condiciones a la esfera del contacto más cercano: que el contacto de la curva y la esfera sea de tercer orden. Sea $\mathbf{X}(s)$ la representación de la curva en términos de la longitud de arco y $\mathbf{A}$ el centro de la esfera. Requiérase que $|\mathbf{X}-\mathbf{A}|^2$ se anule hasta el tercer orden; así, de $|\dot{\mathbf{X}}|^2 = 1$ y $\dot{\mathbf{X}} \cdot \ddot{\mathbf{X}} = 0$,

$$(\mathbf{X}-\mathbf{A}) \cdot \dot{\mathbf{X}} = 0,$$
$$(\mathbf{X}-\mathbf{A}) \cdot \ddot{\mathbf{X}} + 1 = 0$$
$$(\mathbf{X}-\mathbf{A}) \cdot \dddot{\mathbf{X}} = 0.$$

De las ecuaciones primera y última, $\mathbf{X}-\mathbf{A} = \lambda(\dot{\mathbf{X}} \times \dddot{\mathbf{X}})$, donde λ está dada por la segunda ecuación. De aquí que

$$\mathbf{A} = \mathbf{X} + \frac{\dot{\mathbf{X}} \times \dddot{\mathbf{X}}}{\ddot{\mathbf{X}} \cdot [\dot{\mathbf{X}} \times \dddot{\mathbf{X}}]}.$$

15. Hágase $|\mathbf{X}-\mathbf{A}| = 1$ en la solución del ejercicio anterior.

16. Puesto que, por el Ejercicio 6, ξ_3 es normal al plano osculador $\frac{1}{\tau} = |\xi_3|$. Además, ya que $\dot{\xi}_i$ y ξ_i son perpendiculares,

$$\dot{\xi}_2 = a\xi_1 + b\xi_3 \text{ and } \dot{\xi}_3 = c\xi_1 + d\xi_2.$$

Derívese $\xi_1 = \xi_2 \times \xi_3$ para obtener

$$\frac{1}{\rho}\xi_2 = (\xi_2 \times \dot{\xi}_3) + (\dot{\xi}_2 \times \xi_3)$$
$$= -a\dot{\xi}_2 - c\xi_3;$$

de aquí qu⁻ $a = -1/\rho$ y $c = 0$. De $\dot{\xi}_3 = d\xi_2$, $d = \pm 1/\tau$; elíjase el signo menos. ara determinar b, derívese $\xi_3 = (\xi_1 \times \xi_2)$:

$$\dot{\xi}_3 = -\frac{1}{\tau}\xi_2 = (\xi_1 \times \dot{\xi}_2) - (\xi_2 \times \dot{\xi}_1)$$
$$= -b\,\xi_2;$$

de aquí que $b = 1/\tau$.

17. (a) Derívese $\ddot{\mathbf{X}} = \dot{\xi}_1 = k\xi_2$ para obtener

$$\dddot{\mathbf{X}} = \dot{k}\xi_2 + k\dot{\xi}_2$$
$$= -k^2\xi_1 + \dot{k}\xi_2 + \frac{k}{\tau}\xi_3.$$

(b) Del resultado del Ejercicio 14,

$$\frac{\xi_2}{\tau} + \frac{\dot{k}}{k^2\tau}\xi_3.$$

18. Puesto que $1/\tau = |\dot{\xi}_3| = 0$, entonces $\dot{\xi}_3 = 0$ y, por lo tanto, ξ_3 debe ser un vector constante. A partir de $0 = \xi_1 \cdot \xi_3 = \dot{\mathbf{X}} \cdot \xi_3 = \frac{d}{ds}(\mathbf{X} \cdot \xi_3)$, se concluye que $\mathbf{X} \cdot \xi_3 =$ constante.

19. Sean **A** y **P** los vectores de posición de A y P, respectivamente. Hágase $\mathbf{X} = \mathbf{A} - \mathbf{P}$, de donde $\mathbf{X} = -\mathbf{P}$. La ecuación afirma que

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{X}| = -\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{P}},$$

lo cual se deduce directamente de la fórmula de derivación

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{X}| = \frac{d}{dt}\sqrt{\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}} = \frac{\mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{X}}}{|\mathbf{X}|}$$

con $a = \mathbf{X}/|\mathbf{X}|$.

(a) Hágase $\mathbf{X} = \mathbf{A} - \mathbf{P}$ como en la solución anterior. A partir de esa solución,

$$-\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{X}} = \frac{d}{dt}(|\mathbf{X}|\mathbf{a}) = -(\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{P}})\mathbf{a} + |\mathbf{X}|\dot{\mathbf{a}}.$$

y el resultado que se desea es inmediato.

(b) Introdúzcanse la expresión para $\dot{\mathbf{a}}$ y las expresiones semejantes para $\dot{\mathbf{b}}$ en

$$\ddot{\mathbf{P}} = u\dot{\mathbf{a}} + v\dot{\mathbf{b}} + w\dot{\mathbf{c}} + \dot{u}\mathbf{a} + \dot{v}\mathbf{b} + \dot{w}\mathbf{c}.$$

21. (a) Sea la curva dada por $\mathbf{X}(t)$. Entonces la superficie tiene la ecuación paramétrica

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}(t) + \lambda\dot{\mathbf{X}}(t).$$

El vector $\partial\mathbf{y}/\partial\lambda \times \partial\mathbf{y}/\partial t$ es normal a la superficie, pero

$$\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\lambda} \times \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial t} = \dot{\mathbf{X}}(t) \times [\dot{\mathbf{X}}(t) + \lambda\ddot{\mathbf{X}}(t)] = \lambda\dot{\mathbf{X}}(t) \times \ddot{\mathbf{X}}(t)$$

también es normal al plano osculador.

(b) Hágase $\mathbf{Y} = (x, y, z)$ y $\mathbf{X}(t) = (\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$. Por lo tanto, x y y son funciones de t y λ que satisfacen

$$x = \alpha(t) + \lambda\dot{\alpha}(t)$$

$$y = \beta(t) + \lambda\dot{\beta}(t).$$

Usese

$$u(x, y) = \gamma(t) + \lambda\dot{\gamma}(t)$$

para calcular u_{xx}, u_{yy}, y u_{xy} en términos de las derivadas con respecto a t y λ.

Derívese $\mathbf{Y} = \mathbf{X}(t) + \lambda\dot{\mathbf{X}}(t)$ con respecto a x para obtener $(\lambda = s)$

$$\mathbf{Y}_x = (1,0,u_x) = (\dot{\mathbf{X}} + \lambda\ddot{\mathbf{X}})t_x + \dot{\mathbf{X}}s_x.$$

Fórmese $\dot{\mathbf{X}} \times \mathbf{Y}_x$ e iguálense las componentes en las direcciones x y z para obtener

$$\dot{\beta} u_x = st_x(\beta, \gamma), \quad \dot{\beta} = -st_x(\alpha, \beta),$$

donde (u, v) se define por medio de

$$(u, v) = \dot{u}\ddot{v} - \dot{v}\ddot{u}.$$

Por lo tanto,

$$u_x = -\frac{(\beta, \gamma)}{(\alpha, \beta)}, \quad t_x = -\frac{\dot{\beta}}{s(\alpha, \beta)}.$$

De modo semejante, de $\dot{\mathbf{X}} \times \mathbf{Y}_y$ se obtiene

$$u_y = -\frac{(\gamma, \alpha)}{(\alpha, \beta)}, \quad t_y = \frac{\dot{\alpha}}{s(\alpha, \beta)}.$$

Nótese que u_x y u_y no dependen de λ. En consecuencia,

$$u_{xx} = t_x \frac{d}{dt} u_x = \frac{\dot{\beta}}{s(\alpha, \beta)} \frac{d}{dt} \frac{(\beta, \gamma)}{(\alpha, \beta)}$$

$$u_{yy} = t_y \frac{d}{dt} u_y = \frac{\dot{\alpha}}{s(\alpha, \beta)} \frac{d}{dt} \frac{(\alpha, \gamma)}{(\alpha, \beta)}$$

y

$$u_{xy} = t_y \frac{d}{dt} u_x = -\frac{\dot{\alpha}}{s(\alpha, \beta)} \frac{d}{dt} \frac{(\beta, \gamma)}{(\alpha, \beta)}$$

$$= t_x \frac{d}{dt} u_y = -\frac{\dot{\beta}}{s(\alpha, \beta)} \frac{d}{dt} \frac{(\alpha, \gamma)}{(\alpha, \beta)},$$

a partir de lo cual el resultado es inmediato.

Ejercicios 3.1a (p. 264)

1. Hágase $y_{n+1} = y_n + cf(a, y_n)$, donde c es constante, y aplíquense los métodos del Volumen I, Secciones 6.3c y d, con $\varphi(y) = y + cf(a, y)$. Para garantizar la convergencia, se requiere que $|\varphi'(y)| \leqq q < 1$ sobre algún intervalo que contenga a b, y cuanto menor sea q tanto mejor. Como consecuencia, se procura fijar c de modo que $\varphi'(y)$ sea aproximadamente cero, es decir,

$$c \approx -\frac{1}{f_y(a, b)}.$$

Así, se empieza con la suposición de que $f_y(a, b) \neq 0$.

En la práctica, se elige $c = -1/f_y(a, y_0)$, donde y_0 está próximo a la solución buscada b. Entonces la condición para la convergencia queda

$$|\varphi'(y)| = \left| \frac{f_y(a, y_0) - f_y(a, y)}{f_y(a, y_0)} \right| \leqq q < 1$$

para toda y en alguna vecindad de b. Supóngase que f_y satisface una condición de Lipschitz

$$|f_y(a, \eta_2) - f_y(a, \eta_1)| < K|\eta_2 - \eta_1|$$

en alguna vecindad de b. Dentro de esta vecindad, sea ε el radio de alguna otra vecindad, tal vez menor, donde $\partial f/\partial y$ está acotada fuera de 0,

$$f_y(a, y) > m > 0;$$

esa vecindad existe, en virtud de la condición de Lipschitz, y $f_y(a, b) \neq 0$. Si se elige inicialmente un valor de y_0 que satisfaga

$$|y_0 - b| < \text{máx}\left\{\varepsilon, \frac{qm}{2K}\right\},$$

el esquema de iteración converge hacia b a través de

$$|y_n - b| \leqq \frac{1}{2}q^n|y_0 - b|.$$

Ejercicios 3.1b (p. 266)

1. (a) El plano tangente es horizontal. La superficie intersecta al plano tangente en la pareja de rectas $y = x$ y $y = -x$; de aquí que y no pueda expresarse como una función de x en la vecindad de (x_0, y_0).
   (b) La superficie es un cilindro con generatrices paralelas al vector $\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Por tanto, la recta $y = 1 - x$, $z = 0$ está sobre la superficie y proporciona la solución deseada $y = 1 - x$.
   (c) La superficie es un cilindro con generatrices paralelas a $\mathbf{i} - \mathbf{j}$. La solución es $y = 1/2 - x$.
   (d) El plano tangente $y + z = 0$ no es horizontal. Por lo tanto, la curva $f(x, y) = 0$ es tangente a la recta $y = 0$ en el origen.

Ejercicios 3.1c (p. 270)

1. Restando de ambos miembros la constante de la derecha, puede ponerse cada una de estas ecuaciones en la forma $F(x, y) = 0$. Se satisfacen las condiciones del teorema. En particular, cada punto dado es una solución inicial $F(x_0, y_0) = 0$; y $F_y(x_0, y_0)$ tiene valores diferentes de cero, a saber, (a) 4, (b) -1, (c) 2, (d) 6.

2. (a) $-\dfrac{2x + y}{x + 2y}$; $-\dfrac{5}{4}$.

   (b) Explícitamente, $y = \pi/2x$; de donde, $y' = -\pi/2x^2$. Implícitamente,

$$y' = \frac{\cot xy - xy}{x^2}; \quad -\frac{\pi}{2}.$$

(c) Explícitamente, $y = 1/x$; de aquí que $y' = -1/x^2$. Implícitamente, $y' = -y/x$; -1.

(d) $y' = -\dfrac{y + 5x^4}{x + 5y^4}$; -1.

3. (a) $y'' = \dfrac{-6(x^2 + xy + y^2)}{(x + 2y)^3} = \dfrac{-42}{(x + 2y)^3}$; $-\dfrac{21}{32}$.

(b) $y'' = \dfrac{\pi}{x^3}$; π.

(c) $y'' = \dfrac{2y}{x^2} = \dfrac{2}{x^3}$; 2.

(d) $y'' = -\dfrac{[150\, x^3y^3(10 - xy) + 20(x^6 + y^6) + 8xy - 30]}{(x + 5y^4)^3}$; $-\dfrac{19}{3}$.

4. Por el signo positivo de sus segundas derivadas, b y c.
5. Supóngase que la ecuación define a y como una función diferenciable de x en una vecindad de cada valor extremo. Entonces, en un extremo, $F_x(x, y) = 0$. Máximo, $y = 6$; mínimo, $y = -6$.
6. Hágase $F(x, y) = y - y_0 - \int_{x_0}^{x} f_y(\xi, y)d\xi$ y obsérvese que

$$F_y(x, y) = 1 - \int_{x_0}^{x} f_y(\xi, y)d\xi > 0$$

para x lo suficientemente próximo a x_0.

Ejercicios 3.1d (p. 273)

1. $f(x, y) = y^3 + x$ cerca de $(0, 0)$.
2. La misma que para el Ejercicio 1.
3. Como $F_y(x, y) = (3y^2 - 2y + 1) + x^2$ es la suma de una expresión cuadrática positiva en y y un cuadrado, se deduce que $F_y(x, y) > 0$ para cada x y toda y. En consecuencia, para cada x, $F(x, y)$ es estrictamente creciente en y. Por lo tanto, $F(x, y) = 0$ no puede tener más que una solución, y, correspondiente a cada x fija. Esa solución debe existir porque, para cada x, $y^3 - y^2 + (1 + x^2)y = G(x, y)$ toma valores arbitrariamente grandes de ambos signos, positivos y negativos, para valores apropiados de y. Por el teorema del valor intermedio, se concluye que $G(x,y)$ toma todos los valores reales. En particular, para algún valor de y, $G(x, y) = \phi(x)$; de aquí que, para cada x y este valor de y, $F(x, y) = G(x, y) - \phi(x) = 0$.

Ejercicios 3.1e (p. 276)

1. Hágase $F(x, y, z) = x + y + z - \operatorname{sen} xyz$. $F_z(0, 0, 0) = 1 \neq 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz \cos xyz - 1}{1 - xy \cos xyz}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz \cos xyz - 1}{1 - xy \cos xyz}.$$

2. Dado que cada ecuación puede ponerse en la forma $F(z, x, y, \ldots) = 0$, donde F se forma por medio de operaciones racionales y la aplicación de funciones continuamente diferenciables de una variable, sólo se requiere probar que la derivada F_z en el punto es diferente de cero.

   (a) $F_z = 1$

   (b) $F_z = -6$

   (c) Para $F(x, y, z) = 1 + x + y - \cosh(x + z) - \operatorname{senh}(y + z)$, $F_z = 1$.

3. Para $f(x, y, z) = x + y + z + xyz^3$, $f_z(0, 0, 0) = 1 \neq 0$. Los términos de segundo a cuarto orden se anulan; $z = -x - y + \cdots$.

Ejercicios 3.2a (p. 281)

1. (a) La ecuación sólo es satisfecha por el punto (0, 0); la tangente y la normal no existen.

   (b) $(\xi - x)\ [e^x \operatorname{sen} y - e^y \operatorname{sen} x] + (\eta - y)\ [e^x \cos y + e^y \cos x] = 0$;

   $(\eta - x)\ [e^x \cos y + e^y \cos x] - (\eta - y)\ [e^x \operatorname{sen} y - e^y \operatorname{sen} x] = 0$.

   (c) La ecuación sólo es satisfecha por los puntos $(-1, \pi/2 + 2k\pi)$; la tangente y la normal no existen.

   (d) $(\xi - x)\ (2x + \cos x) + (\eta - y)\ (2y - 1) = 0$;

   $(\xi - x)(2y - 1) - (\eta - y)\ (2x + \cos x) = 0$.

   (e) $(\xi - x)\ (3x^2) + (\eta - y)\ (4y^3 - \operatorname{senh} y) = 0$;

   $(\xi - x)\ (4y^3 - \operatorname{senh} y) - (\eta - y)\ (3x^2) = 0$.

   (f) La ecuación sólo es satisfecha sobre los ejes positivos x y y. Para $x = 0$, $y > 0$, la tangente es $x = 0$, y la normal $\eta = y$; para $y = 0$, $x > 0$, la tangente es $y = 0$, y la normal, $\xi = x$.

2. -1.

3. Del Volumen I, p. 437, Problema 5 de 4.1h,

$$k = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}},$$

donde los apóstrofos indican las derivadas con respecto a θ. Introdúzcanse las expresiones para r' y r'' en términos de las derivadas parciales de f, en la fórmula para k, para obtener

$$k = \frac{r^2 f_r^3 + r(f_r^2 f_{\theta\theta} - 2f_\theta f_r f_{r\theta} + f_\theta^2 f_{rr}) + 2f_\theta^2 f_r}{(f_\theta^2 + r^2 f^2)^{3/2}}.$$

4. Obsérvese que $F_{xx} = F_{yy} = 6(x + y - a) = 0$, cuando $x + y = a$. Aplíquese (13):

$$F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy} = -54axy\, F_{xy} = 0,$$

puesto que $xy = 0$ en una intersección.

5. $a = \pm 1$, $b = -\frac{1}{2}$.

6. Los círculos K, K', K'' pueden denotarse por las ecuaciones

$$K = x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$
$$K' = x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0,$$
$$K'' = x^2 + y^2 + a''x + b''y + c'' = 0.$$

Entonces cualquier círculo que pasa por A y B está dado por $K' + \lambda K'' = 0$. Las condiciones para que el círculo K sea ortogonal a K' y K'' son $aa' + bb' - 2(c + c') = 0$, $aa'' + bb'' - 2(c + c'') = 0$. Partiendo de estas condiciones se llega fácilmente a la relación correspondiente que expresa la ortogonalidad de K y $K' + \lambda K''$

Ejercicios 3.2b (p. 283)

1. (a) Punto doble
   (b) Dos ramas tangentes al eje x
   (c) Un vértice: para $x = 0^+$ la pendiente es 0, para $x = 0^-$ la pendiente es 1
   (d) Cúspide
   (e) Cúspide.
2. Los ejes coordenados.
3. $y = x^2(1 \pm x^{1/2})$. Las dos ramas de la curva que forman la cúspide en el origen están del mismo lado de su tangente común.
4. Las curvas se obtienen haciendo girar a la curva $(x - b)^3 = cy^2$ el ángulo α.
5. Derívese la ecuación $F = 0$ dos veces con respecto a x y aplíquese el hecho de que $F_y = 0$.

$$\varphi = \text{arc tan } \frac{2\sqrt{F_{xy}{}^2 - F_{xx}F_{yy}}}{F_{xx} + F_{yy}};$$

   de donde
   (a) $\pi/2$;
   (b) $\pi/2$.

6. Nótese que las tangentes en el origen son $y = 0$ y $ax + by = 0$. En cada caso desarróllese y hasta el segundo orden:

$$y = \frac{1}{2}y_0''x^2 + \cdots \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{a}{b}x + \frac{1}{2}y_0''x^2 + \cdots.$$

   Introdúzcanse estas expresiones en la ecuación original para obtener y_0''.

$$k = \frac{2c}{a}, \quad k = \frac{2(a^3g - a^2bf - ab^2e - b^3c)}{a(a^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Ejercicios 3.2c (p. 286)

1. (a) $5x + 7y - 21z + 9 = 0$
   (b) $20x + 13y + 3z = 36$
   (c) $x - y - z + \pi/6 = 0$

(d) $x + 2z - 2 = 0$
(e) La superficie no tiene plano tangente en el punto.
(f) $z = 0$.

2. Cada ecuación está en la forma $F(x, y, z) =$ constante. Los vectores (F_x, F_y, F_z) perpendiculares a las superficies respectivas están dados por

$$\left(\frac{y}{z}, \frac{x}{z}, -\frac{xy}{z^2}\right), \quad \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} + \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right),$$
$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, -\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} - \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right).$$

El producto escalar de dos cualesquiera de estos vectores se anula.

3. $x(y + z) = ay$.
4. Como ésta es una superficie de revolución, puede suponerse $y = 0$. Sea $(a, 0, c)$ un punto de la superficie, es decir, $a^2 - c^2 = 1$. El plano tangente en el punto es $ax - cz = 1$. Las rectas de intersección son $(z - c)c = (x - a)a = \pm acy$.
5. Por la relación de Euler, la ecuación

$$(\xi - x)F_x + (\eta - y)F_y + (\zeta - z)F_z = 0$$

para el plano tangente puede ponerse en la forma

$$\xi F_x + \eta F_y + \zeta F_z = xF_x + yF_y + zF_z = hF(x, y, z) = h.$$

6. $z_x = \dfrac{yz - x^2}{z^2 - xy}, \quad z_y = \dfrac{xz - y^2}{z^2 - xy}$.
7. (a) 0
(b) $\operatorname{arc\,cos} 1/\sqrt{6}$
(c) $\operatorname{arc\,cos} 4/5$
(d) $\pi/2$
(e) No está definido.

Ejercicios 3.3a (p. 292)

1. (a) Los círculos $\xi^2 + \eta^2 = e^{2x}$; las rectas que pasan por $\xi \operatorname{sen} y - \eta \cos y = 0$.
(b) Los arcos parabólicos $\eta = \sqrt{x^2 - 2\xi x}$, $\eta = \sqrt{y^2 + 2\xi y}$.
(c) $\eta = \cos x(1 + 1/\xi^2)$, $\eta = \cos y(1 + \xi^2)$.
(d) Las parábolas $\xi = \eta^2 - 2\eta(x^2 + 1) + x^4 + 3x + 1$, $\eta = \xi^2 - 2\xi y + y^4 + y + 1$.
(e) $\xi = x^{\eta^{1/x}}$, $\eta = y^{\xi^{1/y}}$.
(f) Las rectas $\xi =$ constante, $\eta =$ constante $(\eta \geqq 1)$.
(g) Los arcos elípticos $\xi^2 - 2\xi\eta \operatorname{sen} 2x + \eta^2 = \cos^2 2x$, $\xi^2 - 2\xi\eta \operatorname{sen} 2x + \eta^2 = \cos^2 2y$.
(h) Los segmentos $\xi = e^{\cos x}$, $(e^{-1} \leqq \eta \leqq e)$, $\eta = e^{\cos y}$, $(e^{-1} \leqq \xi \leqq e)$.
2. La ecuación sólo admite los valores $x = y = 0$. Por lo tanto, la región es el plano. Su imagen es el primer cuadrante abierto en el plano ξ, η.

3. La región limitada por los dos círculos $\xi^2 + \eta^2 = 8$, $\xi^2 + \eta^2 = 32$ y las hipérbolas $\xi^2 - \eta^2 = 2$, $\xi^2 - \eta^2 = 6$.
4. No. El origen del plano ξ, η es la imagen de cualquier punto $(0, y)$.

Ejercicios 3.3b (p. 295)

1. Para esto sólo se requiere demostrar que en un punto dado con coordenadas cartesianas (a, b) las curvas $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$, donde $\alpha = (\text{ sen } b)/(a - 1)$ y $\beta = a \tan b$, tienen direcciones diferentes. Para $\xi = \alpha$,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(a-1)\cos b}{\text{sen } b};$$

para $\eta = \beta$,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-a}{\cos^2 b \text{ sen } b}.$$

Por lo tanto, las coordenadas curvilíneas están definidas para todos los puntos, excepto aquéllos que satisfacen $\cos^3 b = a/(1 - a)$.

2. $(\xi - 1)^{2/3} + \eta^2(\xi - 1)^{-2/3} = 1$.
3. Como en la solución del Ejercicio 1, aquéllos puntos con coordenadas cartesianas (a, b) para los cuales las curvas $\xi = \alpha$ y $\eta = \beta$ tienen la misma dirección; en este caso, los puntos sobre las rectas a 45°, $b = \pm a$.

Ejercicios 3.3c (p. 298)

1. Usese

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$$

para obtener

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad z = \frac{\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

2.
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$$

$$\phi = \text{arc tan } \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{w}, \quad \psi = \text{arc tan } \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{x},$$

$\theta = \text{arc tan } z/y$. Aquí, $r =$ constante es una esfera tres de radio r con centro en el origen; $\phi =$ constante es el hipercono generado por todas las rectas que pasan por 0 formando el ángulo ϕ con el eje w; el conjunto $\psi =$ constante es la unión de todos los planos que pasan por el eje w y que se cortan con el eje x formando con él un ángulo ψ. El conjunto $\theta =$ constante es la unión de todos los espacios tres que contienen a los ejes x y w y que se cortan con el eje y formando el ángulo θ con él.

Ejercicios 3.3d (p. 302)

1. (a) $ad - bc$ (d) $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$

(b) $1/\sqrt{x^2 + y^2}$ (e) $-3x^2y^2$

(c) $4xy$ (f) $9x^2y^2 + 1$.

2. Si $ad - bc = 0$, todos los puntos; si $ad - bc \neq 0$, ninguno.
(b) Ninguno. (La transformación no está definida para $x = y = 0$.)
(c) Los ejes coordenados.
(d) Ninguno. Empero, nótese que no existe inversa general, porque todos los puntos $(x, y + 2n\pi)$ tienen la misma imagen.
(e) Los ejes coordenados.
(f) Ninguno.

3. (a) $D = e^{2x}$; $x_\xi = y_\eta = \xi/(\xi^2 + \eta^2)$; $x_\eta = -y_\xi = \eta/(\xi^2 + \eta^2)$; $x_{\xi\xi} = y_{\xi\eta} = -x_{\eta\eta} = (\xi^2 - \eta^2)/(\xi^2 + \eta^2)^2$; $y_{\xi\xi} = -x_{\xi\eta} = -y_{\eta\eta} = -2\xi\eta/(\xi^2 + \eta^2)^2$
(b) $D = 4(x^2 + y^2)$; con $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, $\theta = \text{arc tan } \eta/\xi$; $x_\xi = y_\eta = \frac{1}{2}\sqrt{r} \cos \frac{1}{2}\theta$; $y_\xi = -x_\eta = -\frac{1}{2}\sqrt{r} \text{ sen } \frac{1}{2}\theta$; $x_{\xi\xi} = y_{\xi\eta} = -x_{\eta\eta} = -\frac{1}{4} r^{3/2} \cos 3\theta/2$; $y_{\xi\xi} = -x_{\xi\eta} = -y_{\eta\eta} = \frac{1}{4} r^{3/2} \text{ sen } 3\theta/2$.
(c) $D = 2 \text{ sen}(x - y)/\cos^2(x + y)$. $x_\xi = y_\xi = 1/2(1 + \xi^2)$; $x_\eta = y_\eta = 1/2\sqrt{1 - \eta^2}$; $x_{\xi\xi} = y_{\xi\xi} = -\xi/(1 + \xi^2)^2$; $x_{\xi\eta} = y_{\xi\eta} = 0$; $x_{\eta\eta} = -y_{\eta\eta} = \eta/2(1 - \eta^2)^{3/2}$.
(d) $D = \cosh(x + y)$; $x_\xi = (\cosh y)/D$; $x_\eta = -(\text{sen h} y)/D$; $y_\xi = (\text{sen h}x)/D$;
$y_\eta = (\cosh x)/D$.
$x_{\xi\xi} = -[\cosh^2 y \,\text{senh}(x + y) + \text{senh}^2 x]/D^3$;
$x_{\xi\eta} = \frac{1}{2}[\text{sen h } 2y \text{ sen h}(x + y) - \text{senh } 2x]/D^3$;
$x_{\eta\eta} = -[\text{sen h}^2 y \text{ sen}(x + y) + \cosh^2 x]/D^3$;
$y_{\xi\xi} = [\cosh^2 y - \text{sen h}^2 x \text{ sen h}(x + y)]/D^3$;
$y_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}[\text{senh } 2y + \text{sen h } 2x \text{ sen h}(x + y)]/D^3$;
$y_{\eta\eta} = [\text{sen h}^2 y - \cosh^2 x \text{ sen h}(x + y)]/D^3$.
(e) $D = 6x^3y - 3y^4$. $x_\xi = 2x/3(2x^3 - y^3)$
$x_\eta = -y/(2x^3 - y^3)$, $y_\xi = -y/3(2x^3 - y^3)$;
$y_\eta = x^2/y(2x^3 - y^3)$. $x_{\xi\xi} = -\frac{2}{9}x(8x^3 + 5y^3)/(2x^3 - y^3)^3$;
$x_{\xi\eta} = 2y(7x^3 + y^3)/3(2x^3 - y^3)^3$;
$x_{\eta\eta} = -2x^2(x^3 + 4y^3)/y(2x^3 - y^3)^3$;
$y_{\xi\xi} = 2y(7x^3 + y^3)/3(2x^3 - y^3)^3$
$y_{\xi\eta} = -2x^2(x^3 + 4y^3)/3y(2x^3 - y^3)^3$
$y_{\eta\eta} = 2x(y^6 + 3x^3y^3 - x^6)/y^3(2x^3 - y^3)^3$.

4. (a) Sean m_1 y m_2 las pendientes de dos curvas que pasan por el punto (a, b) del plano x, y. Sean μ_1 y μ_2 las pendientes correspondientes en el punto correspondiente del plano ξ, η. Usese

$$\mu = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta/dx}{d\xi/dx} = \frac{(\partial\eta/\partial x) + m(\partial\eta/\partial y)}{(\partial\xi/\partial x) + m(\partial\xi/\partial y)} = \frac{m(a^2 - b^2) - 2ab}{b^2 - a^2 - 2mab}$$

para obtener

$$\frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + \mu_1\mu_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

Por lo tanto, el ángulo entre las dos curvas se conserva en magnitud pero se invierte en signo.

(b) Obsérvese que $\xi^2 + \eta^2 = 1/(x^2 + y^2)$. Exprésese el círculo $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ en la forma $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2 - a^2 - b^2$. Este se transforma en la curva

$$\frac{1}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{2a\xi}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{2by}{\xi^2 + \eta^2} = r^2 - a^2 - b^2,$$

o sea,

$$(\xi^2 + \eta^2)\ (r^2 - a^2 - b^2) + 2a\xi + 2b\eta = 1.$$

Este es un círculo en el plano ξ, η, a menos que el círculo original pase por el origen; en este último caso $r^2 - a^2 - b^2 = 0$ y la imagen es una recta.

(c) $-1/(x^2 + y^2)^2$.

5. Por la solución del Ejercicio 4(b), una inversión transforma $P_1P_2P_3$ en un triángulo ordinario con los mismos ángulos.

6. Sean m_1, m_2 las pendientes de dos curvas que pasan por el punto (a, b) y μ_1, y μ_2 las pendientes correspondientes de sus imágenes. De

$$\mu = \frac{dv/dx}{du/dx} = \frac{\psi_x + m\psi_y}{\phi_x + m\phi_y} = \frac{\psi_x + m\psi_y}{\psi_y - m\psi_x},$$

se deduce que

$$\frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + \mu_2\mu_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

7. La normal está dada por

$$\frac{\xi - x}{u_x} = \frac{\eta - y}{u_y} = u - z.$$

Esta normal pasa por el eje z si y sólo si $xu_y - yu_x = 0$. La superficie es de revolución si y sólo si $z = f(w)$ donde $w = x^2 + y^2$. Por tanto, las curvas $z =$ constante y $w =$ constante son las mismas y la aplicación $(x, y) \to (w, z)$ debe tener un jacobiano nulo, es decir,

$$\frac{d(w,z)}{d(x,y)} = 2\begin{vmatrix} x & y \\ u_x & u_y \end{vmatrix} = 0.$$

8. (a) Tanto si $t < b$ (elipse) como si $b < t < a$ (hipérbola), los focos son $(0, \pm c)$, donde $c = \sqrt{a - b}$.

(b) Si se denota el primer miembro de la ecuación que define a t_1 y t_2 por $F(x, y, t)$, las dos curvas $t_1 =$ constante y $t_2 =$ constante están dadas implícitamente por las ecuaciones $F(x, y, t_1) = 1$ y $F(x, y, t_2) = 1$, respectivamente. Por lo tanto, la condición para que éstas sean ortogonales es

$$0 = F_x(x, y, t_1)\, F_x(x, y, t_2) + F_y(x, y, t_1)\, F_y(x, y, t_2)$$
$$= \frac{4x^2}{(a - t_1)(a - t_2)} + \frac{4y^2}{(b - t_1)(b - t_2)};$$

pero esta relación es una consecuencia inmediata de $F(x, y, t_1) - F(x, y, t_2) = 0$.

(c) Los coeficientes de la ecuación cuadrática que define a t_1 y t_2 son iguales a t_1, t_2, y $-(t_1 + t_2)$, respectivamente. Así se obtienen dos ecuaciones lineales en x^2 y y^2, de las cuales

$$x = \pm\sqrt{\frac{(a - t_1)(a - t_2)}{a - b}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{(b - t_1)(b - t_2)}{b - a}}.$$

(d) $$\frac{d(t_1, t_2)}{d(x, y)} = \frac{4xy(a - b)}{\sqrt{\{(a + b)^2 - 2(a - b)(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2)^2\}}}.$$

(e) $$\frac{f_1'g_1'}{(a - t_1)(b - t_1)} = \frac{f_2'g_2'}{(a - t_2)(b - t_2)}.$$

9. (a) Sea $F(t)$ el primer miembro de la ecuación que define a t. F es una función continua de t en $-\infty < t < c$, para la cual $F(-\infty) = 0, F(c - 0) = +\infty$; de donde $F = 1$ al menos en un punto de ese intervalo. Conclusiones semejantes son válidas para los otros intervalos.

(b) Ver el Ejercicio 8(b).

(c) Ver el Ejercicio 8(c). $x = \pm\sqrt{\dfrac{(a - t_1)(a - t_2)(a - t_3)}{(a - b)(a - c)}}$,

con formulas semejantes para y y z.

10. (a) Aplíquese el resultado del Ejercicio 6.

(b) Sea $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Entonces la recta $\theta =$ constante se transforma en la cónica $t_1 = \frac{1}{2} - \cos^2\theta$, y el círculo $r =$ constante, en la cónica $t_2 = -\frac{1}{4}[r^2 + (1/r^2)]$.

11. (b) Usese (24d) como sigue

$$x_{\xi\eta} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{-\xi_y}{D}\right) = x_{\eta\xi} = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta_y}{D}\right),$$

o aplíquese el resultado de la parte (a).

Ejercicios 3.3e (p. 307)

1. (a) 1. (b) $4x^3$. (c) $\dfrac{\exp[2x/(x^2 + y^2)]}{(x^2 + y^2)^2}$.

2. (a), (c). En la parte (b), $u_0 = v_0 = 1$ no está en el recorrido de la transformación compuesta.
3. Aplíquese (31b).
4. La transformación inversa

$$x = p(\xi, \eta), \; y = q(\xi, \eta)$$

existe. El primer resultado se obtiene formando la composición de la aplicación dada con

$$z = f(p(\xi), q(\eta)) = \alpha(\xi, \eta)$$
$$\eta = \eta = \beta(\xi, \eta),$$

de donde

$$\frac{d(z, \eta)}{d(\xi, \eta)} = \frac{d(z, \eta)}{d(x, y)} \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)} = \frac{d(z, \eta)/d(x, y)}{d(\xi, \eta)/d(x, y)}.$$

Pero

$$\frac{d(z, \eta)}{d(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial z}{\partial \xi}.$$

Ejercicios 3.3f (p. 314)

1. (a), (b). En la parte (c), los valores dados no satisfacen las ecuaciones.

Ejercicios 3.3g (p. 321)

1. Con $w = v - 1$,

$$x_2 = 1 + \frac{1}{2}(u + w) + \frac{1}{8}(u^2 - 2uw - w^2),$$
$$y_2 = 1 - \frac{1}{2}(u - w) + \frac{1}{8}(u^2 + 2uw - w^2).$$

2. Los mismos.

Ejercicios 3.3h (p. 323)

1. $\xi = x^2 + x|x|, \quad \eta = y.$
2. Si las funciones son dependientes, $\partial(\xi, \eta)/\partial(x, y) = a\beta - b\alpha = 0.$

Ejercicios 3.3i (p. 325)

1. (a) $-e^{3x} \cos y$
   (b) 0.

(c) $-\left[\frac{y^z \log y \operatorname{senh} x}{\cosh^2 y} - \frac{\cosh z}{y} - (\cosh z)y^{z-1} \operatorname{senh} x\right]$.

(d) $-x^2 \operatorname{sen} z$.

(e) x.

2. Existe una región sobre la cual alguna función de ξ, η, ζ se anula. La condición para que esto suceda es $\partial(\xi, \eta, \zeta)/\partial(x, y, z) = 0$.
3. La terna del Ejercicio 1(b) es dependiente:

$$(\eta^2 + \rho^2)\,[(\eta + \rho - \xi)^2 + \xi^2] = 2(\eta + \rho)^2.$$

4. $$\frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ y+z & x+z & y+x \end{vmatrix} \equiv 0; \quad \xi^2 - \eta - 2\zeta = 0.$$

5. (a) Ya que el ángulo entre dos superficies es el ángulo entre sus normales, sólo se necesita demostrar que el ángulo entre dos direcciones cualesquiera no cambia. Sea s la longitud de arco sobre cualquier curva en el espacio x, y, z y $\mathbf{t} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \dot{\mathbf{X}}$ el vector tangente unitario, donde los puntos denotan la derivación con respecto a s. La dirección de $\mathbf{t}$ se transforma en la dirección de $\tau = \frac{(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})}{(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2)^{1/2}} = \dot{\mathbf{Y}}/|\dot{\mathbf{Y}}|$. La dirección imagen $\boldsymbol{\tau}$ está dada en términos de $\mathbf{t}$ y $\mathbf{X}$ por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{t} - \frac{2(\mathbf{t} \cdot \mathbf{X})\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|^2}.$$

De aquí fácilmente se deduce que el coseno del ángulo entre dos curvas que se cortan en $\mathbf{X}$ está dado por $\tau_1 \cdot \tau_2 = \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2$.

(b) Se deduce en la misma forma que la solución del Ejercicio 4(b), p. 303.

(c) $-1/(x^2 + y^2 + z^2)^3$.

Ejercicios 3.4a (p. 335)

1. (a) $ds^2 = \operatorname{sen}^2 v\, du^2 + dv^2$

(b) $ds^2 = \cosh^2 v\, du^2 + (1 + 2 \operatorname{senh}^2 v) dv^2$

(c) $ds^2 = (1 + f'^2) dz^2 + f^2\, d\theta^2$

(d) $ds^2 = \frac{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)}{4(a - t_1)(b - t_1)(c - t_1)} dt_1^2 + \frac{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)}{4(a - t_2)(b - t_2)(c - t_2)} dt_2^2$.

2. $E = G = \cosh^2 (t/a)$, $F = 0$.
3. $\mathbf{X}_u = (\cos v, \operatorname{sen} v, \alpha)$; $\mathbf{X}_v = (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0)$; de aquí que $\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v = 0$.
4. $ds^2 = (1 + z_x^2) dx^2 + 2 z_x z_y\, dx\, dy + (1 + z_y)^2\, dy^2$.
5. $EG - F^2 = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2$; úsese la fórmula de transformación para los jacobianos.

6. Introdúzcanse coordenadas x, y, z tales que P se convierta en el origen; el plano tangente en P, en el plano x, y y t, en el eje x. Entonces la ecuación de S toma la forma $z = f(x, y)$, donde $f(0, 0) = f_x(0, 0) = 0$.

   Un plano, Σ que pasa por t está dado por la ecuación $z = \alpha y$. Introdúzcanse ahora $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ y x como coordenadas en Σ; entonces la intersección de Σ y S está dada implícitamente por la ecuación

$$\frac{r\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} = f\left\{x, \frac{r}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right\}.$$

   Por lo tanto, la curvatura de la curva de intersección, en el punto $x = 0$, $r = 0$, está dada (ver la p. 278) por

$$k = f_{xx}\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}.$$

   Por tanto, el centro de curvatura de esta sección tiene las coordenadas

$$x = 0, y = \frac{1}{k\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{\alpha}{f_{xx}(1+\alpha^2)}, z = \frac{\alpha}{k\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{\alpha^2}{f_{xx}(1+\alpha^2)};$$

   es decir, está sobre el círculo

$$f_{xx}(y^2 + z^2) - z = 0.$$

7. Tómese el plano tangente en P como el plano x, y. Entonces la ecuación de S puede tomarse como $z = f(x, y)$. Un plano normal está dado por la ecuación $x = \alpha y$. Tómense $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y z como coordenadas en el plano; entonces

$$z = f\left\{\frac{\alpha r}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \frac{r}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right\},$$

   y su curvatura en $r = 0$ es

$$k = f_{xx}(0, 0)\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} + 2f_{xy}(0, 0)\frac{\alpha}{1+\alpha^2} + f_{yy}(0, 0)\frac{1}{1+\alpha^2};$$

   el punto final del vector de longitud $1/\sqrt{k}$ a lo largo de la recta t tiene entonces las coordenadas

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\frac{1}{\sqrt{k}}, y = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\frac{1}{\sqrt{k}}, z = 0;$$

   es decir, está sobre la cónica

$$x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy} = 1.$$

8. (a) Derivando las dos ecuaciones con respecto a un parámetro t de la curva se obtiene

$$xx' + yy' + zz' = 0, \quad axx' + byy' + czz' = 0.$$

   A partir de estas relaciones se puede encontrar la razón $x':y':z'$, es decir, la dirección de la tangente. Si (ξ, η, ζ) son coordenadas deslizantes, las ecuaciones de la tangente son

$$(\xi - x) : (\eta - y) : (\zeta - z) = \frac{c-b}{x} : \frac{a-c}{y} : \frac{b-a}{z}.$$

(b) Derivando las ecuaciones de la curva por segunda vez y aplicando el resultado de (a), se obtiene

$$xx'' + yy'' + zz'' = -(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$
$$= \lambda\left\{\frac{(c-b)^2}{x^2} + \frac{(a-c)^2}{y^2} + \frac{(b-a)^2}{z^2}\right\}$$

y

$$axx'' + byy'' + czz'' = \lambda\left\{\frac{a(c-b)^2}{x^2} + \frac{b(a-c)^2}{y^2} + \frac{c(b-a)^2}{z^2}\right\},$$

donde λ es un factor de proporcionalidad. Eliminando λ se tiene

$$(xx'' + yy'' + zz'')\left\{\frac{a(c-b)^2}{x^2} + \frac{b(a-c)^2}{y^2} + \frac{c(b-a)^2}{z^2}\right\}$$
$$= (axx'' + byy'' + czz'')\left\{\frac{(c-b)^2}{x^2} + \frac{(a-c)^2}{y^2} + \frac{(b-a)^2}{z^2}\right\}.$$

Esta ecuación lineal en x'', y'', z'' sigue siendo válida si se sustituyen x', y', z' por x'', y'', z''. Por consiguiente, también se satisface si se remplazan x'', y'', z'' por combinaciones lineales $\lambda x' + \mu x''$, $\lambda y' + \mu y''$, $\lambda z' + \mu z''$, respectivamente. Ahora bien, si (ξ, η, ζ) está en el plano, $\xi - x, \eta - y, \zeta - z$ son precisamente esas combinaciones lineales (ver el Ejercicio 6, p. 259).

Así se encuentra que la ecuación del plano osculador es

$$\frac{ax^3}{c-b}(\xi - x) + \frac{by^3}{a-c}(\eta - y) + \frac{cz^3}{b-a}(\zeta - z) = 0.$$

9. Tómese θ como parámetro para ambas curvas. Entonces, con $u = \theta$, $v = \phi$, hágase $du/dt = dv/d\tau = 1$, $dv/dt = -1$, $dv/d\tau = 1$, $E = a^2$, $G = a^2 \operatorname{sen}^2\theta$ en (48).

Las tangentes a las curvas están dadas en términos de los vectores coordenados **i**, **j**, **k** por

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_\theta \pm \mathbf{X}_\phi$$
$$= a(\cos\theta\cos\phi \pm \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)\mathbf{i}$$
$$+a(\cos\theta\operatorname{sen}\phi \mp \operatorname{sen}\theta\cos\phi)\mathbf{j} - a\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k},$$

y $|\dot{\mathbf{X}}|^2 = a^2(1 + \operatorname{sen}^2\theta)$ en ambos casos

$$\ddot{\mathbf{X}} = 2a(\pm\cos\theta\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\theta\cos\phi)\mathbf{i}$$
$$+ 2a(\mp\cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)\mathbf{j}$$
$$- a\cos\theta\,\mathbf{k}.$$

Aplíquese la fórmula de la Sección 2.5, Ejercicio 8.

Ejercicios 3.4b (p. 338)

1. La aplicación es conforme en todo punto, excepto en $u = v = 0$, porque se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. En el origen todas las primeras derivadas se anulan. En coordenadas polares, $u = r\cos\theta$, $v = r\,\text{sen}\,\theta$, la aplicación se convierte en $x = r^2\cos 2\theta$, $y = r^2\,\text{sen}\,2\theta$; por lo tanto, en el origen todos los ángulos se duplican.
2. Siempre que esté definida; es decir, en todo punto excepto sobre la recta $u = 0$.
3. Verifíquense las ecuaciones de Cauchy-Riemann, con $p = x\xi - y\eta$, $q = x\eta + y\xi$,

$$\frac{\partial p}{\partial u} = x\frac{\partial \xi}{\partial u} + \xi\frac{\partial x}{\partial u} - y\frac{\partial \eta}{\partial u} - \eta\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$= x\frac{\partial \eta}{\partial v} + \xi\frac{\partial y}{\partial v} + y\frac{\partial \xi}{\partial v} + \eta\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial v}$$

4. (a) De (40f) se deduce que $\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u = \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_v = 4r^4/(u^2 + v^2 + r^2)^2$ y $\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v = 0$. Hágase $E = G$ y $F = 0$ en (48), para obtener el resultado que se desea.
   (b) Un círculo sobre la esfera es la intersección de esta con un plano, digamos, el plano P. Si P pasa por el polo norte, la proyección estereográfica transforma el círculo en la recta de intersección de P con el plano x, y Con más generalidad, si P tiene la ecuación $ax + by + cz = d$, entonces, por (40f),

$$(c - d)(u^2 + v^2) + 2ar^2u + 2br^2v = r^2(cr + d),$$

   la cual es la ecuación de una recta si $c = d$ y de un círculo si $c \neq d$.
   (c) De (40f),

$$u = x\left(1 - \frac{z}{r}\right) ; \ v = y\left(1 - \frac{z}{r}\right).$$

   La reflexión en el plano ecuatorial proporciona la transformación $(u, v) \to (\xi, \eta)$, donde

$$\xi = \frac{x}{1 + z/r} ; \ \eta = \frac{y}{1 + z/r}.$$

   De (40f), sustituyendo x y z, se encuentra

$$\xi = \frac{r^2u}{u^2 + v^2} ; \ \eta = \frac{r^2v}{u^2 + v^2}$$

   que son las ecuaciones de la inversión con respecto a un círculo de radio r.
   (d) Del resultado de la parte (a),

$$ds^2 = \frac{4r^4}{(u^2 + v^2 + r^2)^2}(du^2 + dv^2).$$

5. El ángulo dado por (48) debe satisfacer

$$\cos\omega = \frac{du/dt\ \ du/d\tau + dv/dt\ \ dv/d\tau}{\sqrt{[(du/dt)^2 + (dv/dt)^2]\ [(du/d\tau)^2 + (dv/d\tau)^2]}}.$$

Tomando las parejas ortogonales de vectores $(du/dt,\ dv/dt) = (0,\ 1)$ $(du/d\tau, dv/d\tau) = (1, 0)$ se encuentra $F = 0$. De modo semejante, la pareja $(1, 1)$, $(1, -1)$ da $E = G$. Si E y G no son cero, las condiciones

$$E = G, \quad F = 0$$

son suficientes.

6. Por la solución del Ejercicio 5, se requiere que

$$E = \operatorname{sen}^2\phi = \phi'^2 = G.$$

Resolviendo la ecuación $\phi' = \operatorname{sen}\phi$, se obtiene

$$v = \log\tan\frac{\phi}{2} \qquad \text{o} \qquad \phi = 2\ \operatorname{arc\,tan} e^v.$$

Ejercicios 3.5a (p. 341)

1. (a) Una familia de elipses semejantes con centro en el origen y con sus ejes paralelos a los ejes coordenados.
   (b) La familia de círculos tangentes al eje x, con centros sobre el eje y.
   (c) No es una familia. Cada valor de c da la misma curva: el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$.
2. Las esferas de radios iguales a 1, con centros sobre la recta

$$x = y - 1 = \frac{1}{2}(z + \sqrt{2}).$$

Ejercicios 3.5b (p. 345)

1. No. Por ejemplo, considérense las normales a una recta o a un círculo.
2. Una envolvente satisface las ecuaciones paramétricas

$$x = -\psi'(c),\ y = -c\psi'(c) + \psi(c).$$

Si ψ' tiene una inversa ϕ, puede hacerse $\phi(-x) = (\psi')^{-1}(-x)$ y usar $c = \phi(-x)$ para obtener la ecuación no paramétrica

$$y = x\phi(-x) + \psi(\phi(-x)),$$

de la cual

$$\begin{aligned} y' &= \phi(-x) - x'\phi'(-x) - \psi'(\phi(-x))\,\phi'(-x) \\ &= \phi(-x). \end{aligned}$$

Introduciendo $c = \phi(-x) = y'$ en la expresión para y, se obtiene el resultado deseado.

Ejercicios 3.5c (p. 352)

1. (a) Elimínese t para obtener

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v^2} x^2(1 + \tan^2\alpha).$$

Sea $c = \tan \alpha$ el parámetro de la familia:

$$(\alpha) \qquad y = cx - \frac{(1 + c^2)}{2v^2} gx^2.$$

La envolvente tiene la ecuación

$$y = \frac{v^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v^2}$$

(b) Para una x fija, $dy/dc = x - cgx^2/v^2$ y $d^2y/dc^2 = -gx^2/v^2 < 0$.Como $dy/dc = 0$ sobre la envolvente, se concluye que para una x dada el punto sobre la envolvente es el blanco más alto que puede alcanzarse.
(c) Para (x, y) con y por debajo del máximo, la ecuación cuadrática (α) tiene dos soluciones para c.

2. (a) La parábola $y^2 = 4x$.
(b) Las rectas $x = \pm 2y$.
(c) Las hipérbolas $xy = \pm\frac{1}{2}$.
(d) Las rectas $y = \pm ax$.

3. Sea la ecuación de la curva dada paramétricamente por $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$. La envolvente de la familia de círculos satisface

$$[x - \phi(t)]^2 + [y - \psi(t)]^2 = p^2$$

y

$$[x - \phi(t)]\phi'(t) + [y - \psi(t)]\,\psi'(t) = 0.$$

Estas son precisamente las condiciones para que (x, y) esté a la distancia p del punto $(\phi(t), \psi(t))$, en una dirección normal.

4. Puede introducirse t como un parámetro sobre la curva, de modo que ésta queda dada por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ y la tangente en el punto con parámetro t está sobre los dos planos que corresponden a t; esto da las relaciones

$$ax' + by' + cz' = 0, \quad dx' + ey' + fz' = 0.$$

Derivando las ecuaciones de las rectas con respecto a t se obtiene

$$a'x + b'y + c'z = 0, \quad d'x + e'y + f'z = 0.$$

Entonces, con la relación

$$ax + by + cz = dx + ey + fz$$

se tienen tres ecuaciones homogéneas en x, y, z, y el determinante debe anularse.

5. (a) Las ecuaciones paramétricas para C', con t como parámetro, están definidas por medio de

$$\xi x + \eta y = 1, \quad \xi x' + \eta y' = 0.$$

Tomando la derivada ordinaria, en la primera ecuación, con respecto a t, se encuentra, en vista de la segunda ecuación,

$$\xi' x + \eta' y = 0.$$

Esta, en combinación con la primera, define la recíproca polar de C' que, evidentemente, es la curva C.

(b) $\xi^2(1 - a^2) + \eta^2(1 - b^2) - 2ab\xi\eta + 2a\xi + 2b\eta = 1.$

(c) $a^2\xi^2 + b^2\eta^2 = 1.$

6. La ecuación de la tangente generadora es

$$x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta = a(\theta \operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1).$$

7. Si $(x^2/a^2) \pm (y^2/b^2) = 1$ es la ecuación de la cónica, entonces $(x^2 + y^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2)$ es la ecuación de la envolvente. Nótese que si la cónica es una hipérbola rectangular, esta envolvente es una lemniscata ordinaria $(x^2 + y^2)^2 = 4a^2(x^2 - y^2)$.

8. (a) Si Γ está dada paramétricamente por la ecuación vectorial $\mathbf{X} = \Phi(t)$, los puntos $\mathbf{Y}$ de la curva pedal se definen por las condiciones

$$(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) \cdot \mathbf{Y} = 0, \quad \mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}' = 0,$$

Un punto $\mathbf{Z}$ sobre el círculo debe satisfacer $(\mathbf{Z} - \frac{1}{2}\mathbf{X})^2 = \frac{1}{4}\mathbf{X}^2$ o bien, $\mathbf{Z}^2 - \mathbf{Z} \cdot \mathbf{X} = 0$. Entonces, para estar en la envolvente $\mathbf{Z}$ debe satisfacer $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{X}' = 0$. Estas son las condiciones para que $\mathbf{Z}$ esté sobre la curva pedal.

(b) Por la definición original de curva pedal, una cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$, donde a es el radio del círculo y θ es el azimut con respecto a la dirección que va de O al centro.

9. Si la elipse tiene por ecuación $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, la envolvente es la elipse con ecuación

$$\frac{u^2}{b^2(a^2 + b^2)} + \frac{v^2}{b^2} = 1.$$

Ejercicios 3.5d (p. 356)

1. Estos son los elipsoides $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$, con $abc = k$, donde k es un valor fijo. La envolvente es $xyz = k^{2/3}\sqrt{27}$.
2. Estos son planos con una distancia unitaria a O. La envolvente, la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
3. (a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$.

   (b) $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 1$.
4. Para la envolvente se tienen las dos ecuaciones

$$x \cos t + y \operatorname{sen} t + z = t$$
$$-x \operatorname{sen} t + y \cos t = 1.$$

Estas dos ecuaciones dan una familia de rectas con parámetro t; si existe una curva que tenga a estas rectas como tangentes, también debe satisfacer las ecuaciones que se obtienen al derivar una vez más.

(a) $r \operatorname{sen} [z + \sqrt{r^2 - 1} - \theta] + 1 = 0$.

(b) La curva está dada por $z = \theta - \pi/2$, $r = 1$.

5. Sea $P(x, y, z)$ un punto sobre la superficie tubular Σ, y sea S la esfera de la familia que tiene al punto P en común con Σ. Entonces S y Σ tienen el mismo plano tangente en P, es decir, los mismos valores de x, y, z, z_x, z_y en ese punto. Por lo tanto, basta con probar que la relación es verdadera para cualquier esfera de radio unitario que tenga su centro en el plano x, y es decir, para $u(x, y) = \sqrt{1 - (x-a)^2 - (y-b)^2}$.

6. Aplíquese la inversión. Como S_1, S_2, S_3 pasan por el origen, se transforman en planos; entonces simplemente tiene que encontrarse la envolvente de las esferas que tocan a los tres planos (es decir, cierto cono circular), la cual se reinvierte:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) \\ - 3(x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz) = 0.$$

7. (a) Si P describe la curva pedal, Γ' de Γ, constrúyase, con OP como diámetro, un círculo en el plano perpendicular al plano de Γ; la envolvente es la superficie generada por este círculo variable.

(b) Ver las soluciones de la parte (a) y el Ejercicio 8(b) de la Sección 3.5c.

8. Esta es la familia $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$, con $abc = k$. La envolvente se define por medio de estas ecuaciones junto con

$$-\frac{x}{a^2} + \frac{zk}{c^2a^2b} = 0; \quad -\frac{y}{b^2} + \frac{zk}{c^2ab^2} = 0,$$

lo cual da, con la primera ecuación, $x/a = y/b = z/c = \frac{1}{3}$, de donde $xyz = k/27$.

9. Tal plano debe contener a los vectores $\mathbf{T}_1 = (a, 1, 0)$, tangente en el punto $(a^2, 2a, 0)$ de la primera parábola, y $\mathbf{T}_2 = (b, 0, 1)$ tangente en el punto $(b^2, 0, 2b)$ de la segunda. La condición de que las tangentes se cortan da $b = +a$, con el punto de intersección $(-a^2, 0, 0)$. Usando $\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2 = (1, -a, -b)$ como un vector normal al plano se obtiene la ecuación de éste en la forma $x - a(y + z) + a^2 = 0$, con a como parámetro, y como envolvente resultan los cilindros parabólicos $4x = (y + z)^2$.

Ejercicios 3.6a (p. 360)

1. (a) $-\operatorname{sen} v$.

(b) $(a^3 + b^3 + c^3)(u - v) + 3abcv$.

(c) $4uv$.

Ejercicios 3.6b (p 362)

1. (a) $-2xy\,dx\,dy$.
   (b) $(x^4 - 4x^2y^2 + y^4)\,dx\,dy$.
   (c) $(a^2 + b^2)\,dx\,dy\,dz$.
2. Para $\omega = A\,dx + B\,dy + C\,dz$,

$$\begin{aligned}\omega^2 = A^2\,dx\,dx + B^2\,dy\,dy + C^2\,dz\,dz \\ + AB(dx\,dy + dy\,dx) \\ + BC(dydz + dz\,dy) \\ + CA(dz\,dx + dx\,dz)\end{aligned}$$

y es evidente que cada término en ω^2 se anula.

Alternativamente, como se sabe que para dos cualesquiera de esas formas $\omega_1\omega_2 = -\omega_2\omega_1$, se concluye que $\omega^2 = -\omega^2$; de donde, $\omega^2 = 0$.
3. Aplíquese el resultado del Ejercicio 2.
4. Reescríbase el primer miembro en la forma

$$[(\omega_1 + \omega_3) + (\omega_2 + \omega_4)]\,[(\omega_1 + \omega_3) - (\omega_2 + \omega_4)]$$

y aplíquese el resultado del Ejercicio 3.
5. $$L_1(L_2L_3) = (A_1\,dx + B_1\,dy + C_1\,dz)\left\{\begin{vmatrix} B_2 & B_3 \\ C_2 & C_3 \end{vmatrix} dy\,dz + \begin{vmatrix} C_2 & C_3 \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} dz\,dx + \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} dx\,dy\right\}$$

$$= \left\{A_1 \begin{vmatrix} B_2 & B_3 \\ C_2 & C_3 \end{vmatrix} + B_1 \begin{vmatrix} C_2 & C_3 \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}\right\} dx\,dy\,dz,$$

donde el coeficiente de $dx\,dy\,dz$ es el desarrollo en menores de la primera línea del determinante $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$.

Ejercicios 3.6c (p. 367)

1. (a) $-\dfrac{y}{x^2 + y^2}\,dx + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,dy$
   (b) $2\,dx\,dy$
   (c) 0
   (d) $x\,(\cos y - 1)\operatorname{sen} z$
   (e) 0.
2. Para $\omega_i = A_i\,dx + B_i\,dy + C_i\,dz$, $(i = 1, 2)$,

$$d(\omega_1\omega_2) = \left\{\left(\frac{\partial B_1}{\partial x} C_2 + B_1 \frac{\partial C_2}{\partial x} - \frac{\partial C_1}{\partial x} B_2 - C_1 \frac{\partial B_2}{\partial x}\right)\right.$$
$$+ \left(\frac{\partial C_1}{\partial y} A_2 + C_1 \frac{\partial A_2}{\partial y} - \frac{\partial A_1}{\partial y} C_2 - A_1 \frac{\partial C_2}{\partial y}\right)$$
$$\left. + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} B_1 + A_1 \frac{\partial B_2}{\partial z} - \frac{\partial B_2}{\partial z} A_2 - B_1 \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\right\} dx\,dy\,dz$$
$$= \left\{\left(\frac{\partial C_1}{\partial y} - \frac{\partial B_1}{\partial z}\right) A_2 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial C_1}{\partial x}\right) B_2\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) C_2\right\} dx\,dy\,dz$$
$$+ \left\{A_1 \left(\frac{\partial B_2}{\partial z} - \frac{\partial C_2}{\partial y}\right) + B_1 \left(\frac{\partial C_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left. + C_1 \left(\frac{\partial A_2}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial x}\right)\right\} dx\,dy\,dz$$
$$= (d\omega_1)\omega_2 + \omega_1(d\omega_2).$$

3. Por el Ejercicio 2, si $d\omega_1 = d\omega_2 = 0$, entonces $d(\omega_1\omega_2) = 0$.

Ejercicios 3.6d (p. 376)

1. Considerando $F(\mathbf{X}) = f(\rho, \phi, \theta) = g(x, y, z)$ como una función de un punto en el espacio, por la invariancia de la forma diferencial se sabe que

$$dF = dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz$$
$$= \nabla F \cdot d\mathbf{X}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{df}{d\theta} d\theta.$$

Como consecuencia,

$$\nabla F \cdot d\mathbf{X} = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{w}\right) \cdot d\mathbf{X},$$

de donde

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{w}.$$

Ejercicios 3.7b (p. 381)

1. (a) Sillas en $y = 0$, $x = \pi/3 + 2n\pi$; mínimos en $y = 0$, $x = -\pi/3 + 2n\pi$.
   (b) Máximos en $x = \pi/4 + 2n\pi$, $y = \pi/4 + 2n\pi$, y $x = 3\pi/4 + 2n\pi$, $y = 3\pi/4 + 2n\pi$; mínimos en $x = \pi/4 + 2n\pi$, $y = 3\pi/4 + 2n\pi$, y $x = 3\pi/4 + 2n\pi$, $y = \pi/4 + 2n\pi$.
   (c) Silla en $x = 0$, $y = 1$.

(d) No existen puntos estacionarios.
(e) Silla en $x = 0, y = 0$.

2. Máximos para $x = 0, y = \pm 1$; mínimo para $x = y = 0$.
3. Mínimo para $x = 1, y = 4$, punto silla para $x = -1, y = 2$.
4. $a/20$, $a/10$, $a/10$.
5. Mínimos impropios sobre los planos $x = 0, y = 1, z = -\frac{1}{2}$.
6. Maximizar $V = xy[100 - 2(x + y)]$. Volumen máximo para $x = y = 50/3$, $z = 100/3$; $V_{máx} = (25/27) \times 10^4$ pulg $^3 \approx 5.4$ pies ^{3}.
7. Hágase $\mathbf{X} = (x, y, z)$ y considérese que los n puntos son (a_i, b_i, c_i),donde $i = 1, 2, \ldots, n$. Con el fin de minimizar $\Sigma[(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2]$, hágase

$$2\Sigma(x - a_i) = 2\Sigma(y - b_i) = 2\Sigma(z - c_i) = 0.$$

Por tanto, $x = (1/n)\ \Sigma a_i$, $y = (1/n)\ \Sigma b_i$, $z = (1/n)\ \Sigma c_i$. La suma se minimiza en el centro de gravedad de los n puntos.

Ejercicios 3.7c (p. 386)

1. Tómese

$$F(x, y, z) = xyz + \lambda[2(x + y) + z - 100].$$

De

$$F_x = yz + 2\lambda,\ F_y = zx + 2\lambda,\ F_z = xy + \lambda,$$

el extremo ocurre cuando

$$V = xyz = -2\lambda x = -2\lambda y = -\lambda z.$$

Por lo tanto, $z = 2x = 2y$. Introduciendo esto en la condición subsidiaria se obtiene $z = 100/3$, $x = y = 50/3$, como antes.

2. $x = y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{16}$.
3. $x = -y = 1/\sqrt{2}$, $z = 1$.
4. Tómese el centro de gravedad de los n puntos como el origen y supóngase que las coordenadas de los puntos son (a_i, b_i). Hágase $\mathbf{X} = (x, y)$ y supóngase que la recta está dada por $Ax + By = C$. Aplicando el método de multiplicadores de Lagrange a

$$\Sigma[(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2] + (C - Ax - By),$$

se obtiene

$$2nx - \lambda A = 2ny - \lambda B = 0;$$

de donde

$$\lambda = \frac{2nC}{A^2 + B^2}.$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{AC}{A^2 + B^2}, \quad y = \frac{BC}{A^2 + B^2};$$

es decir, **X** es el punto de la recta más cercano al centro de gravedad.

5. Denótese por S la curva $f(x, y) = C$ y por S' la curva $\phi(x, y) = C'$. S y S' tienen un punto de contacto en (a, b). En general, $f(x, y) - C$ es positiva en uno de los lados de S y negativa en el otro, en alguna vecindad; algo semejante se tiene para $\phi(x, y) - C'$ y S'. Si, por ejemplo, $f(a, b)$ es un máximo de f, entonces $f(x, y) - C \leqq 0$ sobre S', es decir, S' está por completo en uno de los lados de S, y también S está en uno de los lados de S'. Es decir, $\phi(x, y) - C'$ tiene un signo constante sobre S y, como es igual a 0 en (a, b), tiene un máximo, o bien, un mínimo allí.

Ejercicios 3.7e (p. 390)

1. Para f y ϕ, suaves, el mínimo c caracteriza a una superficie de nivel $f(x, y, z) = c$, tangente a la superficie $\phi(x, y, z) = 0$.
2. Encuéntrese un punto sobre la intersección de los dos cilindros $\phi(x, y) = 0$ y $\psi(y, z) = 0$, donde $f(x, y, z)$ sea un extremo. Suponiendo que f es suave y que la intersección es una curva suave, esto ocurre en donde una superficie de nivel de f toca a la curva.

Ejercicios 3.7f (p. 397)

1. Encontrar los extremos de

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + \lambda(D - Ax - By - Cz)$$

para obtener las condiciones

$$2(x - a) - \lambda A = 2(y - b) - \lambda B = 2(z - c) - \lambda C = 0,$$

de donde

$$\lambda = \frac{2(D - aA - bB - cC)}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Esto da

$$x = a + \frac{A(D - aA - bB - cC)}{A^2 + B^2 + C^2}, \ldots$$

y la distancia mínima, p, está dada por

$$p = \frac{|D - aA - bB - cC|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2. $(4 + \sqrt{5})/\sqrt{2}$, $(4 - \sqrt{5})/\sqrt{2}$.
3. El valor máximo es el mismo que para la expresión $ax^2 + 2bxy + cy^2$ sujeta a la condición subsidiaria $ex^2 + 2fxy + gy^2 = 1$.

4. Ver el Ejercicio 3,
   (a) $14/3 + 2\sqrt{67}/3$.
   (b) La función tiene un máximo no estricto (p. 376) igual a 1.95, cuando $y/x = 0.64$.
5. Obviamente, la elipse toca al círculo; es decir, las dos ecuaciones deben dar una raíz doble en x. De aquí que la condición para el contacto sea $a^2(b^2 - 1) = b^4$; $a = 3/\sqrt{2}$, $b = \sqrt{3/2}$.
6. $(-1/\sqrt{14}, -2/\sqrt{14}, -3/\sqrt{14})$. Este está sobre la recta que une al punto dado con el centro.
7. $A = a^2/x$, $B = b^2/y$, $C = c^2/z$, junto con la condición subsidiaria $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$:

   (a) $$x = \frac{a^{4/3}}{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3}}}, \ldots$$

   (b) $$x = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{a + b + c}}, \ldots$$

8. Los vértices están dados por $x = \pm\, a/\sqrt{3}$, $y = \pm b/\sqrt{3}$, $z = c/\sqrt{3}$.
9. Los vértices están dados por $x = a^2/\sqrt{a^2 + b^2}$, $y = b^2/\sqrt{a^2 + b^2}$.
10. $x = 1$, $y = 1$.
11. El eje más grande está dado por el máximo de $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, con la condición subsidiaria de que (x, y, z) esté sobre el elipsoide. Por lo tanto, se tienen las tres ecuaciones

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{l} = \lambda(ax + dy + ez), \ldots.$$

   Multiplicando estas ecuaciones por (x, y, z) respectivamente, y sumando, se tiene $\lambda = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = l$. Por otra parte, pueden considerarse las ecuaciones como tres ecuaciones lineales homogéneas en x, y, z, cuyo determinante debe anularse.
12. (a) De modo equivalente, maximizar

$$a \log x + b \log y + c \log z + \lambda(1 - x^k - y^k - z^k).$$

   Esto da

$$\lambda x^k = \frac{a}{k}, \ \lambda y^k = \frac{b}{k}, \ \lambda z^k = \frac{c}{k};$$

   de donde

$$\lambda = \frac{1}{k}(a + b + c).$$

   El máximo se alcanza cuando

$$x^k = \frac{a}{a + b + c}, \ y^k = \frac{b}{a + b + c}, \ z^k = \frac{c}{a + b + c}$$

   y es igual a $\sqrt[k]{\dfrac{a^a\, b^b\, c^c}{(a + b + c)^{a+b+c}}}$.

   (b) Hágase $x^k = u/(u + v + w)$, $y^k = v/(u + v + w)$, $z^k = w/(u + v + w)$ en

$$(x^a y^b z^c)^k \leq \frac{a^a\, b^b\, c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}\,.$$

13. Véase la demostración semejante para los triángulos en la p. 380. Existe un punto mínimo **O**. Demuéstrese primero que si **O** no es uno de los vértices, entonces sólo puede ser el punto de intersección de las diagonales. Aplíquese el hecho de que los puntos finales de cuatro vectores unitarios cuyo vector suma es **0** forman un rectángulo. Pruébese entonces que la suma de las distancias a los vértices es menor para el punto de intersección de las diagonales que para cualquiera de los vértices.
14. Supóngase que las parejas a, b y c, d son adyacentes. Sean ϕ y ψ los ángulos entre a y b y entre c y d, respectivamente. El problema es maximizar

$$A(\phi, \psi) = \frac{1}{2}(ab \operatorname{sen} \phi + cd \operatorname{sen} \psi)$$

sujeta a la condición

$$f(\phi, \psi) = (a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi) - (c^2 + d^2 - 2cd \cos \psi) = 0.$$

Haciendo iguales a 0 las respectivas derivadas $(\partial/\partial\phi)(A + \lambda f)$ y $(\partial/\partial\psi)(A + \lambda f)$, se obtiene

$$\lambda = -\frac{1}{4 \tan \phi} = \frac{1}{4 \tan \psi},$$

de donde $\phi + \psi = \pi$. Por consiguiente,

$$A = \frac{1}{2}(ab + cd) \operatorname{sen} \phi,$$

donde $\cos \phi = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)/(ab + cd)$. Eliminando ϕ, se obtiene el área máxima

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{4\,(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - b^2)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8abcd - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2}\,,$$

la cual es obviamente independiente de la hipótesis referente al orden de los lados.

La conclusión de que el máximo es independiente del orden de los lados es geométricamente obvia, ya que cualquier pareja de lados adyacentes puede intercambiarse sin afectar el área de un polígono convexo.

Ejercicios A.1 (p. 403)

1. (a) Mínimo en el origen.
   (b) Por simplicidad, introdúzcanse las nuevas variables $u = x + y$, $v = x - y$. Se buscan los valores extremos de

$$f(u, v) = \cos u + \operatorname{sen} v + \frac{1}{4}(u + v)^2.$$

Las condiciones $f_u = f_v = 0$ dan (*i*) $\cos v = - \operatorname{sen} \quad u = - \frac{1}{2}(u + v)$.
Deben considerarse dos posibilidades:

1. $\operatorname{sen} v = - \cos u$. En este caso,

$$f_{uv}^2 - f_{uu}f_{vv} = \cos^2 u$$

y sólo se encuentran puntos silla.

2. $\operatorname{sen} v = \cos u$. En este caso, (*i*) da $u + v = - \pi/2$, por lo que puede tenerse $u = - \alpha$ ó $u = \pi + \alpha$. En el primer caso, $f_{uv}^2 - f_{uu} f_{vv} = \cos u\,(1 - \cos u)$ es positivo y se obtiene un punto silla; en el segundo caso, es negativo y se obtiene un mínimo a partir de $f_{uu} = f_{vv} = \cos \alpha + \frac{1}{2}$.

(c) No existe extremo, puesto que $f_x > 0$ en todo punto.

2. $f(x) + f(y) + f(z)$

$$= 3f(a) + \{(x - a) + (y - a) + (z - a)\}\, f'(a) + \frac{1}{2}\rho^2\{f''(a) + \varepsilon\},$$

donde $\rho^2 = (x - a)^2 + (y - a)^2 + (z - a)^2$. Por otra parte, la condición subsidiaria da

$$\begin{aligned}(x - a) + (y - a) + (z - a) &\\ &= \rho^2 \left(- \frac{\phi''(a)}{2\phi'(a)} + \varepsilon\right) - \frac{\phi'(a)}{\phi(a)} \{(x - a)(y - a) \\ &\qquad + (x - a)(z - a) + (y - a)(z - a)\} \\ &= \left(- \frac{\phi''(a)}{2\phi'(a)} + \frac{\phi'(a)}{2\phi(a)} + \varepsilon\right) \rho^2,\end{aligned}$$

donde $\lim\limits_{x,y,z \to a} \varepsilon = 0$.

3. Si $P_i = (x_i, y_i)$, $r_i = PP_i$, se tiene

$$d^2 f = \sum_1^3 d^2 r_i = \sum_{i=1}^3 r_i^{-3}[(y - y_i)dx - (x - x_i)dy]^2,$$

la cual es definida positiva.

4. En el punto P_1. Nótese que la función $f = r_1 + r_2 + r_3$ es continua en todo el plano pero no es diferenciable en los puntos P_1, P_2, P_3, donde tiene puntos cónicos (como la función $z = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$, la cual geométricamente representa un cono circular). Investíguese la derivada de f en P_1 en todas las direcciones.

5. (a) Si se pone $f = lx + my + nz$, $\phi = x^p + y^p + z^p - c^p$, $F = f - \lambda\phi$, entonces las condiciones para la existencia de valores estacionarios son

(1) $$l = \lambda p x^{p-1},\ m = \lambda p y^{p-1},\ n = \lambda p z^{p-1}.$$

Multiplicando estas ecuaciones por x, y, z, respectivamente, y sumando, se tiene

(2) $$lx + my + nz = \lambda pc^p.$$

Calculando x, y, z a partir de (1) y sustituyendo en $\phi = 0$, se obtiene

$$\lambda p = (l^q + m^q + n^q)^{1/q} c^{1-p}.$$

Sustituyendo λp en (2) por esta expresión se encuentra el valor estacionario.

(b) Ver el Ejercicio 6. Aquí se tiene

$$d^2F = -\lambda p(p-1)\,(x^{p-2}\,dx^2 + y^{p-2}\,dy^2 + z^{p-2}\,dz^2);$$

como $p > 0$, esta forma cuadrática es definida positiva o negativa según que $p \lessgtr 1$.

6. La demostración es semejante a aquélla que se dió para $n = 2$ (p. 400). Una forma cuadrática definida positiva, $\sum a_{ik}x_ix_k$, puede llevarse, mediante una transformación apropiada

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}y_k \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

con un determinante que no se anule, a la forma $\sum a_{ik}x_ix_k = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 > m(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$, donde m es una constante positiva apropiada. Para las aplicaciones, es importante recordar que una condición necesaria y suficiente para que una forma $\Phi = \sum a_{ik}x_ix_k$ sea definida positiva es que sus primeros menores principales de orden 1, 2, . . . , n, como se indica a continuación,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

sean todos positivos. Φ es definida negativa si $-\Phi$ es definida positiva.

7. De acuerdo con la primera regla, se tiene que calcular d^2f a partir de (3), sustituyendo $dx_1, \ldots, dx_m$, $d^2x_1, \ldots, d^2x_m$ según (1). Nótese que (1) implica que

$$d^2\phi_\mu = \sum \phi_{\mu x_i x_k}\,dx_i\,dx_k + \phi_{\mu x_i}\,d^2x_1 + \cdots + \phi_{\mu x_m}\,d^2x_m$$
$$= 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m);$$

si esto se multiplica por λ_μ y se suma a (3) para todos los valores de μ, se tiene $d^2f \doteq d^2F = \sum F_{x_1 x_k}\,dx_i\,dx_k$, debido a que $d^2x_1, \ldots, d^2x_m$ se cancelan en virtud de las relaciones (2).

8. Para $F = f + \lambda\phi$ (despreciando un factor positivo), se obtiene

$$d^2F = \sum_{i,k=1,\ldots,n} dx_i\,dx_k \qquad (d\phi = dx_1 + \cdots + dx_n = 0).$$

Eliminando dx_n, se tiene que demostrar que la forma cuadrática

$$-d^2F = (dx_1 + \cdots + dx_{n-1})^2 - \sum_{i,k=1,\ldots,n-1} dx_i\, dx_k$$

$$= \sum_{i=1,\ldots,n} dx_i^2 + \sum_{i,k}^{1,n-1} dx_i\, dx_k$$

es definida positiva.

9. De $dx = -dy - dz$,

$$d^2F = -2s[(s-z)dy^2 + (s-x)dy\, dz + (s-y)dz^2].$$

Cuando $x = y = z$ el discriminante de d^2F es positivo y d^2F es definida negativa.

Ejercicios A.2 (p. 413)

1. (c) Usando coordenadas polares, $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, tómese

$$f(x, y) = r^{n+1} \operatorname{sen} (n+1)\theta,$$

para lo cual

$$\nabla f = (n+1)r^n (\operatorname{sen} n\theta, \cos n\theta).$$

2. (b) Extiéndase la solución del Ejercicio 1:

$$f(x, y) = r^{-n+1} \operatorname{sen} (-n+1)\theta$$

y

$$\nabla f = (n-1)r^{-n} (\operatorname{sen} n\theta, -\cos n\theta).$$

3. Si no existe punto fijo, $u^2 + v^2 \neq 0$ en todo punto de R. Dado que la región convexa R es simplemente conexa, como en la p. 412 se concluye que el índice I_C de la curva XC con respecto al campo vectorial es cero. Por otra parte, como R se aplica sobre sí misma, el vector (u, v) de todo punto sobre C apunta hacia R o es tangencial. Esto implica que $I_C = 1/2\pi \int_C d\theta = 1$, si C tiene la orientación usual determinada por el sistema coordenado x, y.

Ejercicios A. 3 (p. 416)

1. (a) Un nodo en $(0, 0)$, con tangentes $x = \pm y$.
   (b) Las ecuaciones

$$f_x = 2x - 6x^2 + 4xy^2 = 0,$$

$$f_y = 2y - 6y^2 + 4x^2y = 0$$

tienen las soluciones comunes $(0, 0)$, $(\sqrt{\frac{1}{2}}, 0)$, $(0, \sqrt{\frac{1}{2}})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, y $(1, 1)$, de las cuales sólo la primera y la última son puntos de la curva. En $(0, 0)$ la singularidad es un punto aislado. En $(1, 1)$, $f_{xx} = f_{yy} = 0$ y $f_{xy} = 8$; la singularidad es un nodo con tangentes $x = 1$ y $y = 1$.

(c) Una tangente doble $y = x$ en $(0, 0)$. La curva tiene dos ramas; a segundo orden, $y = x \pm x^2$.

(d) Una tangente doble $y = 0$ en $(0, 0)$. La curva tiene una cúspide. Esta es la misma curva que la de la Sección 3.2b, Ejercicio 3.

Ejercicios A.4 (p. 417)

1. Si la forma cuadrática es no degenerada y definida, la singularidad es un punto aislado; si es no degenerada e indefinida, las rectas tangentes en la singularidad forman un cono. Si la forma es degenerada y semidefinida, las rectas tangentes pueden estar en un plano donde las dos ramas sean tangentes mutuas, como el plano $z = 0$ para las superficies

$$z^{2/3} + (x^2 + y^2)^{2/3} = a^{2/3}$$

en $(a, 0, 0)$ (una cúspide lineal)

$$z^4 = (x^2 + y^2)^3$$

en $(0, 0, 0)$ (dos ramas tangentes). O puede haber una cúspide puntual en donde sólo exista una recta tangente, como la recta $x = y = 0$ para la primera superficie en $(0, 0, a)$. Si la forma es degenerada e indefinida, las rectas tangentes están en dos planos, como los planos $x = \pm y$ en $(0, 0, 0)$ para la superficie $x^2 - y^2 + z^3 = 0$.

Ejercicios A.5 (p. 418)

1. El flujo es estacionario; es decir, la velocidad del fluido es constante en el tiempo, en cada punto del espacio.
2. Si $\mathbf{U} = (u, v, w)$ es la velocidad de la partícula que pasa por el punto $\mathbf{X} = (x, y, z)$ en el instante t, su aceleración es

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} \cdot \nabla\mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}$$

$$= \mathbf{U} \cdot \nabla\mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}.$$

Ejercicios A.6 (p. 420)

1. (a) $x = -2 - 2 \cos \alpha$, $y = -2 \operatorname{sen} \alpha$ ó $(x + 2)^2 + y^2 = 4$; $L = 4\pi$; $A = 4\pi$.

(b) $x = -\text{sen}^3 \alpha$, $y = -\cos^3 \alpha$ ó $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$,

$$L = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} |\text{sen } 2\alpha \, d\alpha| = 6\int_0^{\pi/2} \text{sen } 2\alpha \, d\alpha = 6.$$

$A = -(3/8)\pi$, donde el signo proviene de la orientación de la curva en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.

2. Sí. Considérese el triángulo rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, c)$, $(c^{-2}, 0)$, para c grande.
3. Para que la curva sea expresable como la envolvente de sus tangentes debe ser seccionalmente suave.

Ejercicios 4.1 (p. 429)

1. En la n-ésima subdivisión, cualquier cuadrado que contiene puntos de S también contiene puntos de T: $A_n^+(S) \leqq A_n^+(T)$. Al pasar hacia el límite conforme $n \to \infty$, se obtiene el resultado.
2. En la n-ésima subdivisión, ningún cuadrado que contenga puntos de $T - S$ puede consistir completamente de puntos de S, y ambas clases de cuadrados contienen puntos de T; por lo tanto,

$$A_n^+(T) \geqq A_n^+(T - S) + A_n^-(S).$$

De modo semejante,

$$A_n^+(T) \leqq A_n^-(T - S) + A_n^+(S).$$

Combinando estos resultados con $A_n^-(T - S) \leqq A_n^+(T - S)$, se encuentra

$$A_n^+(T) - A_n^+(S) \leqq A_n^-(T - S) \leqq A_n^+(T - S)$$
$$\leqq A_n^+(T) - A_n^-(S),$$

de lo cual se llega al resultado al pasar hacia el límite conforme $n \to \infty$.

3. Para la demostración de (a), obsérvese que cualquier cuadrado de la n-ésima subdivisión que entra en $A_n^+(S)$ o en $A_n^+(T)$ sólo puede entrar en una o en ambas de éstas; si un cuadrado entra sólo en una, entra en $A_n^+(S \cup T)$ si entra en ambas, entra en $A_n^+(S \cup T)$; pero no necesariamente entra en $A_n^+(S \cap T)$ porque el cuadrado puede contener puntos tanto de S como de T sin contener puntos comunes a los dos. Como consecuencia,

$$A_n^+(S \cup T) + A_n^+(S \cap T) \leqq A_n^+(S) + A_n^+(T),$$

de lo cual se llega a (a).

Para (b), se observa que cualquier cuadrado que entra en una de las sumas pero no en la otra, digamos, en $A_n^-(S)$ pero no en $A_n^-(T)$, entrará en $A_n^-(S \cup T)$ pero no en $A_n^-(S \cap T)$, y cualquier cuadrado que entre tanto en $A_n^-(S)$ como en $A_n^-(T)$ también entra tanto en $A_n^-(S \cap T)$ como en $A_n^-(S \cup T)$. Por tanto,

$$A_n^-(S) + A_n^-(T) \leqq A_n^-(S \cap T) + A_n^-(S \cup T),$$

de lo cual se llega a (b).

Nótese que un cuadrado que consiste de puntos de $S \cup T$ no necesariamente consiste completamente de puntos de S o completamente de puntos de T; por consiguiente, no puede eliminarse el signo de desigualdad.

4. En la n-ésima subdivisión, considérese cualquier cuadrado que consista enteramente de puntos de $S \cup T$. Si contiene cualquier punto de S, el cuadrado entra en $A_n^+(S)$, pero no puede entrar en $A_n^-(T)$, porque no puede consistir por completo de puntos de T. Si el cuadrado no contiene puntos de S, debe consistir completamente de puntos de T y, por tanto, entra en $A_n^-(T)$. Por último, se observa que cualquier cuadrado que entra en $A_n^+(S)$ pero no está por completo en $S \cup T$ debe contener un punto frontera de $S \cup T$ y, por lo tanto, entrar en $A_n^+(\partial[S \cup T])$. Combinando estos resultados se encuentra

$$A_n^-(S \cup T) \leqq A_n^+(S) + A_n^-(T) \leqq A_n^-(S \cup T) + A_n^+(\partial[S \cup T]).$$

Como $\lim_{n\to\infty} A_n^-(S \cup T) = A(S \cup T)$ y $\lim_{n\to\infty} A_n^+(\partial[S \cup T]) = 0$, se llega al resultado que se desea.

5. (a) Denotemos el contenido de Jordan en el sistema original por A y en el sistema transformado por B. Como $A(\partial S) = 0$, $\lim_{n\to\infty} A_n^+(\partial S) = 0$. Sea P cualquier punto de ∂S. Nótese que en la n-ésima subdivisión, la distancia máxima desde P hasta cualquier punto de un cuadrado que contenga a P es $2^{-n}\sqrt{2}$. Ahora bien, en la n-ésima subdivisión con respecto al nuevo sistema coordenado, sea R_B cualquier cuadrado que contenga a P. Fórmese un cuadrado mayor, R_B^*, con R_B en su centro y cinco cuadrados de subdivisión sobre uno de sus lados. La distancia mínima desde cualquier punto de R_B hasta la frontera de R_B^* es $2 \cdot 2^{-n}$. Así, R_B^* contiene a cada cuadrado R_A que contenga a P en la subdivisión con respecto al sistema original. Se concluye que por cada cuadrado que entra en $A_n^*(\partial S)$ no más de 25 cuadrados entran en $B_n^+(\partial S)$. Ya que $0 \leqq B_n^+(\partial S) \leqq A_n^+(\partial S)$, se deduce que $\lim_{n\to\infty} B_n^+(\partial S) = 0$.

   (b) Obsérvese que en la n-ésima subdivisión con respecto a los dos sistemas, cualquier cuadrado que entra en $A_n^-(S)$ es cubierto por cuadrados que entran en $B_n^+(S)$. Se deduce que $A_n^-(S) \leqq B_n^+(S)$ y, pasando al límite conforme $n \to \infty$, $A(S) \leqq B(S)$. Por un argumento paralelo, $B(S) \leqq A(S)$. En consecuencia, $A(S) = B(S)$.

   El argumento anterior aplica tácitamente la hipótesis de que si dos conjuntos U y V están constituídos de cuadrados congruentes que no se traslapan, definidos por sus respectivas mallas, y $U \subset V$, entonces el número de cuadrados en U es menor o igual al número de cuadrados en V. Esto se prueba inductivamente como sigue: sean u y v dos colecciones finitas de cuadrados que no se traslapan, con lados de longitud a, tales que la unión, U, de los cuadrados de u está contenida en la

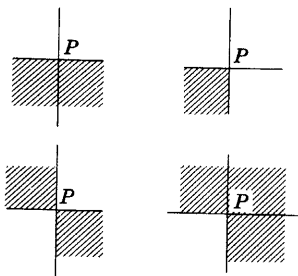
unión, V, de los cuadrados de v. Si p es el número de cuadrados de u y q es el número de cuadrados de v, entonces $p \leqq q$, y la igualdad se cumple si y sólo si $u = v$. Para la demostración se aplica inducción sobre p.

Si $p = 1$, no puede tenerse $q < p$, porque entonces $q = 0$ y V no contiene a U. Además, si $q = p = 1$, se observa que vértices opuestos del cuadrado de u deben ser vértices opuestos del cuadrado de v, ya que la distancia máxima, $a\sqrt{2}$, entre dos puntos cualesquiera de cualquiera de los dos cuadrados sólo se alcanza en los vértices opuestos. Por consiguiente, los cuadrados son los mismos y $u = v$.

Ahora se prueba que la veracidad de la hipótesis para un p fijo implica su veracidad para $p + 1$: sea u una colección de $p + 1$ cuadrados y u^* cualquier subcolección de p cuadrados. Supóngase que $q < p + 1$. Puesto que $V \supset U \supset U^*$, $q \geqq p$, por la hipótesis de inducción. Sin embargo, $p \leqq q < p + 1$ implica que $q = p$, y, por lo tanto, por la hipótesis de inducción, $v = u^*$. Pero entonces V no puede contener al único cuadrado de u que no pertenece a u^*, contradiciendo el que $V \supset U$. Se concluye entonces que $q \geqq p + 1$. Si se cumple la igualdad, $q = p + 1$, se puede demostrar que $v = u$. Se demostrará que el conjunto $U(= V)$ debe tener un vértice sobre la frontera; es decir, al menos uno de los cuadrados R de u debe tener un vértice con sus lados adyacentes sobre la frontera de U. El cuadrado R también debe pertenecer a v, como se probará. Por la hipótesis de inducción, las colecciones u^* y v^*, que se obtienen de u y v eliminando a R, deben ser las mismas. Como consecuencia, $u = v$.

Para probar que U tiene un vértice, sea P cualquier punto de U a la mayor distancia de un punto arbitrario dado, Q. El punto P debe estar sobre la frontera de U, de lo contrario sería un punto interior y su vecindad dentro de U contendría puntos todavía más alejados de Q. Además, P debe ser un vértice de uno de los cuadrados de u, porque si fuera un punto interior de uno de los lados, al menos uno de los dos vértices sobre ese lado estaría más alejado de Q que P, ya que estaría más alejado que P de la perpendicular bajada de Q a la recta que contiene al lado. Dos lados que se corten en P no pueden estar alineados, porque el mismo argumento indica que uno de los puntos extremos del segmento formado por los dos lados debe estar más alejado de Q que P. Se concluye que P y sus lados adyacentes sólo pueden pertenecer a un cuadrado R de u. (La figura muestra todas las configuraciones posibles en la vecindad de un vértice frontera.) Exactamente el mismo argumento se aplica a v, pero entonces, R debe pertenecer a v, como se afirma.

6. Si P es un punto frontera de S, o es un punto de S y está cubierto o bien es un punto límite de S tal que toda vecindad agujerada de P contiene un número infinito de puntos de S. Por lo tanto, P es el límite de una sucesión convergente de puntos distintos de S. Puesto que la colección de "conjuntos-cubierta" es finita, al menos uno de estos conjuntos debe contener una subsucesión y, debido a que este conjunto es cerrado, debe también contener al límite de la subsucesión, P.



7. El área del conjunto es cero. Sea S_n el conjunto de los puntos para los cuales tanto p como q son mayores que n, y T_k el conjunto para el cual p ó q es igual a k.

$$S = S_n \cup T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_n.$$

Nótese que S_n está contenido en el cuadrado

$$\left\{(x, y) \mid 0 \leqq x < \frac{1}{n},\ 0 \leqq y < \frac{1}{n}\right\}.$$

Como consecuencia,

$$A_n^+ (S^n) \leqq \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}\right)^2$$

Obsérvese también que T_k contiene $2k - 1$ puntos, cada uno de los cuales puede estar en no más de cuatro cuadrados de la n-ésima subdivisión. Consecuentemente,

$$A_n^+ (T_k) \leqq \frac{4(2k-1)}{2^{2n}}$$

En resumen, se ve que

$$A_n^+ (S) \leqq A_n^+ (S_n) + \sum_{k=1}^{n} A_n^+ (T_k)$$
$$\leqq \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}\right)^2 + \frac{4n^2}{2^{2n}};$$

de donde $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^+ (S) = 0$.

Ejercicios 4.6 (p. 461)

1. (a) $a^2b^2 (a^2 - b^2)/8$.
   (b) -4.
   (c) $\log 2$.
   (d) $-a + (e^{ab} - 1)/b$.
   (e) $\pi/16$.
   (f) $4/3$.

2. $\pi/2$
3. 0.
4. 2π.
5. Usense coordenadas polares:

(a) $\int_{-4/\pi}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{r}{(1+r^2)^2}\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

(b) $\int_0^{\pi/3} \int_0^{\sqrt{3}/\cos(\theta-\pi/6)} \frac{r}{(1+r^2)^2}\, dr\, d\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ arc tan } \frac{1}{2}.$

6. Usese la sustitución $x = a\xi,\ y = b\eta,\ z = c\zeta$; a continuación, úsense coordenadas polares y la simetría para obtener

$$8a^2b^2c^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^5 \cos\phi \sin\phi \sin^3\theta \cos\theta\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{a^2b^2c^2}{6}.$$

7. Aplíquese el hecho de que la figura es simétrica; 1/16 del volumen se encuentra por encima del triángulo con vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1) y por debajo de la superficie $x^2 + z^2 = 1$; 16/3.
8. $\pi\,(2r^3 - 3r^2 h + h^3)$.
9. 0.
10. 0. Con la restricción adicional $z \geqq 0$; $\pi/8$.
11. 1/50,400.
12. Usense coordenadas cilíndricas e intégrese con respecto a θ, r, y z, en ese orden; $\pi[2 - (3/2) \log 3]$.
13. Usense coordenadas esféricas con origen en $(0, 0, \frac{1}{2})$. Con $\alpha = \cos^{-1} [\rho - (3/4\rho)]$ para $\frac{1}{2} \leqq \rho \leqq 3/2$,

$$\int_{1/2}^{3/2} \int_0^{\alpha} \int_0^{2\pi} + \int_0^{1/2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\phi\, d\theta\, d\rho$$

$$= \pi \left\{2 + \frac{3}{2} \log 3\right\}.$$

14. Usense coordenadas polares; $4 \log (1 + \sqrt{2})$.
15. Sea (a, b) cualquier punto del dominio y elíjase una vecindad δ, R_δ de (a, b) en el interior de D, tan pequeña que $|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$ en esa vecindad. Por el teorema del valor medio,

$$\int_{R_\delta} f(x, y)\, dx\, dy = \mu\delta^2,$$

donde $|\mu - f(a, b)| < \varepsilon$. Puesto que la integral se anula, $\mu = 0$. Como consecuencia, $|f(a, b)| < \varepsilon$ para ε, positivo arbitrario, y de aquí que $f(a, b) = 0$.
16. Usando $d(x, y)/d(u, v) = u/(1 + v^2)$, se obtiene

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^\infty \int_{-u/a}^{u/a} \frac{e^{-(u^2+a^2)}u}{1+v^2}\,dv\,du$$

$$= 2e^{-a^2}\int_0^\infty ue^{-u^2} \text{ arc tan } \frac{u}{a}\,du.$$

Integrando por partes se llega al resultado.

17. Hágase $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$. De $\xi_x = \eta^2 - \xi^2$, $\xi_y = -2\xi\eta$, $\eta_x = -2\xi\eta$, $\eta_y = \xi^2 - \eta^2$, se deduce que $|d(x, y)/d(\xi, \eta)| = 1/\rho^4$ y también que $u_x{}^2 + u_y{}^2 = \rho^4(u_\xi{}^2 + u_\eta{}^2)$.
18. Para nuevas coordenadas cartesianas a la misma escala, el jacobiano de la transformación es 1. Con $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, elíjanse las coordenadas cartesianas u, v, w para las cuales $u = (x\xi + y\eta + z\zeta)/r$. La integral queda

$$I = \iiint \cos ru\,du\,dv\,dw$$

sobre la esfera $u^2 + v^2 + w^2 \leqq 1$. En coordenadas cilíndricas, u, $v = \rho \cos\theta$, $w = \rho \text{ sen } \theta$, se encuentra

$$I = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1-u^2}} \rho \cos ru\,d\rho\,d\theta\,du$$

$$= 4\pi\left(\frac{\text{sen } r}{r^3} - \frac{\cos r}{r^2}\right).$$

19. $-\int_1^2 (4-y)\int_{4/y}^{(20-8y)/(4-y)} dx\,dy = 16 \log 2 - 12.$

Ejercicios 4.7 (p. 474)

1. (a) $K = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\beta \int_\varepsilon^a r \log r^2\,dr\,d\theta.$

   (b) $K = \left(\int_0^{a\cos\beta}\int_0^{x\tan\beta} + \int_{a\cos\beta}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\log(x^2+y^2)\,dy\,dx.$
2. (a) π. (b) π^2.
3. La simetría indica que al invertir el orden de la integración se invierte el signo. Como I no es cero, $I = \frac{1}{2}$, y queda establecido el resultado. Alternativamente, para $0 < a, b \leqq 1$, hágase

$$J = \int_b^1 \int_a^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}\,dx\,dy = \frac{(1-a)(1-b)(b-a)}{2(1+a)(1+b)(a+b)}.$$

Integrar primero con respecto a x, después con respecto a y, equivale a tomar

$$I = \lim_{b\to 0}\ \lim_{a\to 0}\ J = \frac{1}{2};$$

integrar primero con respecto a y, después con respecto a x, equivale a tomar

$$\lim_{a\to 0}\ \lim_{b\to 0}\ J = -\frac{1}{2}.$$

Ejercicios 4.8 (p. 487)

1. Aplíquese la regla de Guldin; $2\pi^2 ab$.
2. $\frac{1}{2}\pi abh^2$.
3. Hágase $x = a\xi$, $y = b\eta$, $z = c\zeta$. Con $d = p/\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}$, el volumen es $\pi abc(2 - 3d + d^3)/3$.
4. (a) Con θ y ϕ como parámetros para ambas superficies, $\sqrt{EG - F^2} = a^2$ sen θ.

   (b) $a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{f(\phi)} a^2 \operatorname{sen} \theta \, d\phi \, d\theta = a^2 \int_0^{2\pi} \{1 - \cos f(\phi)\} \, d\phi.$

   (c) Tómese $f(\phi) = \pi/4$; $\pi a^2(2 - \sqrt{2})$.
5. Sean a, b, c las longitudes de los lados opuestos a A, B, C, respectivamente, y p la altura desde C. Aplíquese la regla de Guldin.

   (a) $\frac{1}{3}\pi cp^2$,

   (b) $\pi p(a + b)$.
6. $\frac{1}{3}\pi\,(n - m)\,(4n^2 + 4mn + 4m^2 - 6n - 6m + 3)$.
7. Tómense las coordenadas polares en el plano x, y como parámetros superficiales para el cilindro $x^2 + z^2 = a^2$. Por lo tanto, $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, $z = \sqrt{a^2 - r^2}$ y $E = a^2/(a^2 - r^2)$, $F = 0$, $G = r^2$. Entonces el área de la superficie es

$$S = 8\int_0^{\pi/4} \int_0^{b \sec \theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, dr\, d\theta$$
$$= -8a \int_0^{\pi/4} \sqrt{a^2 - r^2}\,\Big|_0^{b \sec \theta}\, d\theta$$
$$= 2a^2\pi - 8aI,$$

donde

$$I = \int_0^{\pi/4} \sqrt{a^2 - b^2 \sec^2\theta}\, d\theta.$$

Hágase $\theta = \arctan\,(\sqrt{(a^2 - b^2)/b^2}\operatorname{sen}\omega)$, para obtener

$$I = \int_0^{\lambda} \frac{(a^2 - b^2)\cos^2 \omega}{a^2 \operatorname{sen}^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega}\, d\omega,$$

donde $\tan \lambda = b/\sqrt{a^2 - 2b^2}$. La integral explícita es

$$I = a \arctan\left(\frac{a}{b} \tan \omega\right) - b\omega\,\Big|_0^{\lambda}.$$

De aquí que

$$S = 8a^2\left[\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{a}{\sqrt{a^2 - 2b^2}}\right] - 8ab \arctan\frac{b}{\sqrt{a^2 - 2b^2}}.$$

8.
$$\begin{aligned}\Sigma &= \iint \sqrt{EG - F^2}\, dr\, d\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^{f'(\theta)} \sqrt{r^2 + f'^2}\, dr \\ &= [\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})] \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} f'^2\, d\theta,\end{aligned}$$

(ver el Volumen I, p. 215), que es $[\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})]$ veces el área de la proyección

$$\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2,\ 0 \leqq r \leqq f'(\theta).$$

Ejercicios 4.9 (p. 500)

1. (a) Usense coordenadas cilíndricas. Sobre el eje del cono, a tres cuartos de la distancia del vértice a la base.
   (b) Sobre el eje del cono, a dos tercios de la distancia del vértice a la base.
2. $x = 2x_0/3$, con $y = z = 0$.
3. Sea (ξ, η, ζ) el centroide:

$$\xi = \frac{1}{V} \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} x\, dz\, dy\, dx,$$

   donde V, el volumen del tetraedro, se obtiene remplazando el integrando x por la unidad en la integral triple anterior. Intégrese para obtener $\xi = a^2bc/24V$, donde $V = abc/6$. Por tanto, por simetría algebraica, $\xi = a/4$, $\eta = b/4$, $\zeta = c/4$.
4. (a) Usense coordenadas esféricas, $z = 3(b^4 - a^4)/8(b^3 - a^3)$, $x = y = 0$.
   (b) Factorícese $b - a$ en el numerador y el denominador de la solución de la parte (a) y tómese el límite.
5. $m\,(b^2 + c^2)/3$.
6. Si μ es la densidad,

   (a) $\pi\mu h(R^2 - R'^2)$,

   (b) $2\pi\mu h(R - R')\left[\frac{1}{4}(R + R') + \frac{1}{3}h^2\right]$.

7. Usense coordenadas esféricas. Masa, $\frac{1}{3}\pi a^3[\mu_0 + 3\mu_1]$. Momento de inercia, $4\pi\, a^5\,[\mu_0 + 5\mu_1]/45$.
8. Sustitúyanse $x = a\xi$, $y = b\eta$, $z = c\zeta$; úsense las expresiones para los momentos de inercia dadas en el texto, y las propiedades de simetría del elipsoide:

   (a) $\frac{4}{15}\pi abc\,(a^2 + b^2)$,

   (b) $\frac{4}{15}\pi abc\,\{(1 - \alpha^2)a^2 + (1 - \beta^2)b^2 + (1 - \gamma^2)c^2\}$.

9. Por ejemplo, con $A = \int_R (y^2 + z^2)\, dV$, $B = \int_R (z^2 + x^2)\, dV$, y $C = \int_R (x^2 + y^2)\, dV$,

$$A + B = \int_R (x^2 + y^2 + 2z^2)\, dV$$
$$= C + \int_R 2z^2\, dV > C.$$

10. Sea (ξ, η, ζ) el punto del rayo a la distancia $1/\sqrt{I}$ de 0. El cuadrado de la distancia de un punto (x, y, z) a la recta es

$$x^2 + y^2 + z^2 - (\xi x + \eta y + \zeta z)^2/(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

Como consecuencia,

$$I = \iiint_R \left[x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(\xi x + \eta y + \zeta z)^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \right] dx\, dy\, dz$$

$$= \frac{1}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, se obtiene una expresión cuadrática definida positiva en ξ, η, ζ igualada a la unidad; entonces, la ecuación es la de un elipsoide.

11. $a^2(x - \xi)^2 + b^2(y - \eta)^2 + c^2(z - \zeta)^2$
$= \{a^2 + b^2 + c^2 + 5(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\}\ \{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2\}.$

12. $(\frac{1}{3}, 0, 0)$

13. $x = \dfrac{5a}{16} \dfrac{2a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$

14. $I = (I_1 + m_1 r_1^2) + (I_2 + m_2 r_2^2)$, donde r_1 y r_2 son las distancias de los ejes que pasan por lo centros de masa de las partes respectivas al eje que pasa por el centro del sistema. Usese $m_1 r_1 = m_2 r_2$ y $r_1 + r_2 = d$.

15. La distancia del punto (x, y, z) al plano $ux + vy + wz = -1$ está dada po

$$\frac{ux + vy + wz + 1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

Por lo tanto, el momento de inercia del elipsoide con respecto a este plano está dado por

$$\frac{Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + V}{u^2 + v^2 + w^2},$$

donde A, B, C denotan los momentos de inercia con respecto a los planos coordenados y V es el volumen del elipsoide, es decir, $B = 4ab^3c/15$, $C = 4abc^3/15$, y $V = 4abc/3$. Ahora se tiene que encontrar la envolvente de los planos para la cual esta expresión es igual a h. La envolvente está dada por las ecuaciones

$$(A - h)u = \lambda x, \quad (B - h)v = \lambda y, \quad (C - h)w = \lambda z.$$

donde λ es un multiplicador común, el cual, a partir de la expresión para el momento de inercia y la ecuación del plano, resulta ser V Elevando las tres ecuaciones, al cuadrado se obtiene la ecuación de la envolvente, a saber,

$$\frac{x^2}{h-A}+\frac{y^2}{h-B}+\frac{z^2}{h-C}=\frac{1}{V},$$

16.
$$\frac{2\pi a^2 b\mu}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\left\{\frac{1}{a}(b+\sqrt{b^2-a^2})\right\},$$

donde μ es la densidad constante.

17. $2\pi\mu\int_a^b\sqrt{z^2+\{f(z)\}^2}\,dz-\pi\mu\,|b^2\pm a^2|$, donde se toma el signo inferior o superior según el origen esté dentro del cuerpo o fuera de él.

18. Sea $\mathbf{X}$ un punto variable del sólido, $\mathbf{0}$ su centro de masa y $\mathbf{Y}$ un punto variable del espacio donde se calcula el potencial. El potencial en $\mathbf{Y}$ es

$$U(\mathbf{Y})=\iiint_S\frac{\mu dV}{|\mathbf{Y}-\mathbf{X}|}.$$

Sea a el valor máximo de $|\mathbf{X}|$ en S, $|\mathbf{X}|\leqq a$, y supóngase que $|\mathbf{Y}|>a$. Entonces, si M es la masa del sólido,

$$\left|U(\mathbf{Y})-\frac{M}{|\mathbf{Y}|}\right|=\left|\iiint_S\mu\left(\frac{1}{|\mathbf{Y}-\mathbf{X}|}-\frac{1}{|\mathbf{Y}|}\right)dV\right|$$
$$\leqq\iiint\mu\left|\frac{1}{|\mathbf{Y}-\mathbf{X}|}-\frac{1}{|\mathbf{Y}|}\right|dV$$
$$\leqq\iiint\mu\frac{|\mathbf{X}|}{|\mathbf{Y}|(|\mathbf{Y}|-|\mathbf{X}|)}dV$$

(ya que, por la desigualdad del triángulo, $\big||\mathbf{Y}|-|\mathbf{Y}-\mathbf{X}|\big|\leqq|\mathbf{X}|$)

$$\leqq\iiint\mu\frac{a}{|\mathbf{Y}|(|\mathbf{Y}|-a)}dV$$
$$\leqq\frac{2a}{|\mathbf{Y}|^2}\iiint\mu\,dV$$

(donde se supone que $|\mathbf{Y}|\geqq 2a$)

$$\leqq\frac{2aM}{|\mathbf{Y}|^2}.$$

19. Como $A-BR^2=\frac{5}{2}$, $A-\frac{3}{5}BR^2=\frac{11}{2}$, se tiene $A=10$, $B=\frac{15/2}{R^2}$. La atracción en un punto interno es igual a la atracción de la masa total de los puntos en el interior de la esfera de radio r, concentrada en el centro de ésta.

20. Usense coordenadas cilíndricas o esféricas.

21. Por medio de una traslación puede hacerse que el triángulo esté en el semiplano superior. Entonces su momento de inercia es igual a

$$\phi(x_1y_1, x_2y_2) + \phi(x_2y_2, x_3y_3) + \phi(x_3y_3, x_1y_1),$$

donde $\phi(x_1y_1, x_2y_2)$ denota el momento de inercia del cuadrilátero con vértices $(x_1, 0)$, (x_1, y_1), $(x_2, 0)$, $(0, y_2)$, multiplicado por el signo de $(x_1 - x_2)$. Demuéstrese entonces que

$$\phi(x_1y_1, x_2y_2) = \frac{1}{12}(x_1 - x_2)(y_1^3 + y_1^2y_2 + y_1y_2^2 + y_2^3).$$

22. $I = \int_1^2 (y - 4)dy \int_{(8y-20)/(y-4)}^{4/y} dx = 12 - 16 \log 2.$

23. Sea $f(\rho)$ el potencial asociado con una carga puntual unitaria. El potencial en un punto $(0, 0, z)$ del interior de una lámina esférica con centro en el origen y que lleva una densidad de carga unitaria es

$$U(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\rho)a^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi,$$

donde, en el integrando, si a es el radio de la esfera, ρ está dado por

$$\rho = \sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \theta}.$$

Si g es una función tal que $g'(\rho) = \rho f(\rho)/z$, donde z se mantiene constante, entonces

$$U(z) = 2\pi a g(\rho)\Big|_{\theta=0}^{\pi}$$
$$= 2\pi a[g(a + z) - g(a - z)].$$

Como la fuerza se anula para $|z| < a$, se obtiene

$$U'(z) = 2\pi a[g'(a + z) + g'(a - z)] = 0;$$

en consecuencia,

$$(a + z)f(a + z) = (a - z)f(a - z).$$

Esta es una relación que se cumple para toda a positiva y toda z con $|z| < a$. Introduciendo las nuevas variables independientes ξ y η, con $\xi = a + z$ y $\eta = a - z$, se obtiene

$$\xi f(\xi) = \eta f(\eta)$$

para todas ξ y η. positivas. Por consiguiente, $\rho f(\rho) = c$, donde c es contante. Así, se concluye que

$$f(\rho) = \frac{c}{\rho} \qquad (c = \text{constante}),$$

que es el potencial para la fuerzas que obedecen la ley del inverso del cuadrado.

Ejercicios 4.11 (p. 520)

1. Hágase la sustitución $x_1 = a_1\xi_1, \ldots, x_n = a_n\xi_n$: $\dfrac{\sqrt{\pi}^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} a_1a_2 \cdots a_n.$

2. $$I = \int \cdots \int \frac{f(x_1) + f(-x_1)}{\sqrt{1 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}} dx_2 \cdots dx_n$$

tomada en todo el interior de la esfera unitaria $(n - 1)$ dimensional, en el espacio $x_2, \cdots, x_n$. Introduciendo coordenadas polares se obtiene

$$I = \int_0^1 dr \int_{S(r)} \frac{f(\sqrt{1 - r^2}) + f(-\sqrt{1 - r^2})}{\sqrt{1 - r^2}} d\sigma,$$

donde $S(r)$ denota la esfera de radio r y centro en O, en el espacio $x_2 \cdots,$ x_n. Como el integrando sólo depende de r,

$$I = \omega_{n-1} \int_0^1 \frac{f(\sqrt{1 - r^2}) + f(-\sqrt{1 - r^2})}{\sqrt{1 - r^2}} r^{n-2}\, dr.$$

Poniendo $y = \sqrt{1 - r^2}$, se tiene

$$I = \omega_{n-1} \int_{-1}^{+1} f(y)\,(1 - y^2)^{(n-3)/2}\, dy.$$

3. $a_1 a_2 \cdots a_n / n!$

Ejercicios 4.12 (p. 533)

1. Póngase $I_n(a) = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\, dx$; entonces $I_n(a) = -I''_{n-2}(a)$, donde los apóstrofos denotan la derivación con respecto a a. Alternativamente, intégrese por partes.

$\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)!$ cuando n es impar, $\sqrt{\pi}\,\frac{1.3.\cdots(n-1)}{2^{(n+2)/2}}$ cuando n es par.

2. Intégrese por partes. Diverge para $y \leqq 0$; para $y > 0$, $F(y) = 0$.
3. Usese la relación

$$\frac{1}{z}(f_x \cos\phi + f_y \operatorname{sen}\phi) = f_{xx} \operatorname{sen}^2\phi - 2f_{xy} \operatorname{sen}\phi \cos\phi + f_{yy}\cos^2\phi + \frac{1}{z}\frac{d}{d\phi}(f_x \operatorname{sen}\phi - f_y \cos\phi).$$

4. Intégrese u_{xx} por partes dos veces (se requieren precauciones especiales en el caso en que $p < 5/2$).
5. Hágase la sustitución $\xi = \alpha x + \beta y$, $\eta = \gamma x + \delta y$, donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ se eligen de modo que

$$\xi^2 + \eta^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Entonces $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = ac - b^2$, y la integral se transforma en

$$\frac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi^2+\eta^2)}\, d\xi\, d\eta.$$

$ac - b^2 = \pi^2$, $a > 0$.

6. Hágase la misma sustitución que en el Ejercicio 5 y evalúense las in-

tegrales resultantes, (a) usando el resultado del Ejercicio 1, (b) introduciendo coordenadas polares.

(a) $\dfrac{\pi(aC + cA + 2bB)}{(ac - b^2)^{3/2}}$.

(b) $\dfrac{2\pi}{(ac - b^2)^{1/2}}$.

7. Derívese con respecto a x e intégrese por partes para obtener

$$J_0' = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \operatorname{sen} xt \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$= -\frac{x}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \cos xt\,dt.$$

Derívese con respecto a x la primera de estas expresiones para obtener

$$J_0'' = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \cos xt\,dt.$$

Combínense ahora las representaciones integrales con el factor coseno en el integrando.

8. Compárese con la respuesta al Ejercicio 7.

9. (a) Calculando $K'(a)$, donde el apóstrofo denota la derivación con respecto a a, e integrando por partes dos veces (tómese xe^{-ax^2} como uno de los factores), se tiene $K'(a) = -K(a)/2a + K(a)/4a^2$; es decir,

$$K(a) = Ca^{-1/2}\, e^{-1/4a},$$

donde C está dada por $C = \lim_{a\to\infty} \sqrt{a}\, K(a) = \lim_{a\to\infty}\int_0^\infty e^{-t^2} \cos \frac{t}{\sqrt{a}}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

$$K(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\; e^{-1/4a},$$

(b) Intégrese la fórmula $t/(1 + t^2) = \int_0^\infty e^{-tx} \cos x\, dx$ con respecto a t desde a hasta b.

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+a^2}{1+b^2}.$$

(c) Sustituyendo $x = 1/t$ en la expresión para $I'(a)$, pruébese que $I' = -2I$, es decir,

$$I = Ce^{-2a},$$

donde $C = \lim_{a\to 0} I = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$.

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-2a}.$$

(d) Sustitúyase la expresión integral para J_0 y cámbiese el orden de la

integración. Usese la fórmula $2 \operatorname{sen} ax \cos bxt = \operatorname{sen}(a+bt)x + \operatorname{sen}(a-bt)x$; ver la expresión para $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xy}{y}\,dy$ en la p. 521.

$\pi/2$ cuando $a > b$; arc sen a/b cuando $a < b$.

10. Hágase $\operatorname{sen}^2 ax = (1 - \cos 2ax)/2$. Ver el Volumen I, Sección 3.15, p. 322; Ejercicios 8 y 9b.
11. Existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo A existe un $A' > A$ tal que

$$\int_{A'}^{\infty} f(x, y)\,dy \geqq \varepsilon$$

para algún valor de x.

Ejercicios 4:13 (p. 556)

1. (a) $ic\,(e^{-ia\tau} - 1)/\sqrt{2\pi}\,\tau$.

(b) $1/\sqrt{2\pi}\,(a + i\tau)$.

(c) Por 4.12, Ejercicio 8, $J_n(x)/x^n$ es la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{n!\,2^n}{\sqrt{2\pi}\,(2n!)}(1-t^2)^{n-1}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Consecuentemente, por el teorema de la integral de Fourier, $f(-t) = f(t)$ es la transformada de Fourier de $J_n(x)$.

Ejercicios 4.14 (p. 572)

1. De (97b),

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{2n\,(2n-1)\,(2n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\,\sqrt{\pi}}{2^n(2n)\,(2n-2)\cdots 2},$$

lo cual inmediatamente da el resultado que se desea.

2. De (97a),

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)} = (-1)^n\pi.$$

Introdúzcase el resultado de (97b) para obtener

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-2)^n\sqrt{\pi}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}.$$

3. De (98d),

$$B(x, x) = 2\int_0^{\pi/2} \frac{(\operatorname{sen} 2t)^{2x-1}}{2^{2x-1}}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\operatorname{sen} s)^{2x-1}}{2^{2x-1}}\, ds \qquad (s = 2t)$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{(\operatorname{sen} s)^{2x-1}}{2^{2x-1}}\, ds$$

$$= 2^{1-2x}\, B\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

4. Hágase $s = t^x$ en la integral, para obtener

$$I = \frac{1}{x}\int_0^1 s^{(1/x)-1}\,(1-s)^{-1/2}\, ds$$

$$= \frac{1}{x} B\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{x}\frac{\Gamma(1/x)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/x + 1/2)}.$$

5. Hágase $t = x^2$ en la integral

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

para obtener

$$I = \frac{1}{2}\int t^{(\alpha-1)/2}\,(1-t)^{-1/2}\, dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2^{\alpha-1}\, B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\alpha+1}{2}\right),$$

donde se emplea al final el resultado del Ejercicio 3.
(a) Para $\alpha = 2n+1$, esto da

$$I = 2^{2n}\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

(b) Para $\alpha = 2n$, con el resultado del Ejercicio 1, se obtiene

$$I = 2^{2n-1}\frac{\Gamma(n+1/2)\,\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(2n+1)}$$

$$= 2^{2n-1}\left[\frac{(2n)!\,\sqrt{\pi}}{n!\,4^n}\right]^2 / (2n)!,$$

lo cual inmediatamente da el resultado que se desea.

6. Hágase $x^m = a^m h\xi/c$, $y^m = b^m h\eta/c$, y $z = h\zeta$ para obtener la integral de volumen

$$V = \frac{abh}{m^2}\left(\frac{h}{c}\right)^{2/m}\int_0^1\int_0^{1-\xi}\int_{\xi+\eta}^1 \xi^{(1/m)-1}\,\eta^{(1/m)-1}\, d\zeta\, d\eta\, d\xi.$$

Entonces, integrando con respecto a ζ y a η,

$$V = \frac{abh}{m}\left(\frac{h}{c}\right)^{2/m}\left[B\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}+1\right) - B\left(\frac{1}{m}+1, \frac{1}{m}+1\right) - \frac{1}{m+1}B\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}+2\right)\right]$$

$$= abh \left(\frac{h}{c}\right)^{2/m} B\left(\frac{1}{m} + 1, \frac{1}{m} + 1\right).$$

7. Hágase $x^2 = a^2\xi$, $y^2 = b^2\eta$, $z^2 = c^2\zeta$ para reducir la integral a

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{8} \iiint f(\xi + \eta + \zeta)\, \xi^{(p/2)-1}\, \eta^{(q/2)-1}\, \zeta^{(r/2)-1}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

sobre el tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $\xi + \eta + \zeta = 1$. Remplácese ahora ζ por la nueva variable t, con $\zeta = t - \xi - \eta$, para obtener

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{8} \int_0^1 \int_0^t \int_0^{t-\eta} f(t)\, \xi^{(p/2)-1}\, \eta^{(q/2)-1}\, (t - \xi - \eta)^{(r/2)-1}\, d\xi\, d\eta\, dt$$

$$= \frac{a^p b^q c^r}{8} \int_0^1 \int_0^t f(t) \eta^{(q/2)-1}\, (t - \eta)^{(p/2)+(r/2)-1} \int_0^1 u^{(p/2)-1}\, (1 - u)^{(r/2)-1}\, du\, d\eta\, dt$$

donde se ha puesto $\xi = (t - \eta)u$. Así,

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{8} B\left(\frac{p}{2}, \frac{r}{2}\right) \int_0^1 \int_0^t f(t) \eta^{(q/2)-1}\, (t - \eta)^{(p/2)+(r/2)-1}\, d\eta\, dt.$$

Ahora, haciendo $\eta = tv$ se obtiene

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{8} B\left(\frac{p}{2}, \frac{r}{2}\right) B\left(\frac{q}{2}, \frac{p + r}{2} - 1\right) \int_0^1 f(t) t^{(p+q+r)/2-1}\, dt,$$

lo cual inmediatamente da el resultado que se desea. Nótese el resultado general implicado por lo anterior:

$$J = \iiint f(\xi + \eta + \zeta)\, \xi^{\alpha-1}\, \eta^{\beta-1}\, \zeta^{\gamma-1}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta)\, \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma)} \int_0^1 f(t) t^{\alpha+\beta+\gamma-1}\, dt,$$

donde la integral triple se toma en el octante positivo limitado por el plano $\xi + \eta + \zeta = 1$. Muchas integrales pueden reducirse a esta forma, como se ve en los ejercicios siguientes.

8. Hágase $x = a\xi^n$, $y = b\eta^n$, $z = c\zeta^n$ para obtener

$$\bar{x} = \frac{a \iiint \xi^{2n-1}\, \eta^{n-1}\, \zeta^{n-1}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\iiint \xi^{n-1}\, \eta^{n-1}\, \zeta^{n-1}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta},$$

donde las integrales se toman sobre el octante positivo limitado por el plano $\xi + \eta + \zeta \leqq 1$ y tienen la forma de la integral J que aparece en la solución del Ejercicio 7. Como consecuencia,

$$\bar{x} = \frac{3a}{4}\, \frac{\Gamma(2n)\, \Gamma(3n)}{\Gamma(n)\, \Gamma(4n)}.$$

9. Hágase $x = R\xi^{2/3}$, $y = R\eta^{3/2}$ para obtener

$$I = 4 \iiint x^2\, dx\, dy = 9R^4 \iint \xi^{7/2}\, \eta^{1/2}\, d\xi\, d\eta,$$

donde la última integral doble se toma sobre el cuadrante positivo del plano ξ, η, limitado por la recta $\xi + \eta = 1$. Como en el Ejercicio 8, esto da

$$I = 2R^4 B\left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{21}{2^9}\pi R^4.$$

10. Como en el Ejercicio 7, remplácese x_0 por $x_0 = t - x_1 - \cdots - x_n$. Entonces,

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x_0} \cdots \int_0^{1-x_0 \cdots -x_{k-1}} \cdots \int_0^{1-x_0 \cdots x_{n-1}} f(x_0 + \cdots + x_n)$$

$$x_0^{a_0-1} \cdots x_n^{a_n-1}\, dx_n \cdots dx_k \cdots dx_1\, dx_0$$

$$= \int_0^1 \int_0^t \cdots \int_0^{t-x_1 \cdots x_{k-1}} \int_0^{t-x_1 \cdots x_{n-2}} x_1^{a_1-1} \cdots x_{n-1}^{a_{n-1}-1} f(t)$$

$$\int_0^{t-x_1 \cdots -x_{n-1}} x_n^{a_n-1} (t - x_1 \cdots -x_n)^{a_0-1}\, dx_n\, dx_{n-1} \cdots dx_k$$

$$\cdots dx_1 dt.$$

En la integral con respecto a x_n, hágase $x_n = (t - x_1 \cdots x_{n-1}) u_n$, lo cual da

$$\int_0^{t-x_1 \cdots x_{n-1}} x_n^{a_n-1}(t - x_1 \cdots -x_n)^{a_0-1}\, dx_n$$

$$= (t - x_1 \cdots -x_{n-1})^{a_0+a_n-1} \int_0^1 u_n^{a_n-1} (1 - u_n)^{a_0-1}\, du_n$$

$$= (t - x_1 \cdots -x_{n-1})^{a_0+a_n-1} B(a_n, a_0).$$

Iterando este procedimiento, con $x_k = (t - x_1 \cdots - x_{k-1})u_k$ para $k = 2, \ldots, n$ y $x_1 = tu_1$, finalmente se obtiene

$$I = B(a_n, a_0)\, B(a_{n-1}, a_n + a_0) \cdots B(a_1, a_2 + \cdots + a_n + a_0)$$

$$\int_0^1 f(t) t^{a_0+a_1+ \cdots a_n-1}\, dt,$$

lo cual inmediatamente conduce al resultado deseado.

11. Demuéstrese que para $G_n(x)$, definida por la expresión que sigue al signo de límite en el segundo miembro de la fórmula (86e), p. 566, se cumple

$$G_{2n}(2x) = \frac{1}{2} 2^{2x} G_n(x) G_n\left(x + \frac{1}{2}\right) \frac{(2n)!\sqrt{n}}{2^{2n}(n!)^2};$$

entonces, hágase que $n \to \infty$ y aplíquese la fórmula de Wallis (Volumen I, p. 282).

12. (a) Hágase $u = \alpha - p$, $v = \beta - q$. Integrando $D^{-u} f(x)$ repetidamente por partes, se obtiene

$$\text{(i)}\quad D^{-u} f(x) = \frac{f(0)x^u}{\Gamma(u+1)} + \cdots + \frac{f^{(p-1)}(0)x^{u+p-1}}{\Gamma(u+\mathrm{p})} + \frac{1}{\Gamma(u+p)}\int_0^x (x-t)^{u+p-1} f^{(p)}(t)\, dt.$$

Observando que las derivadas en 0 se anulan, y derivando p veces con respecto a x, se encuentra

$$\text{(ii)}\quad g(x) = D^\alpha f(x) = \frac{d^p}{dx^p}[D^{-u} f(x)] = D^{-u} f^{(p)}(x).$$
$$= \frac{1}{\Gamma(u)}\int_0^x (x-t)^{u-1} f^{(p)}(t)\, dt.$$

Integrando por partes otras veces más se llega a

$$g(x) = \frac{f^{(p)}(0)x^u}{\Gamma(u+1)} + \cdots + \frac{f^{(p+q-1)}(0)x^{u+q-1}}{\Gamma(u+q)} + \frac{1}{\Gamma(u+1)}\int_0^x (x-t)^{u+q-1} f^{(p+q)}(t)\, dt.$$

Entonces, como las derivadas de f en el origen se anulan, se encuentra

$$D^{-v}D^\alpha f(x) = D^{-v} g(x)$$
$$= \int_0^x \frac{(x-t)^{v-1}}{\Gamma(v)}\int_0^t \frac{(t-s)^{u+q-1} f^{(p+q)}(s)}{\Gamma(\mathrm{u}+\mathrm{q})}\, ds\, dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(v)\,\Gamma(u+q)}\int_0^x f^{(p+q)}(s)\int_0^x (x-t)^{v-1}(t-s)^{u+q-1}\, dt\, ds.$$

La integral interior se evalúa introduciendo una nueva variable de integración, $z = (t-s)/(x-s)$; así se obtiene

$$D^{-v}D^\alpha f(x) = \frac{B(u+q, v)}{\Gamma(v)\,\Gamma(u+q)}\int_0^x (x-s)^{u+v+q-1} f^{(p+q)}(s)\, ds$$
$$= \frac{1}{\Gamma(u+v+q)}\int_0^x (x-s)^{u+v+q-1} f^{(p+q)}(s)\, ds.$$

Derivando ahora q veces se encuentra

$$\text{(iii)}\quad D^\beta D^\alpha f(x) = D^q D^{-v} g(x)$$
$$= \frac{1}{\Gamma(u+v)}\int_0^x (x-s)^{u+v-1} f^{(p+q)}(s)\, ds.$$

El resultado final es simétrico en u y v y, por tanto, independiente del orden en que se aplican los operadores D^α y D^β; de donde $D^\alpha D^\beta f(x) = D^\beta D^\alpha f(x)$.

(b) Sea r el menor entero mayor que $\alpha + \beta$, $w = r - \alpha - \beta$. Entonces (ii) da

$$D^{\alpha+\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(w)}\int_0^x (x-t)^{w-1} f^{(r)}(t)\, dt.$$

Si $u + v \leqq 1$, entonces $r = p + q$, $w = u + v$, y esta integral es la misma que la que se obtiene en (iii) para $D^{\beta}D^{\alpha}f(x)$. Sin embargo, si $1 < u + v \leqq 2$, entonces $w = u + v - 1$ y $r = p + q + 1$. Ahora sólo se lleva a cabo el desarrollo (i) hasta la $(r-1)$-ésima derivada, a saber,

$$D^{-w}f(x) = \frac{1}{\Gamma(w + r - 1)} \int_0^x (x - t)^{w+r-2} f^{(r-1)}(t)\, dt\,,$$

y se deriva $r - 2$ veces con respecto a x para obtener

$$\begin{aligned} D^{r-2}D^{-w}f(x) &= D^{\alpha+\beta-2}f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(w+1)}\int_0^x (x-t)^{w} f^{(r-1)}(t)\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(u+v)}\int_0^x (x-t)^{u+v-1} f^{(p+q)}(t)\, dt. \end{aligned}$$

Por tanto, en este caso, $D^{\alpha}D^{\beta}f(x) \neq D^{\alpha+\beta}f(x)$.

Ejercicios 5.2 (p. 618)

1. (a) $-b/2\alpha^2\beta^2$.
   (b) 0.
   (c) 0.
4. Escríbase $d(u, v)/d(x, y) = (uv_y)_x - (uv_x)_y =$ rot $(u \text{ grad } v)$.

Ejercicios 5.7 (p. 654)

1. Obsérvese que $\xi = \mathbf{X}_u + \mathbf{X}_v$, $\eta = \mathbf{X}_u - \mathbf{X}_v$.
2. Compárese la dirección $\mathbf{X}_r$ del vector normal exterior con la dirección normal representada por $\mathbf{X}_\theta \times \mathbf{X}_\phi$.
3. (a) La recta $v = a/2$ divide a S en una porción S' dada por $a/2 < v < a$ (o, lo que es equivalente, por $-a < v < -a/2$) y orientada por $\xi = \mathbf{X}_u$, $\eta = \mathbf{X}_v$, y una porción S'' dada por $-a/2 < v < a/2$, que es precisamente otra cinta de Möbius.
   (b) S_1 es representable en la forma (40a) con v restringida al intervalo $0 < v < a$. Es obvio que dos puntos cualesquiera de S_1 pueden unirse por medio de la curva que es la imagen sobre S_1 del segmento rectilíneo que une a los puntos correspondientes (u, v) del plano paramétrico.
   (c) S_1 está orientada por $\xi = \mathbf{X}_u$, $\eta = \mathbf{X}_v$.
4. Fácilmente se verifica que $\mathbf{R}(t)$ tiene longitud $|\xi|$ y es linealmente dependiente de ξ, η, por lo que está en π. Además, $\mathbf{R}(t) \cdot \xi/|\xi|^2 = \cos t$. El vector $\mathbf{R}(t)$ coincide con ξ para $t = 0$ y tiene la dirección de η para un cierto t entre 0 y 180°, a saber, para el t determinado por las relaciones

$$\cos t = b/\sqrt{ac}, \quad \operatorname{sen} t = \sqrt{1 - b^2/ac}.$$

Ejercicios 5.9a (p. 668)

1. $$\iint \frac{z}{p}\, dS = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{c^2}\right) \iiint z\, dx\, dy\, dz,$$

donde la integral de volumen debe extenderse a toda la mitad superior del elipsoide. (La base de este semi-elipsoide no contribuye a la integral de superficie); $\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{c^2}\right)abc^2$.

2. Como H es una función homogénea de cuarto grado, se tiene

$$\begin{aligned} 4\iint H\, dS &= \iint (xH_x + yH_y + zH_z)dS \\ &= \iint \frac{\partial H}{\partial n} dS = \iiint \Delta H\, dx\, dy\, dz \\ &= 6 \iiint [x^2(2a_1 + a_4 + a_6) + y^2(2a_2 + a_4 + a_5) \\ &\qquad + z^2(2a_3 + a_5 + a_6)]\, dx\, dy\, dz. \end{aligned}$$

$\frac{4\pi}{5}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)$.

Ejercicios 5.9e (p. 677)

1. (a) Ver el Ejercicio 8, Sección 2.4, p. 246.
   (c) Sea R una región arbitraria y v una función arbitraria que se anula sobre la frontera de R. Entonces, por la primera fórmula de Green,

$$\begin{aligned} &\iiint_R (u_{x_1}v_{x_1} + u_{x_2}v_{x_2} + u_{x_3}v_{x_3})\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \\ &\quad = -\iiint_R v\, \Delta u\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \\ &\quad = -\iiint_R v\, \Delta u\, \sqrt{e_1e_2e_3}\, dp_1\, dp_2\, dp_3. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= u_{p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_i} + u_{p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_i} + u_{p_3}\frac{\partial p_3}{\partial x_i} \\ &= u_{p_1}\frac{a_{i1}}{e_1} + u_{p_2}\frac{a_{i2}}{e_2} + u_{p_3}\frac{a_{i3}}{e_3} \end{aligned}$$

y

$$v_{x_i} = v_{p_1}\frac{a_{i1}}{e_1} + v_{p_2}\frac{a_{i2}}{e_2} + v_{p_3}\frac{a_{i3}}{e_3}.$$

Por tanto,

$$\iiint_R (u_{x_1}v_{x_1} + u_{x_2}v_{x_2} + u_{x_3}v_{x_3})\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$=\iiint \left(\frac{1}{e_1} u_{p_1}v_{p_1} + \frac{1}{e_2} u_{p_2}v_{p_2} + \frac{1}{e_3} u_{p_3}v_{p_3}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$=\iiint \left(\sqrt{\frac{e_2e_3}{e_1}}\, u_{p_1}v_{p_1} + \sqrt{\frac{e_3e_1}{e_2}}\, u_{p_2}v_{p_2} + \sqrt{\frac{e_1e_2}{e_3}}\, u_{p_3}v_{p_3}\right) dp_1\, dp_2\, dp_3$$

$$=\iiint (U_1v_{p_1} + U_2v_{p_2} + U_3v_{p_3})\, dp_1\, dp_2\, dp_3,$$

donde se escribe $U_i = \dfrac{\sqrt{e_1e_2e_3}}{e_i}\, u_{p_i}$.

Aplicando el teorema de Gauss al vector (U_1v, U_2v, U_3v), se obtiene

$$-\iiint\left(\frac{\partial U_1}{\partial p_1} + \frac{\partial U_2}{\partial p_2} + \frac{\partial U_3}{\partial p_3}\right) v\, dp_1\, dp_2\, dp_3.$$

Por lo tanto, para una v arbitraria que se anule sobre la frontera de R se tiene

$$\iiint v\, \Delta u\, \sqrt{e_1e_2e_3}\, dp_1\, dp_2\, dp_3$$

$$= \iiint v \left(\frac{\partial U_1}{\partial p_1} + \frac{\partial U_2}{\partial p_2} + \frac{\partial U_3}{\partial p_3}\right) dp_1\, dp_2\, dp_3$$

y, de aquí (ver el Lema I, p. 821),

$$\Delta u = \left(\frac{\partial U_1}{\partial p_1} + \frac{\partial U_2}{\partial p_2} + \frac{\partial U_3}{\partial p_3}\right) \frac{1}{\sqrt{e_1e_2e_3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e_1e_2e_3}}\left[\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\sqrt{\frac{e_2e_3}{e_1}}\frac{\partial u}{\partial p_1}\right) + \frac{\partial}{\partial p_2}\left(\sqrt{\frac{e_3e_1}{e_2}}\frac{\partial u}{\partial p_2}\right) + \frac{\partial}{\partial p_3}\left(\sqrt{\frac{e_1e_2}{e_3}}\frac{\partial u}{\partial p_3}\right)\right]$$

(d) Usese el Ejercicio 9c, Sección 3.3d, p. 304:

$$\frac{1}{4}(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)\,\Delta u = (t_3 - t_2)\sqrt{\phi(t_1)}\,\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\sqrt{\phi(t_1)}\,\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)$$

$$+ (t_3 - t_1)\sqrt{-\phi(t_2)}\,\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\sqrt{-\phi(t_2)}\,\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)$$

$$+ (t_2 - t_1)\sqrt{\phi(t_3)}\,\frac{\partial}{\partial t_3}\left(\sqrt{\phi(t_3)}\,\frac{\partial u}{\partial t_3}\right),$$

donde $\phi(x) = (a - x)(b - x)(c - x)$.

Ejercicios 5.10a (p. 682)

1. (a) $I = -\iint_{y^2+z^2<1/4}(zx_z + x)\, dy\, dz$, donde $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$.

(b) $I = \int_{\partial S^*} L = -x\int_{\partial S^*} y\, dz = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{3}{4}\cos^2\theta\, d\theta = -\frac{3}{8}\pi.$

Ejercicios 5.10b (p. 617)

2. Si (ξ, η) y (x, y) son coordenadas rectangulares en Π y P, respectivamente, entonces el movimiento del punto $M(x, y)$ puede describirse mediante las ecuaciones

$$\xi = x \cos \phi - y \operatorname{sen} \phi + a, \qquad \eta = x \operatorname{sen} \phi + y \cos \phi + b$$

(es decir, por una rotación y una traslación). Entonces

$$S(M) = A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D.$$

(α) Si $A = n\pi \neq 0$, se tiene $S(M) = n\pi[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] + S(C)$, donde C es el punto $x = x_0 = -B/2n\pi$, $y = y_0 = -C/2n\pi$, de donde A, B, C, D tienen los valores dados en el Ejercicio 1.

(β_1) Si $A = n\pi = 0$ pero $B^2 + C^2 > 0$, entonces

$$S_M = \sqrt{B^2 + C^2}\,\frac{Bx + Cy + D}{\sqrt{B^2 + C^2}} = \lambda\, d(M),$$

donde $\lambda = \sqrt{B^2 + C^2}$ y Δ es la recta $Bx + Cy + D = 0$.
Si $A = B = C = 0$, se tiene $S(M) = D =$ constante.

3. Para el movimiento del plano P rígidamente sujeto a la biela AB, se tiene $n = 0$, $S(A) = 0$, $S(B) = \pi\overline{CB}^2 = \pi\gamma^2$. Por tanto, Δ pasa por A y, por simetría, Δ es perpendicualr a AB en A. De aquí que $S(M) = \pi\gamma^2 l^{-1} d(M)$, donde $l = \overline{AB}$.

4. Para el movimiento del plano P rígidamente sujeto a la cuerda AB, se tiene $n = 1$, $S(A) = S(B) = S =$ área de Γ. Por lo tanto, el punto C del teorema de Steiner equidista de A y B, y $S(A) = \pi\overline{CA}^2 + S(C)$, $S(M) = \pi\overline{CM}^2 + S(C)$; de donde $S(A) - S(M) =$ área de $\Gamma -$ área de $\Gamma' = \pi(\overline{CA}^2 - \overline{CM}^2) = \pi ab$.

5. Si l es la longitud de Γ, las fórmulas de Frenet (Ejercicio 16, Sección 2.5, p. 260) dan

$$\int \frac{\mathbf{n}}{\rho}\, ds = \int \frac{\xi_2}{\rho}\, ds = \int \dot{\xi}_1\, ds = \int \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\, ds = \mathbf{0};$$

$$\int \frac{\mathbf{x} \times \mathbf{n}}{\rho}\, ds = \int \mathbf{x} \times \dot{\xi}_1\, ds = \mathbf{x} \times \xi_1 \Big|_0^l - \int \dot{\mathbf{x}} \times \xi_1\, ds$$

$$= -\int \xi_1 \times \xi_1\, ds = \mathbf{0}$$

6. Sea $\mathbf{n}' = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Si en la fórmula de Gauss,

$$\iint (a\alpha + b\beta + c\gamma)\, d\sigma = -\iiint \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz,$$

se hace la sustitución $a = 1$, $b = c = 0$, y $a = 0$, $b = -z$, $c = y$, se obtiene

$$\iint \alpha\, d\sigma = 0 \qquad \text{y} \qquad \iint (y\gamma - z\beta)\, d\sigma = 0,$$

respectivamente.

7. Tómense coordenadas rectangulares (x, y, z) tales que $z = 0$ sea la superficie horizontal libre del fluido y Oz apunte hacia abajo. La presión sobre $d\sigma$ es $\mathbf{n}z\ d\sigma$, donde z es la profundidad de $d\sigma$. Mediante aplicaciones repetidas de la fórmula de Gauss en tres dimensiones, con elecciones obvias de las funciones a, b, c, se encuentran, para las componentes de la resultante de la presión del fluido,

$$\iint \alpha z\ d\sigma = 0,\ \iint \beta z\ d\sigma = 0,\ \iint \gamma z\ d\sigma = -\iint dx\ dy\ dz = -V.$$

Una vez más, mediante la fórmula de Gauss, para las componentes del momento resultante con respecto al origen O se encuentra

$$\iint (yz\gamma - z^2\beta)d\sigma = \iiint y\ dx\ dy\ dz = Vy_0,$$

$$\iint (z^2\alpha - xz\gamma)d\sigma = -\iiint x\ dx\ dy\ dz = -Vx_0,$$

$$\iint (xz\beta - yz\alpha)d\sigma = 0,$$

(x_0, y_0, z_0 son las coordenadas del centroide C). Ahora se observa que las componentes de la fuerza $\mathbf{f}$ son $0, 0, -V$, y las componentes de su momento con respecto a 0 son $Vy_0, -Vx_0, 0$.

8. De las ecuaciones paramétricas

$$x = a \cos u \cos v,\ y = b \operatorname{sen} u \cos v,\ z = c \operatorname{sen} v$$

$$\left(0 \leqq u < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqq v < \frac{\pi}{2}\right)$$

del elipsoide, fácilmente se obtienen las fórmulas

$$p\ dS = abc \cos v\ du\ dv,\ \frac{dS}{p} = \frac{D^2\ du\ dv}{abc \cos v},$$

donde

$$D^2 = b^2c^2 \cos^2 u \cos^2 v + a^2c^2 \operatorname{sen}^2 u \cos^2 v + a^2b^2 \operatorname{sen}^2 v \cos^2 v.$$

10. La integral representa el ángulo sólido que el plano $z = 0$ subtiende en el punto $M = (0, 0, 1)$. Para una demostración analítica directa, úsense coordenadas polares planas.

12. Verifíquese la identidad

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a - x}{\gamma^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b - y}{\gamma^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{c - z}{\gamma^3}\right) = 0,$$

$$\gamma^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2,$$

para todos los puntos (x, y, z) diferentes de (a, b, c). A partir de la fórnula de Gauss en tres dimensiones se concluye (i) que $\Omega = 0$ si Σ es una superficie cerrada tal que $A = (a, b, c)$ está fuera del volumen limitado por Σ; (ii) que si A está dentro de Σ, el valor de la integral es independiente de la forma de Σ. Tomando como Σ una esfera con centro en A fácilmente se ve que $\Omega = 4\pi$.

13. La integral, escribiendo γ en lugar de r,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a}=\iint_\Sigma \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{a-x}{\gamma^3}\right)dy\,dz+\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{b-x}{\gamma^3}\right)dz\,dx+\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{c-z}{\gamma^3}\right)dx\,dy$$

es independiente de Σ y sólo depende de la frontera, Γ, de Σ, porque la identidad dada en la respuesta al Ejercicio 12 implica que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{a-x}{\gamma^3}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{b-y}{\gamma^3}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{c-z}{\gamma^3}\right)\right]=0.$$

Por el teorema de Stokes (p. 678) y la discusión del Capítulo 5, pp. 679-680, la expresión de la integral de superficie para $\partial\Omega/\partial a$ puede escribirse como una integral de línea, $\int u\,dx+v\,dy+w\,dz$, a lo largo de Γ. Verifíquese que las funciones

$$u=0,\quad v=\frac{z-c}{\gamma^3},\quad w=-\frac{y-b}{\gamma^3}$$

satisfacen las identidades

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{a-x}{\gamma^3}\right),\ \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{b-y}{\gamma^3}\right),\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{c-z}{\gamma^3}\right).$$

14. Obsérvense los siguientes hechos: (1) el valor de la integral de línea θ permanece sin cambio si se deforma Γ de manera tal que nunca pase por encima de cualquiera de los puntos $(-1, 0)$ o $(1, 0)$ durante su deformación; (2) $\theta=2\pi$ si Γ es un cículo pequeño alrededor de $(1, 0)$ orientado en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj; (3) $\theta=2\pi$ si Γ es un círculo pequeño alrededor de $(-1, 0)$, orientado en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.
15. Considérese a C como si fuera un círculo rígido hecho de alambre y a Γ como un hilo. Defórmese ahora el hilo Γ hasta que ocupe una nueva posición, Γ', que esté por completo en el plano $y=0$. Los números p y n no cambian durante esta deformación, y se llega directamente a la primera fórmula si se aplica lo del Ejercicio 14 a la curva Γ' del plano $y=0$ y al segmento rectilíneo $-1<x<1$, $y=0$, $z=0$ de este plano. Resulta el factor 4π (en lugar de 2π, como en el ejemplo anterior), pues el ángulo sólido Ω se incrementa en 4π a lo largo de una trayectoria cerrada para la cual $p=1, n=0$. Una manera de llevar a cabo analíticamente la deformación anterior, de Γ en Γ', es la siguiente. Supóngase que Γ no corta al eje z, y sean

$$x=\gamma(t)\cos\phi(t),\qquad y=\gamma(t)\operatorname{sen}\phi(t),\qquad z=z(t)\qquad(0\leq t\leq 2\pi)$$

las ecuaciones paramétricas de Γ. Considérese ahora la familia de curvas

$$\Gamma(\tau):\ x=\gamma(t)\cos[\tau\phi(t)],\qquad y=\gamma(t)\operatorname{sen}[\tau\phi(t)],\qquad z=z(t),$$

que dependen del parámetro τ, el cual decrece desde $\tau=1$ hasta $\tau=0$. Nótese que $\Gamma(1)=\Gamma$ y que $\Gamma'=\Gamma(0)$ es una curva cerrada que está en el plano $y=0$. Nótese también que (para un valor fijo de z) cada punto P de $\Gamma(\tau)$ gira alrededor del eje z conforme τ varía; por lo tanto, el án-

gulo sólido Ω que C subtiende en P no varía con τ. Esto implica que $\Omega_1 - \Omega_0$ tendrá el mismo valor para $\Gamma(0)$ que para $\Gamma(1) = \Gamma$ Para probar la segunda fórmula, nótese que

$$\Omega_1 - \Omega_0 = \int_\Gamma d\Omega = \int_\Gamma \text{grad } \Omega \cdot dP = -\int_\Gamma dP \cdot \int_C \frac{PP' \times dP'}{|PP'|^3}$$
$$= -\int_\Gamma \int_C \frac{dP \cdot (PP' \times dP')}{|PP'|^3} = \int_\Gamma \int_C \frac{PP' \cdot (dP \times dP')}{|PP'|^3}$$

16. Tómese un sistema coordenado Ox_1, Ox_2, Ox_3, y denótese por $\mathbf{x}$ el vector de posición de un punto variable sobre Γ. Entonces

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}\int_\Gamma \mathbf{x} \times d\mathbf{x}$$

tiene las propiedades requeridas, porque

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_3 = \frac{1}{2}\int_\Gamma (x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1)$$

es el área de la proyección de Γ sobre el plano Ox_1x_2.

17. Las dos ecuaciones $u = f_x$, $v = f_y$ pueden resolverse para x y y, dado que $\partial(u, v)/\partial(x, y) \neq 0$. Sea $x = \sigma(u, v)$, $y = \tau(u, v)$; como $u_y = v_x$, se tiene (ver p. 308) $x_v = y_u$, $\sigma_v = \tau_u$. Por tanto, existe una función g tal que $x = g_u(u, v)$, $y = g_v(u, v)$.

18. $$u = \frac{yz}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$
$$v = \frac{-xz}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad w = 0.$$

Ejercicios 6.1e (p. 743)

1. Con $\dot\theta = 0$, la ecuación (17c) toma la forma

(i) $$\dot r^2 = c + \frac{b}{r},$$

donde $c = 2C/m$ y $b = 2\gamma\mu$ Escribiendo esto en la forma

$$\sqrt{\frac{r}{cr + b}}\,\frac{dr}{dt} = 1$$

e integrando se obtiene, si $c \neq 0$,

(iia) $$t = k + \frac{\sqrt{cr^2 + br}}{c} - \frac{b}{2c} f(r),$$

donde

(iib)
$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{c}} \text{ ar senh } (1 + 2cr/b) & \text{para} \quad c > 0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{-c}} \text{ arc sen } (1-2cr/b) & \text{para} \quad c < 0, \end{cases}$$

y si $c = 0$,

(iic)
$$r = \left(\frac{3\sqrt{b}}{2} t + k\right)^{2/3}.$$

Regresando a la ecuación diferencial (i), se determina la constante de integración c por medio de

$$c = \dot{r}_0^2 - \frac{b}{r_0}.$$

Si $c < 0$, se ve que r está acotado: $r \leqq -b/c$. si $\dot{r}_0 > 0$, r se incrementa hasta este valor y, a continuación, decrece a medida que el cuerpo en órbita cae hacia el sol. Si $\dot{r}_0 < 0$, el cuerpo se mueve directamente hacia el sol hasta que choca contra él.

Si $c = 0$, se observa que la constante de integración k en (iic) es $k = \pm r_0^{3/2} = b^{3/2}/\dot{r}_0^3$, donde se toma el signo más o el signo menos según que $\dot{r}_0$ sea positiva o negativa. Si $\dot{r}_0$ es negativa, nuevamente se obtiene una solución en la que el cuerpo se acelera hacia el sol. Si $\dot{r}_0$ es positiva, el cuerpo se escapa hacia el infinito pero con velocidad límite igual a cero.

Si $k > 0$ y $\dot{r}_0 < 0$, el cuerpo se acelera hasta chocar contra el sol, como antes. Pero si $\dot{r}_0 > 0$, el cuerpo se escapa y, de (i) y (ii), puede verse que tiene una velocidad límite positiva, a saber,

$$\dot{r}_\infty = c = \dot{r}_0^2 - \frac{b}{r_0}.$$

2. Tanto para la parábola como para la hipérbola la órbita es no periódica y θ está acotado. Como consecuencia, de $\int_{\theta_0}^{\theta} r^2 \, d\theta = h(t - t_0)$, cuando t tiende a ∞, r también debe tender a ∞. De (17d) se concluye que $\dot{\theta} = 0$ conforme $t \to \infty$; de aquí que en (17c), de

$$\lim_{t\to\infty} r^2\dot{\theta}^2 = \left(\lim_{t\to\infty} r^2\dot{\theta}\right)\left(\lim_{t\to\infty} \dot{\theta}\right) = h \lim_{t\to\infty} \dot{\theta} = 0,$$

se concluye que $\lim_{t\to\infty} \dot{r}^2 = 2C/m$. Sin embargo, de la definición de ε, para la parábola ($\varepsilon = 1$) C vale 0 y para la hipérbola ($\varepsilon > 1$), tiene un valor positivo.

3. La fuerza es $-m/2$ grad $\dot{r}^2$. De aquí que, por la conservación de la energía,

$$\frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} mr^2 = C$$

y las ecuaciones de momentos, como para cualquier fuerza central, dan

$$r^2\dot{\theta} = h.$$

Se elimina t de estas ecuaciones, como se hizo a partir de las ecuaciones (17c) y (17d) para el movimiento planetario, con el fin de obtener

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{h}\sqrt{\frac{2Cr^2}{m} - h^2 - r^4}.$$

Esto se integ~~r~~a con facilidad para llegar a

$$r^2 = \frac{a}{b + \operatorname{sen} 2\theta},$$

donde $a = 2h^2$ y $b = \sqrt{1 - h^2m^2/C^2}$. En coordenadas cartesianas esto queda

$$b(x^2 + y^2) + 2xy = a,$$

que es la ecuación de una sección cónica.

4. La fuerza es $-\text{grad}\ U$, donde $U = -\int f(r)\, dr$. Como para el movimiento planetario, puede aplicarse la conservación de la energía y la ecuación de los momentos (17d), a saber,

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \int f(r)\, dr = C$$

$$r^2\dot{\theta} = h.$$

Ahora se puede proceder en la misma forma hasta llegar al resultado deseado.
5. Aplíquese el resultado del Ejercicio 4.
6. Si (ξ, η) son las coordenadas con respecto a los ejes de la elipse, entonces

$$\xi = a \cos \omega = x + \varepsilon a$$

$$\eta = b \operatorname{sen} \omega = y$$

dan la ecuación de la elipse y, por la ley de las áreas,

$$h(t - t_s) = \int_0^\omega \left(x\frac{\partial y}{\partial \omega} - y\frac{\partial x}{\partial \omega}\right) d\omega$$

$$= ab\int_0^\omega (1 - \varepsilon \cos \omega)\, d\omega.$$

7. El movimiento se lleva a cabo en un plano, dado que p es una fuerza central (lo que se probó para el caso $p = 1/r^2$ en la p. 738). Por lo tanto,

$$\ddot{x} = -\frac{x}{r}p,$$

$$\ddot{y} = -\frac{y}{r}p.$$

Se deduce que

$$x\dot{y} - \dot{x}y = \text{constante} = h,$$

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} = \frac{-x\dot{x} - y\dot{y}}{r}p = -\dot{r}p.$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = -\dot{r}p.$$

La distancia de la tangente al origen es

$$q = \frac{|x\dot{y} - \dot{x}y|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{h}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}};$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{h^2}{q^2} = -p\frac{dr}{dt}$$

o bien,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dr}\frac{h^2}{q^2} = -p,$$

lo cual prueba la primera proposición. Para la cardioide se tiene $q = r^2 / \sqrt{2ar}$.

8. Por definición,

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} \ddot{x} &= -\lambda^2 x - 2\mu\dot{y} \\ \ddot{y} &= -\lambda^2 y + 2\mu\dot{x}. \end{aligned}$$

Derivando dos veces cada ecuación y combinando los resultados se obtiene una ecuación en que sólo interviene x,

$$\ddddot{x} + (2\lambda^2 + 4\mu^2)\ddot{x} + \lambda^4 x = 0,$$

y una ecuación correspondiente que sólo involucra a y

$$\ddddot{y} + (2\lambda^2 + 4\mu^2)\ddot{y} + \lambda^4 y = 0.$$

Así, x y y son combinaciones lineales de exp $[\pm i(\mu \pm \sqrt{\lambda^2 + \mu^2})t]$ (ver el Ejercicio 2, p. 769) o de cos $(\mu + \sqrt{\lambda^2 + \mu^2})t$, cos $(\mu - \sqrt{\lambda^2 + \mu^2})t$, sen $(\mu + \sqrt{\lambda^2 + \mu^2})t$, sen $(\mu - \sqrt{\lambda^2 + \mu^2})t$, con coeficientes constantes a, b, c, d y a', b', c', d' De (A) se deduce que $a' = -c$, $b' = -d$, $c' = a$, $d' = b$. Usando las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0$, $\dot{x}(0) = u$, se obtiene el resultado dado.

9. Sean $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ las partículas atractivas. Entonces la fuerza resultante en un punto (x, y) tiene componentes

$$X = \sum_\nu \frac{x - x_\nu}{\sqrt{(x - x_\nu)^2 + (y - y_\nu)^2}}, \quad Y = \sum_\nu \frac{y - y_\nu}{\sqrt{(x - x_\nu)^2 + (y - y_\nu)^2}}.$$

Si se introducen las cantidades complejas $z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n$, $z = x + iy$, $Z = X + iY$, se tiene

$$Z = \sum_{\nu} \frac{1}{z - \bar{z}_\nu} = \frac{\overline{f'(z)}}{\overline{f(z)}},$$

donde $f(z)$ denota al polinomio $(z - z_1) \cdots (z - z_n)$ y $\bar{z}$ es el complejo conjugado de z. Las posiciones de equilibrio corresponden a $Z = 0$, es decir, a los ceros del polinomio $f'(z)$ de los cuales a lo sumo existen $n - 1$

Las posiciones de equilibrio en el caso particular: $(0, 0)$, $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$.

Ejercicios 6.2 (p. 755)

1. (a) $y = \tan \log (c/\sqrt{1 + x^2})$.

   (b) $y = c\sqrt{1 + e^{2x}}$.

2. (a) $y = ce^{y/x}$.

   (b) $y^2(2x^2 + y^2) = c^2$.

   (c) $x^2 - 2cx + y^2 = 0$ (círculos).

   (d) $\arctan (y/x) + c = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ o, en coordenadas polares, $r = e^{\phi + c}$ (espirales logarítmicas).

   (e) $c + \log |x| = \operatorname{arc\,sen}(y/x) - \frac{1}{x}\sqrt{x^2 - y^2}$.

3. Si $ab_1 - a_1b \neq 0$, se tiene

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a + by'}{a_1 + b_1y'} = \frac{a + b\phi(\eta/\xi)}{a_1 + b_1\phi(\eta/\xi)},$$

la cual es una ecuación homogénea.

Si $ab_1 - a_1b = 0$ or $a_1/a = b_1/b = k$, entonces

$$\frac{d\eta}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + b\phi\left(\frac{\eta + c}{k\eta + c_1}\right),$$

y las variables están separadas.

4. (a) $4x + 8y + 5 = ce^{4x - 8y}$.

   (b) $x = c - \frac{1}{4}(3y - 7x) - \frac{3}{4}\log(3y - 7x)$.

5. (a) $y = ce^{-\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x - 1$.

   (b) $y = (x + 1)^n(e^x + c)$.

   (c) $y = cx(x - 1) + x$.

   (d) $y = \frac{1}{3}x^5 + cx^2$.

(e) $y = \dfrac{c}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{1}{(1+x^2)(x+\sqrt{1+x^2})}$.

6. Introdúzcase $1/y$ como una nueva función desconocida; entonces la ecuación se vuelve homogénea:

$$\frac{1}{x} \frac{1 - cx^{\sqrt{5}}}{cx^{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}}.$$

7. Con esta sustitución, la ecuación queda

$$v' = v^n g(x) F(x)^{n-1}.$$

8. Ver el Ejercicio 7. Elimínese y mediante $v = xy$, $y' = v'/x - v/x^2$, para obtener una ecuación separable;

$$y = \frac{1}{x(c - \log x)}.$$

9. Siguiendo la idea de la sustitución dada en el Ejercicio 7, búsquese una función $f(x)$ tal que $v = yf(x)$ y $v' = (y' + y \operatorname{sen} x) f(x)$. A partir de $f' = y'f(x) + yf'(x)$, se obtiene

$$f'(x) = f(x) \operatorname{sen} x;$$

de donde

$$f(x) = ae^{-\cos x}.$$

Para los fines que aquí se persiguen la constante a no tiene importancia y se puede hacer $a = 1$. Entonces se obtiene la ecuación separable

$$v' = -e^{(n-1)\cos x} \operatorname{sen} 2x,$$

la cual se integra con facilidad por separación de variables. El resultado final es

$$y = \begin{cases} \sqrt[n-1]{2\left[\dfrac{1}{(n-1} - \cos x\right] + ke^{-(n-1)\cos x}} & (n \neq 1) \\ ke^{\cos x + (\cos 2x)/2} & (n = 1). \end{cases}$$

Ejercicios 6.3b (p. 763)

1. Si cualquier combinación lineal de éstas se anulara, digamos

$$c_1 \operatorname{sen} n_1 x + c_2 \operatorname{sen} n_2 x + \cdots + c_k \operatorname{sen} n_k x = 0,$$

entonces, multiplicando por sen $n_j(x)$, donde $j = 1, \ldots, k$, e integrando sobre $[0, \pi]$, se obtendría

$$c_j \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 n_j x \, dx = 0;$$

de donde, $c_j = 0$ para todo j.

2. Usar inducción. Supóngase que se cumple una relación lineal $c_1\phi_1 + \cdots + c_k\phi_k = 0$. Divídase entre $e^{a_k x}$ y derívese $(n_k + 1)$ veces si $P_k(x)$ es de grado n_k. El grado de los coeficientes de los otros $e^{a_i x}$ no cambia, de modo que siguen siendo diferentes de cero.
3. Multiplíquense ambos miembros de la ecuación por $(1 - n)y^{-n}$.

(a) $y^{-1} = cx + \log x + 1.$

(b) $y^3 = cx^{-3} + \dfrac{3a^2}{2x}.$

(c) $(y^{-1} + a)^2 = c(x^2 - 1).$

4. Si se pone $y = y_1 + u^{-1}$, la ecuación se reduce a la ecuación lineal $u' - (2Py_1 + Q)\,u = P.$

$$y = x - \frac{\exp\,[(1/2)x^4]}{c + \int_0^x x^2 \exp\,[(1/2)x^4]\,dx}$$

5. Iguálense los segundos miembros de las dos ecuaciones para obtener $y = x^2$, y verifíquese directamente que ésta es una integral de ambas ecuaciones.
6. Nótese que ésta es la ecuación (a) del Ejercicio 5 y, por lo tanto, es una ecuación de Riccati con una solución conocida. Entonces, aplíquese el resultado del Ejercicio 4.

$$y = x^2 - \frac{\exp\,[(2/3)x^3]}{c + \int_{-\infty}^x \exp\,[(2/3)x^3]\,dx} \qquad [= f(x, c)].$$

Para trazar las gráficas de la familia de curvas correspondientes, trácense primero las dos ramas de la curva

$$y^2 + 2x - x^4 = 0, \qquad y = \pm\sqrt{(x^3 - 2)x},$$

la cual divide al plano en dos regiones donde $y' < 0$ y una región donde $y' > 0$. Las dos ramas infinitas de esta curva son asintóticas a las dos parábolas $y = \pm x^2$. Demuéstrese que todas las curvas integrales son asintóticas a estas parábolas, probando las dos relaciones

$$f(x, c) = -\,x^2 + o(1) \text{ conforme } x \to +\infty \quad (-\infty < c < \infty)$$

y

$$f(x, c) = x^2 + o(1) \quad \text{conforme } x \to -\infty \qquad (c \neq 0),$$

donde $o(1)$ denota una función que tiende a cero.

7. Póngase

$$y_1 - y_3 = a, \qquad y_1 - y_4 = b, \qquad y_2 - y_3 = c, \qquad y_2 - y_4 = d.$$

Entonces

$$a' + Pa(y_1 + y_3) + Qa = 0,$$

de modo que

$$P(y_1 + y_3) = -Q - \frac{a'}{a},$$

$$P(y_1 - y_3) = aP$$

o bien,

$$2Py_1 = aP - Q - \frac{a'}{a}.$$

De modo semejante,

$$2Py_1 = bP - Q - \frac{b'}{b}.$$

De aquí que

$$\frac{d \log (a/b)}{dx} = P(a - b) = -P(y_3 - y_4),$$

y, análogamente,

$$\frac{d \log (c/d)}{dx} = -P(y_3 - y_4);$$

restando,

$$\log \frac{a/b}{c/d} = \text{constante}.$$

8. Ver la relación

$$\frac{d \log (a/b)}{dx} = P(y_4 - y_3),$$

en la demostración del ejemplo precedente.

Las soluciones particulares de la ecuación especial son $y_1 = 1/\cos x$ y $y_2 = -1/\cos x$;

$$y = \frac{1 + ce^{2x}}{(1 - ce^{2x})\cos x}.$$

9. La solución común e^x de (a) y (b) se obtiene eliminando y'' entre las dos ecuaciones.

(a) $c_1e^x + c_2x$.

(b) $c_1e^x + c_2\sqrt{x}$.

10. La curva satisface la ecuación diferencial

$$n\left(x\frac{dx}{dy} - y\right) = r,$$

o, en coordenadas polares, r, θ, con θ como variable independiente,

$$\frac{nr^2}{\cos\theta \dfrac{dr}{d\theta} - r \operatorname{sen}\theta} = r;$$

es decir,

$$\frac{d \log r}{d\theta} = \frac{n}{\cos \theta} + \tan \theta,$$

de donde

$$r = a\,\frac{[\tan(\theta/2 + \pi/4)]^n}{\cos \theta} = a\,\frac{(1 + \operatorname{sen} \theta)^n}{\cos^{n+1} \theta}$$

(ver el Volumen I, pp. 271-272).

Ejercicios 6.3c (p. 769)

1. (a) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-(1/2)x} \cos \frac{\sqrt{3}\,x}{2} + c_3 e^{-(1/2)x} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}\,x}{2}$.

   (b) $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{2x}$.

   (c) $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$.

   (d) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{\sqrt{2}x} + c_4 e^{-\sqrt{2}x}$.

   (e) Hágase la sustitución $x = e^t$:

$$y = c_1 x + c_2/x.$$

2. Del teorema fundamental del álgebra se deduce que $f(z)$ puede escribirse

$$f(z) = (z - a_1)^{\mu_1}(z - a_2)^{\mu_2} \cdots (z - a^k)^{\mu_k}$$

(ver el Volumen I, p. 286; Volumen II, p. 888), donde los μ_ν son enteros positivos tales que $\mu_1 + \cdots + \mu_k = n$ y

$$f(a_\nu) = f'(a_\nu) = \cdots = f^{(\mu_\nu - 1)}(a_\nu) = 0.$$

Ahora bien,

$$L(e^{\lambda x}) = f(\lambda) e^{\lambda x}.$$

Derivando esta relación $(\mu_\nu - 1)$ veces y poniendo $\lambda = a_\nu$ en el resultado se obtiene (ver la regla de Leibnitz, Volumen I, p. 203)

$$L(e^{a_\nu x}) = f(a_\nu)\, e^{a_\nu x} = 0$$
$$L(x e^{a_\nu x}) = [f'(a_\nu) + x f(a_\nu)] e^{a_\nu x} = 0$$
$$L(x^2 a^{a_\nu x}) = [f''(a_\nu) + 2x f'(a_\nu) + x^2 f(a_\nu)] e^{a_\nu x} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$L(x^{\mu_\nu - 1} e^{a_\nu x}) = \left[\binom{\mu_\nu - 1}{0} f^{(\mu_\nu - 1)}(a_\nu) + \binom{\mu_\nu - 1}{1} f^{(\mu_\nu - 2)}(a_\nu) x + \cdots + \binom{\mu_\nu - 1}{\mu_\nu - 1} f(a_\nu) x^{\mu_\nu - 1}\right] e^{a_\nu x} = 0.$$

De modo que se tienen n soluciones particulares

$$e^{a_1 x},\ xe^{a_1 x},\ \ldots,\ x^{\mu_1 - 1}e^{a_1 x}$$
$$e^{a_2 x},\ xe^{a_2 x},\ \ldots,\ x^{\mu_2 - 1}e^{a_2 x}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$e^{a_k x},\ xe^{a_k x},\ \ldots,\ x^{\mu_k - 1}e^{a_k x},$$

las cuales, por el Ejercicio 2, p. 763, son linealmente independientes.

3. Sustituyendo en la ecuación diferencial, se obtiene

$$(a_0 b_0 - 1)P(x) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)P'(x) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)P''(x) + \cdots = 0,$$

y, por el desarrollo, ésta es una identidad si $a_0 b_0 = 1$, $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$ . . . , El segundo caso se reduce al primero si se sustituye y por y'.

4. (a) $1/(1 + t^2) = 1 - t^2 + t^4 - \ldots$; de donde,

$$y = P(x) - P''(x) = 3x^2 - 5x - 6.$$

(b) $1/(t + t^2) = (1/t) - 1 + t - t^2 + \cdots$; de donde,

$$y = \int P(x)\,dx - P(x) + P'(x) - P''(x) = -\frac{2}{3} + x + \frac{1}{3}x^3.$$

5. (a) $y = \frac{3}{8}e^x$. (b) $y = \frac{1}{6}x^3 e^x$.

6. $y = e^x\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right) + c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$.

7. (b) La ecuación se vuelve de la forma tratada en (a) si se multiplica por x^3. Tiene las soluciones particulares $u = x^3$ y $y = x^5$; de donde, por (a), una tercera solución está dada por $w = 1 + x^2$; entonces, la solución general es

$$A(1 + x^2) + Bx^3 + Cx^5.$$

Ejercicios 6.4 (p. 780)

1. (a) $x^2 + y^2 + cx + 1 = 0$ $(-\infty < c < \infty)$ y la recta $x = 0$.
(b) $x^2 + 2y^2 = c^2$.
(c) Se encuentra que la ecuación diferencial de la familia de cónicas confocales (ver la p. 303) es

$$y'^2 + \frac{x^2 - y^2 - a^2 + b^2}{xy}y' - 1 = 0,$$

la cual permanece sin cambio si se remplaza y' por $-1/y'$; la familia de elipses $(-b^2 < c < \infty)$ es ortogonal a la familia de hipérbolas $(-a^2 < c < -b^2)$.
(d) $y = \log|\tan(x/2)| + c$ y las rectas verticales $x = k\pi$ (k entero).
(e) La familia de curvas (tractriz).

$$x - c = \pm[\sqrt{a^2 - y^2} - a \text{ ar cosh } (a/y)]$$

y la misma familia reflejada en el eje x.

2. (a) La familia de parábolas $y = cx^2$.
   (b) La familia de hipérbolas $xy = c$.
3. (a) $y = x^2$. (b) $y = -x + x \log(-x)$, $(0 > x > -\infty)$.
4. $y = xp + a\sqrt{1 + p^2} - ap \text{ ar senh } p$.
5. $x = ce^{-p/a} + \frac{1}{2}p$

$$y = c(p + a)e^{-p/a} + \frac{1}{2}p(p + a) - \frac{1}{4}(p + a)^2.$$

Nótese que para $c = 0$ esto da la parábola $y = x^2 - (a^2/4)$. ¿Cuál es el significado geométrico de este resultado?

6. (a) $y = \text{sen}(x + c)$, soluciones singulares $y = \pm 1$.

   (b) $x = \pm \frac{1}{2}(\text{arc sen } y + y\sqrt{1 - y^2}) + c$.

   (c) $x = \pm \left(\sqrt{(2a - y)y} - 2a \text{ arc tan } \sqrt{\frac{y}{2a - y}}\right) + c$,

   la cual es una familia de cicloides y puede expresarse en la forma paramétrica $x = c + a(\phi - \text{sen } \phi)$, $y = a(1 - \cos \phi)$. La solución singular, $y = 2a$.

   (d) $$x = \pm \int_0^y \sqrt{\frac{1 + y^2}{1 - y^2}}\, dy + c \qquad (-1 \leqq y \leqq 1);$$

   las soluciones singulares $y = \pm 1$. (El lector debe probar que estas curvas no son sinusoidales. La expresión para x puede escribirse en términos de integrales elípticas de segunda clase; ver el Volumen I, pp. 436 y siguientes, Sección 4.1g, Problema 1.)

7. $y = x \text{ sen } ax$; soluciones singulares $y = x$ y $y = -x$.
8. En cada caso, supóngase que la ecuación de la recta tangente se da en la forma $x/a + y/b = 1$.
   (a) Ecuación de Clairaut, $y = xp + kp/(p - 1)$, donde $k = a + b$. La integral singular es la parábola $x^2 - 2xy + y^2 - 2kx - 2ky + k^2 = 0$, simétrica respecto a la recta $x = y$ y tangente a los ejes x y y en los puntos $(k, 0)$ y $(0, k)$, respectivamente.
   (b) Hágase $a = k \cos \theta$ y $b = k \text{ sen } \theta$, donde k es la longitud determinada sobre la tangente por sus intercepciones; úsese θ como el parámetro a lo largo de la curva. La ecuación de Clairaut es $y = xp \pm kp/\sqrt{1 + p^2}$. Las ecuaciones paramétricas de la curva son $x = k \cos^3 \theta$, $y = k \text{ sen}^3 \theta$. Esta es la astroide del Volumen I, p. 436, Sección 4.1e, Problema 7.

(c) Hágase $|ab| = k$. La ecuación de Clairaut es $y = xp + \sqrt{k|p|}$. La curva es la unión de las dos hipérbolas rectangulares $4xy = \pm k$.

Ejercicios 6.5 (p. 784)

1. (a) Reescríbase como $(\frac{1}{2}y'^2)' = x$;

$$y = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a} + \frac{1}{2}a \log (x + \sqrt{x^2 + a}).$$

(b) Reescríbase como $(y''^2)' = 1$;

$$y = \frac{4}{15}(x + a)^{5/2} + bx + c.$$

(c) Reescríbase como $(xy')' = 2$;

$$y = 2x + a \log x + b.$$

(d) Reescríbase como $x(y''^2)' = y''^2 - 2$ e introdúzcase y''^2 como una nueva variable independiente. $y = x^2 + \frac{1}{6}ax^3 + bx + c$.

2. (a) $y = (ax + b)^{2/3}$.

(b) $y = \sqrt{a + (x + b)^2}$.

(c) $y = \sqrt{a(x + b)^2 + a^{-1}}$.

La ecuación puede expresarse en la forma $p(d/dy)(p/y) = 1$. $y = a/(1 - be^{ax})$. Nótense las soluciones $p = 0$, $y =$ constante.

(e) Introdúzcanse las nuevas variables z y q, con $z = y''$, $q = y'''$ y $q(dq/dz) = y^{iv}$.

$$y = ax^2 + bx + c + \frac{2}{15}\left(\frac{x}{2} + b\right)^5$$

(f) Procédase como en la parte (e):

$$y = ax + b + c \operatorname{sen} (x + d).$$

3. $MN = y\sqrt{1 + y'^2}$, $MC = -[(1 + y'^2)^{3/2}/y'']$, y la ecuación diferencial es

$$(1 + y'^2)^2 y + ky'' = 0.$$

Por el método general, ésta se reduce con facilidad a

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{k + c - y^2}{y^2 - c} \quad (c \text{ constante arbitraria}).$$

Los diversos casos, todos de gran importancia en la geometría diferencial de las superficies,[1] son como sigue:

[1] Ver L. P. Eisenhart, *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, reimpreso por Dover (N. Y., 1960), pp. 270–274.

(1) $k = \varkappa^2 (> 0)$, $c = -\gamma^2$ $(< 0,\ \gamma^2 < \varkappa^2)$. La curva es suave en todo punto y oscila, tocando alternadamente las rectas $y = \pm\sqrt{\varkappa^2 - \gamma^2}$. Parece una sinusoide pero no lo es.
(2) $k = \varkappa^2$, $c = 0$. La curva es un círculo de radio $\varkappa$ con centro sobre el eje x.
(3) $k = \varkappa^2$, $c = \gamma^2\ (> 0)$. La curva es una sucesión de arcos idénticos, unidos por cúspides que se encuentran sobre la recta $y = \gamma$, y todos en contacto con $y = \sqrt{\varkappa^2 + \gamma^2}$. Parece una cicloide pero no lo es.
(4) $k = -\varkappa^2\ (< 0)$, $c = \gamma^2 > \varkappa^2$. La curva es una sucesión de arcos idénticos vueltos hacia abajo, con sus cúspides sobre $y = \gamma$ y en contacto con $y = \sqrt{\gamma^2 - \varkappa^2}$.
(5) $k = -\varkappa^2$, $c = \gamma^2 = \varkappa^2$. La curva es una tractriz.
(6) $k = -\varkappa^2$, $c = \gamma^2 < \varkappa^2$. La curva tiene una infinidad de cúspides perpendiculares a las rectas $y = \gamma$ y $y = -\gamma$, alternadamente.

Elimínense a, b, c usando las ecuaciones que se obtienen al derivar tres veces la ecuación del círculo.

$$(1 + y^2)\, y''' - 3y'y''^2 = 0.$$

Ejercicios 6.6 (p. 787)

1. (a) $c_0 = a,\ c_1 = a,\ c_\nu = \dfrac{a+1}{\nu!}$ $\qquad (\nu \geqq 2)$.

   (b) $c_0 = \dfrac{\pi}{2},\ c_1 = 1,\ c_{2\nu} = 0,\ c_{2\nu+1} = \dfrac{2(-1)^\nu}{2\nu + 1}$ $\qquad (\nu \geqq 1)$.

   (c) $c_0 = 0,\ c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = \dfrac{1}{3}$.

   (d) $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{4} + \cdots$.

2. Si $y(x) = \sum c_\nu x^\nu$, entonces

$$c_{\nu+2} = -\frac{c_\nu}{(\nu+2)^2} \qquad \text{y} \qquad c_0 = 1,\ c_1 = 0;$$

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu}\,\nu!^2} x^{2\nu}$$

Si se sustituye la serie de potencias para cos xt en la expresión para $J_0(x)$ del Ejercicio 7, p. 534, y se intercambian la integración y la suma (¿por qué puede hacerse esto?), se obtiene

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} (-1)^\nu \int_{-1}^{+1} \frac{t^{2\nu}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt;$$

el valor de

$$\int_{-1}^{+1} \frac{t^{2\nu}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \qquad \text{is} \qquad \frac{(2\nu)!\ \pi}{\nu!^2\, 2^{2\nu}},$$

como fácilmente se encuentra poniendo $t = \operatorname{sen} \tau$ y remitiéndose al Volumen I, p. 280. Por lo tanto, las series de potencias para $y(x)$ y $J_0(x)$ son idénticas.

Ejercicios 6.7 (p. 801)

1. La fórmula de Poisson da una función de potencial $u(r, \theta)$ en el interior del círculo unitario, con valores en la frontera dados por $f(\theta)$. Ahora bien, $u(1/r, \theta)$ también es una función de potencial (ver la p. 58, Ejercicio 4) con los mismos valores en la frontera, y es acotada en la región exterior al círculo unitario; por lo tanto, la expresión

$$\frac{r^2 - 1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \frac{d\alpha}{1 - 2r\cos(\theta - \alpha) + r^2}$$

es una solución del problema.

2. El potencial es

$$\mu \log \frac{z + l + \sqrt{(z + l)^2 + x^2 + y^2}}{z - l + \sqrt{(z - l)^2 + x^2 + y^2}}.$$

Dado que sobre el elipsoide $z = l\alpha \cos \phi$, $\sqrt{x^2 + y^2} = l\sqrt{\alpha^2 - 1} \operatorname{sen} \phi$, el potencial es

$$\mu \log \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1},$$

los elipsoides confocales

$$\frac{z^2}{l^2 z^2} + \frac{x^2 + y^2}{l^2(\alpha^2 - 1)} = 1 \qquad (1 \leqq \alpha \leqq \infty)$$

son superficies equipotenciales. Las líneas de fuerza son las trayectorias ortogonales, y por lo tanto (ver el Ejercicio 1, c, p. 781), son las hipérbolas confocales dadas por la misma ecuación, cuando $0 \leqq \alpha \leqq 1$ y la razón de x a y es constante.

3. Sea Σ un esfera de radio ρ y centro en (x, y, z), que se encuentra en el interior de S. Como $\Delta(1/r) = 0$ y $\Delta u = 0$ en la región limitada por Σ y S, por el teorema de Green (ver la p. 675), se tiene

$$0 = \iint_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right) d\sigma - \iint_\Sigma \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right) d\sigma,$$

donde, en la primera integral, n es la normal exterior de S y, en la segunda, la normal exterior de Σ. Ahora bien, sobre la esfera Σ se tiene $\dfrac{\partial(1/r)}{\partial n} = \dfrac{\partial(1/r)}{\partial r} = -\dfrac{1}{\rho^2}$, $r =$ constante $= \rho$; por lo tanto,

$$\iint_\Sigma \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\rho}\iint_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0,$$

ya que u es una función armónica (ver la p. 795); además,

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} u\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\,d\sigma = \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint_{\Sigma} u\,d\sigma,$$

y conforme $\rho \to 0$, esta expresión obviamente tiende a $u(x, y, z)$, porque es el valor medio de u sobre Σ.

Ejercicios 6.8 (p. 810)

1. (a) $u = f(x) + g(y)$; f y g son funciones arbitrarias.
   (b) $u = f(x, y) + g(x, z) + h(y, z)$; f, g, h son funciones arbitrarias.
   (c) La solución más general se obtiene a partir de una solución particular, sumando la solución general de la ecuación homogénea $u_{xy} = 0$.

$$u = \int_0^x d\xi \int_0^y a(\xi, \eta)\,d\eta + f(x) + g(y),$$

   donde x y g son arbitrarias.
2. Si $u(x, y) = \sum \alpha_{\nu\mu} x^\nu y^\mu$, entonces

$$\alpha_{\nu+1,\ \mu+1} = \frac{\alpha_{\nu\mu}}{(\nu + 1)\,(\mu + 1)};$$

   además,

$$\alpha_{\nu 0} = \alpha_{0\nu} = 0$$

   para $\nu \geqq 1$ y $\alpha_{00} = 1$. Así,

$$u(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu y^\nu}{\nu!^2} = J_0(2i\sqrt{xy}),$$

   donde J_0 es la función de Bessel del Ejercicio 2, p. 787.
3. $z^2(z_x{}^2 + z_y{}^2 + 1) = 1$.
4. Una familia uniparamétrica se obtiene a partir de la familia biparamétrica de soluciones $z = u(x, y, a, b)$ haciendo que a y b dependan de alguna manera de un parámetro t:

$$a = f(t)$$
$$b = g(t),$$
$$z = u(x, y, f(t), g(t)).$$

   La envolvente de esta familia uniparamétrica se obtiene encontrando t a partir de la ecuación

$$0 = z_t = u_a f' + u_b g',$$

   y sustituyendo esta expresión para t en $z = u(x, y, f(t), g(t))$. El resultado es nuevamente una solución de $F(x, y, z, z_x, z_y) = 0$, ya que

$$z = u(x, y, a, b)$$

$$z_x = u_x + u_t t_x = = u_x(x, y, a, b)$$
$$z_y = u_y + u_t t_y = u_y(x, y, a, b)$$

y $z = u(x, y, a, b)$ satisface la ecuación $F(x, y, z, z_x, z_y) = 0$.

5. (a) De la ecuación diferencial se obtiene

$$[f'(x)]^2 + [g'(y)]^2 = 1$$

o bien,

$$[f'(x)]^2 = 1 - [g'(y)]^2$$

Como el primer miembro no depende de y ni el segundo depende de x, ambos miembros son iguales a una constante (la cual tiene que ser positiva o cero), digamos c^2; es decir,

$$[f'(x)]^2 = c^2, \; 1 - [g'(y)]^2 = c^2.$$

De aquí que

$$u = cx + \sqrt{1 - c^2}\, y + b$$

es una solución, donde c y b son arbitrarias y $c^2 \leqq 1$.

(b) $u = f(x) + g(y)$ da

$$f(x) = \frac{1}{g'(y)} = \text{constante} = a,$$

de modo que, en este caso,

$$u = ax + \frac{1}{a} y + b$$

(donde a y b son constantes).
Si $u = f(x)\, g(y)$, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^2 = 4 \Big/ \frac{d}{dy}[g(y)]^2 = \text{constante} = 2c;$$

de modo que, en este caso,

$$u = \sqrt{(2cx + a)\left(\frac{2}{c} y + b\right)},$$

siendo a, b, c constantes arbitrarias.

(c) $u = x\sqrt{\dfrac{y}{x + k}} + y\sqrt{\dfrac{x + k}{y}} + k\sqrt{\dfrac{y}{x + k}}$.

6. Aplíquese la transformación lineal

$$x = \xi + \eta,$$
$$y = 3\xi + 2\eta,$$
$$u = f(y - 2x) + g(3x - y) + \frac{1}{12} e^{x+y}.$$

7. Póngase $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}$ y supóngase que K es de grado h. Entonces

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = n(n+1)\,(x^2 + y^2 + z^2)^{(n-2)/2},$$

$$x\frac{\partial K}{\partial y} + y\frac{\partial K}{\partial y} + z\frac{\partial K}{\partial z} = hK$$

(ver la p. 153). Por tanto, $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-(1+h)/2}$ es una solución.

8. De acuerdo con lo expuesto en la página 803, una solución de la primera ecuaciôn es de la forma

$$z = f(x + at) + g(x - at).$$

Sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación, se tiene

$$f'g' = 0;$$

es decir, $f =$ constante, o bien, $g =$ constante. Por lo tanto, la solución más general de ambas ecuaciones es $z = f(x + at)$, o bien $z = f(x - at)$.

9. (a) De la ecuación diferencial resulta

$$\frac{\phi_{xx}}{\phi} = \frac{1}{c^2}\frac{\psi_{tt}}{\psi} = \lambda,$$

siendo λ una constante. Las condiciones en la frontera sólo pueden satisfacerse si $\lambda = -n^2$, donde n es un entero, y

$$\phi(x) = \alpha \operatorname{sen} nx,$$

de donde

$$\psi(t) = a \operatorname{sen} nct + b \cos nct.$$

Por lo tanto, la solución particular más general del tipo especificado es

$$u(x, t) = \operatorname{sen} nx\,(a \operatorname{sen} nct + b \cos nct).$$

(b) Aplicando $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$ y $A \cos B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B)]$, se obtiene

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[a \cos n(x - ct) + b \operatorname{sen} n(x - ct)]$$
$$- \frac{1}{2}[a \cos n(x + ct) - b \operatorname{sen} n(x + ct)].$$

(c) Supóngase una solución en la forma de una suma de soluciones del tipo obtenido en la parte (a), es decir,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} nx(a_n \operatorname{sen} nct + b_n \cos nct).$$

Con el fin de satisfacer las condiciones iniciales en (ii), debe tenerse $b_n = \alpha_n$, $a_n = 0$.

Para la solución de (i) obsérvese, Volumen I, p. 587, (17), que

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -f(-x) \operatorname{sen} nx\, dx + \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx.$$

Para la solución particular en (i) se encuentra $\alpha_{2\nu} = 0$, $\alpha_{2\nu+1} = (-1)^\nu / \pi(2\nu + 1)^2$, donde $\nu = 0, 1, 2, \ldots$;
de donde

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} x \cos ct}{1^2} - \frac{\operatorname{sen} 3x \cos 3ct}{3^2} + \frac{\operatorname{sen} 5x \cos 5ct}{5^2} - \cdots\right].$$

10. $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$; entonces, para $x \geqq 0$,

$$0 = u(x, 0) = f(x) + g(x),$$

$$0 = u_t(x, 0) = -af'(x) + ag'(x);$$

derivando la primera ecuación y comparando con la segunda, se tiene

$$f'(x) = 0, \qquad g'(x) = 0,$$

o bien,

$$f(x) = \text{constante} = c, \qquad g(x) = -c \qquad \text{para} \qquad x \geqq 0.$$

Además, para $t \geqq 0$,

$$\phi(t) = u(0, t) = f(-at) + g(at) = f(-at) - c;$$

es decir, $f(\xi) = c + \phi(\xi/-a)$ $\quad \xi < 0$. Como $x + at \geqq 0$ siempre, y por tanto $g(x + at) = -c$, se deduce que

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 \text{ para } x - at \geqq 0 \\ \phi\left(\dfrac{x - at}{-a}\right) \text{para } x - at \leqq 0 \end{cases}$$

si tanto x como t son no negativas.

Ejercicios 7.2a (p. 819)

1. $\dfrac{2}{\sqrt{2g}}\sqrt{\dfrac{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}{y_1 - y_0}}$.

2. $T = \displaystyle\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} f(r)\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi}^2}\, d\sigma$.

Ejercicios 7.2d (p. 828)

1. (a) Las parábolas $y = c^2 + \dfrac{x^2}{4c^2}$.

   (b) Círculo con centro sobre el eje x.

   (c) $y = c \operatorname{sen} \dfrac{x - a}{c}$.

2. $y = \dfrac{a}{x^{n-1}} + b$ para $n > 1$, y $y = a \log x + b$ para $n = 1$.

3. $y = a(x - b)^{n(n+m)}$ si $n + m \neq 0$; $y = ae^{bx}$ si $n = -m$.

4. $ay'' + a'y' + (b' - c)\, y = 0$; para $b =$ constante,

$$\int_{x_2}^{x_1} byy'\, dx = \frac{b}{2}(y_2{}^2 - y_1{}^2)$$

sólo depende de los puntos extremos de la curva $y = y(x)$.

5. $y_1 - y_0 < \dfrac{\pi}{2}$.

6. Considérese $F(x, y)$, para x fijo, como una función de y; supóngase que esta función de y tiene un mínimo para $y = \bar{y}$. Entonces, $F(x, y) \geqq F(x, \bar{y})$ para una cierta vecindad de $\bar{y}$ y $F_y(x, \bar{y}) = 0$. $\bar{y}$ dependerá del parámetro x; [i.e., $\bar{y} = \bar{y}(x)$]. Entonces, para cualquier función vecina, y, se tiene

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x))\, dx \geqq \int_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}(x))\, dx,$$

donde $\bar{y}\,(x)$ satisface la ecuación $F_y(x, \bar{y}(x)) = 0$.

7. (a) $y = 0$.

(b) Aplíquese la desigualdad de Cauchy. Para cualquier x admisible,

$$1 = y(1) - y(0) = \int_0^1 y'\, dx \leqq \sqrt{\int_0^1 1^2\, dx}\sqrt{\int_0^1 y'^2\, dx} = \sqrt{I},$$

y el signo de igualdad se cumple para $y = x$.

Introdúzcase $1/r$ como nueva variable dependiente en la ecuación de Euler. La solución general es la línea $1/r = a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta$.

Ejercicios 7.3b (p. 834)

1. Si $v = 1/f(r)$, entonces T está dada por el Ejercicio 2, p. 819:

$$F = f(r) \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta\, \dot{\phi}^2}.$$

La ecuación de Euler para la variable ϕ da

$$F_{\dot{\phi}} = \frac{\dot{\phi} f^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \phi}{F} = \text{constante} = C$$

a lo largo de un rayo. Ahora, supóngase que se eligen las coordenadas polares de manera tal que el plano $\phi = 0$ pase por el punto inicial y por el punto final; como $\phi = 0$ en estos dos puntos, se tiene $\dot{\phi} = 0$ para algún punto intermedio, por el teorema del valor medio; es decir, $C = 0$; pero entonces $\dot{\phi} = 0$ para el rayo completo, es decir, $\phi \equiv 0$. Por lo tanto, el rayo completo debe estar en el plano $\phi = 0$.

2. Véase el Ejercicio 1. Usando ϕ como parámetro, se tiene que minimizar $\int\sqrt{\dot{\theta}^2+\operatorname{sen}^2\theta}\,d\phi$, donde $r =$ constante. Introduciendo cot θ como nueva variable dependiente en la ecuación de Euler se llega a la solución general cot $\theta = a\cos\phi + b\operatorname{sen}\phi$, que corresponde a una curva de intersección de la esfera con un plano que pasa por el centro.
3. Véase el Ejercicio I anterior. Aquí, en coordenadas esféricas, se tiene $\theta =$ constante. La introducción de r como variable dependiente y $\phi\operatorname{sen}\theta$ como variable independiente conduce a la misma integral por minimizarse que en el Ejercicio 8, p. 829, (La aplicación del punto del cono con coordenadas esféricas r, θ, ϕ sobre el punto del plano con coordenadas polares r, $\phi\operatorname{sen}\theta$ conserva la longitud de arco.)

$$1/r = a\cos(\phi\operatorname{sen}\theta) + b\operatorname{sen}(\phi\operatorname{sen}\theta).$$

4. La trayectoria tiene que ser recta, ya que debe tener una longitud mínima para los puntos extremos dados. Sólo tiene que encontrarse la distancia mínima entre dos puntos restringidos a moverse sobre dos curvas dadas, el cual es un problema de mínimo para una función de varias variables con condiciones subsidiarias (ver el Capítulo 3, p. 389).
5. Véase la solución al problema siguiente.
6. Supóngase que los puntos extremos se restringen a estar sobre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, respectivamente. Supóngase que la curva minimizadora tiene los puntos extremos $(a_0, f(a_0))$, $(b_0, g(b_0))$, y una ecuación $y = u(x)$, donde $u(a_0) = f(a_0)$, $u(b_0) = g(b_0)$. Como u también es una extremal para puntos extremos fijos, satisface la ecuación de Euler. Considérese una familia de curvas, $y = u(x) + \varepsilon\eta(x)$, con parámetro ε y puntos extremos $(a, f(a))$, $(b, g(b))$, donde $a = a(\varepsilon)$, $b = b(\varepsilon)$ son soluciones de $f(a) = u(a) + \varepsilon\eta(a)$, $g(b) = u(b) + \varepsilon\eta(b)$. La integral correspondiente es

$$G(\varepsilon) = \int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} F(x, u(x) + \varepsilon\eta(x))\sqrt{1 + [u'(x) + \varepsilon\eta'(x)]^2}\,dx.$$

Para la extremal u se tiene la condición $0 = G'(0)$. Se evalúa $G'(0)$ como en las pp. 820 – 821, usando integración por partes para eliminar $\eta'(x)$. Debido a que u satisface la ecuación de Euler, las únicas contribuciones provienen de derivar los límites en la integral para G y de los términos de frontera en la integración por partes. Observando que, para $\varepsilon = 0$,

$$[f'(a) - u'(a)]\frac{da}{d\varepsilon} = \eta(a), \quad [g'(b) - u'(b)]\frac{db}{d\varepsilon} = \eta(b)$$

y que $\eta(a)$, $\eta(b)$ son arbitrarias, se encuentran las relaciones

$$0 = 1 + u'(a_0)f'(a_0) = 1 + u'(b_0)g'(b_0),$$

que expresan la ortogonalidad en los puntos extremos.

Ejercicios 7.4a (p. 843)

1. La ley de conservación de la energía da

$$T + U = T = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \text{constante} = \frac{1}{2}C^2;$$

de donde $ds/dt =$ constante $= C =$ velocidad inicial.

Entonces el principio de Hamilton establece el carácter estacionario de

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} T\, dt = \frac{1}{2} C^2 \int_{t_0}^{t_1} dt = \frac{1}{2} C \int_{s_0}^{s_1} ds;$$

el carácter estacionario de la integral de Hamilton implica que la longitud de la trayectoria es estacionaria.

2. Sea t un parámetro a lo largo de la curva C. Sobre la geodésica perpendicular a C en un punto de ésta con parámetro t, se usa la longitud de arco, s, como parámetro, midiendo s a partir del punto sobre C. Entonces $x = x(s, t), y = y(s, t), z = z(s, t)$ representarán la curva que se obtiene trazando una distancia geodésica S, fija, a lo largo de cada geodésica perpendicular a C en un punto con parámetro t. Aquí, como s es longitud de arco, se tiene $x_s^2 + y_s^2 + z_s^2 = 1$; además, por la fórmula (19), p. 765, x_{ss}, y_{ss}, z_{ss} son proporcionales a G_x, G_y, G_z, y $G(x, y, z) = 0$ para todos los s, t en cuestión. Sobre S (es decir, para $s = 0$) se tiene, por hipótesis, $x_s x_t + y_s y_t + z_s z_t = 0$. Entonces,

$$\frac{d}{ds}(x_s x_t + y_s y_t + z_s z_t) = \lambda(G_x x_t + G_y y_t + G_z z_t) + x_s x_{st} + y_s y_{st} + z_s z_{st}$$

$$= \lambda \frac{dG}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x_s^2 + y_s^2 + z_s^2) = 0.$$

De aquí que $x_s x_t + y_s y_t + z_s z_t =$ constante $= 0$ para todo s, lo cual prueba que las curvas C' para las cuales $s =$ constante son perpendiculares a las geodésicas.

Ejercicios 7.4b (p. 845)

1. A partir de las ecuaciones diferenciales para las geodésicas (p. 842) se encuentra que para un cilindro (es decir, si G no depende de z) dz/dt es constante; de donde las geodésicas sobre un cilindro forman un ángulo constante con el plano x, y.

2. (a) $g(x) - \dfrac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} = 0.$

   (b) $g(x) - \dfrac{6y''(y''^2 + 4y'y''')}{(1 + y'^2)^4} + \dfrac{2y''''}{(1 + y'^2)^3} + \dfrac{48y'^2y''^3}{(1 + y'^2)^5} = 0.$

   (c) $y + y'' + y'''' = 0.$

   (d) $(2 - y'^2)\, y'' = 0.$

3. (a) $\phi d = (a_x + b_y)\phi_x + (b_x + c_y)\phi_y + a\phi_{xx} + 2b\phi_{xy} + c\phi_{yy}.$

   (b) $\Delta^2\phi = 0.$

   (c) $\Delta^2\phi = 0.$

4. $\dfrac{au'' + a'u' + u(b' - c)}{u} = \lambda =$ constante.

5. (a) La ecuación de Euler da

$$f + 2\lambda u = 0;$$

a partir de esta ecuación y de $\int_0^1 \phi^2\, dx = K^2$, se tiene

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{\int_0^1 f^2\, dx}}{2K}, \qquad u = \frac{\pm Kf}{\sqrt{\int_0^1 f^2\, dx}}$$

(b) Para cualquier ϕ continua que sea admisible se tiene

$$I = \int f\phi\, dx \leqq \sqrt{\int_0^1 f^2\, dx}\, \sqrt{\int_0^1 \phi^2\, dx} = K\sqrt{\int_0^1 f^2\, dx},$$

cumpliéndose el signo de igualdad para

8. Partiendo de la condición necesaria (6b), p. 818, se encuentra que

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_{yy}\eta^2 + 2F_{yy'}\eta\eta' + F_{y'y'}\eta'^2)\, dx \geqq 0$$

para cualquier $\eta(x)$ que se anule en $x = x_0, x_1$. Sean h y ξ tales que $x_0 < \xi - h < \xi < \xi + h < x_1$. Defínase $\eta(x)$ como para $[(x - \xi)^2 - h^2]^2 h^{-7/2}$ para $|x - \xi| < h$, y como 0 en todos los demás puntos. Cuando $h \to 0$, la integral tiende a $cF_{y'y'}(\xi, u(\xi), u'(\xi))$, donde c es una constante positiva.

9. Problema en realidad idéntico al problema isoperimétrico estándar. La solución es un arco circular, pero como las soluciones son funciones de x, existe una cota superior para las longitudes permisibles en este problema, a saber

$$\frac{2[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2]}{x_1 - x_0} \operatorname{arc\,tan} \frac{x_1 - x_0}{|y_1 - y_0|}$$

Ejercicios 8.1 (p. 856)

1. (a) Hágase $\alpha = a_1 + ia_2$, $\beta = b_1 + ib_2$.
Para el ejemplo de la multiplicación,

$$\overline{\alpha\beta} = (a_1b_1 - a_2b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1) = \bar{\alpha}\bar{\beta}.$$

(b) Se deduce directamente de (a) tomando límites en las partes real e imaginaria de las sumas parciales.

2. (a) Del Ejercicio 1, $\overline{P(\alpha)} = P(\bar{\alpha})$; de aquí que $P(\alpha) = 0$ implica que $P(\bar{\alpha}) = 0$, y recíprocamente.
(b) Por medio de una división larga, exprésese $P(z)$ en la forma

$$P(z) = (z^2 - 2az + a^2 + b^2)\, Q(z) + cz + d,$$

donde $Q(z)$ es un polinomio con coeficientes reales y c y d son reales. Haciendo $z = \alpha$ en esta ecuación obténgase $c\alpha + d = 0$; de donde

$$ca + d = 0 \qquad \text{y} \qquad icb = 0.$$

Ya que $b \neq 0$, $c = 0$, por tanto, $d = 0$.

3. (a) Usese la ecuación de un círculo en la forma

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2.$$

Entonces $z_0 = \alpha - \lambda^2\beta$, $r^2 = z_0\bar{z}_0 - \alpha\bar{\alpha} + \lambda^2\beta\bar{\beta}$. Si $\lambda = 1$, $z = x + iy$, la la ecuación se transforma en la de una recta, $ax + by = c$, donde $a = 2Re\ \alpha$, $b = 2Im\ \beta$, $c = |\alpha|^2 - |\beta|^2$.

(b) Inviértase la transformación para obtener

$$z = \frac{\beta - \delta z'}{\gamma z' - \alpha};$$

entonces demuéstrese que

$$|z - z_1| = \lambda |z - z_2|$$

se convierte en

$$|z' - z_1'| = \lambda \left|\frac{\gamma z_1' - \alpha}{\gamma z_2' - \alpha}\right| |z' - z_2'|.$$

4. Para $x \geqq 0$.
5. Aplíquese el criterio de comparación.
6. El coeficiente de z^n en el desarrollo de $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z$ para $n > 0$, es

$$(-1)^{n/2} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(n-\nu)!} = \frac{(-1)^{n/2}}{n!} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} = 0$$

(ver el Volumen I, p. 110, Ejercicio 1(b)).

7. La serie es convergente si y sólo si $|z| < 1$, porque si $|z| = \theta < 1$, entonces

$$\left|\frac{z^\nu}{1 - z^\nu}\right| \leqq \frac{\theta^\nu}{1 - \theta^\nu} \leqq \frac{1}{1 - \theta}\theta^\nu$$

y puede compararse con la serie geométrica. Si $|z| > 1$, entonces $z^\nu/(1 - z^\nu)$ tiende hacia -1 conforme ν crece, mientras que en una serie convergente los términos deben tender a 0. Si $|z| = 1$, cada término de la serie o está indefinido o tiene valor absoluto $\geqq \frac{1}{2}$, y la serie no puede converger.

Ejercicios 8.2 (p. 866)

1. Hágase $f(z) = u + iv$, $g(z) = s + it$. Tomando el producto, por ejemplo, se encuentra, para

$$U(x, y) = Re\ \{f(z)\,g(z)\} = us - vt$$
$$V(x, y) = Im\ \{f(z)\,g(z)\} = ut + vs$$

que

$$\begin{aligned} U_x &= u_x s + u s_x - (v_x t + v t_x) \\ &= v_y s + u t_y + u_y t + v s_y \\ &= u t_y + u_y t + v_y s + v s_y = V_y, \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

2. Para $f(z) = u + iv$, derivando $u^2 + v^2 =$ constante se obtiene la pareja de ecuaciones

$$u u_x + v v_x = 0, \quad u u_y + v v_y = 0.$$

Remplazando la segunda ecuación, mediante las ecuaciones de Cauchy y Riemann, por otra en que sólo aparezcan las derivadas con respecto a x se obtiene un sistema con la única solución $u_x = v_x = 0$(a menos que se trate del caso trivial $u^2 = v^2 = 0$). Como consecuencia, $u_y = v_y = 0$,y de aquí se llega al resultado.

3. (a) —(c) Continuas en todo punto; no diferenciables.
(d) Continua para $z \neq 0$, no diferenciable.

4. Si $z = re^{i\phi}$, $\zeta = \xi + i\eta$, entonces

$$\xi = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \phi$$

$$\eta = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \operatorname{sen} \phi.$$

Si $r =$ constante $= c$, entonces

$$\frac{\xi^2}{\frac{1}{4}(c + 1/c)^2} + \frac{\eta^2}{\frac{1}{4}(c - 1/c)^2} = 1;$$

si $\phi =$ constante $=$ c, entonces

$$\frac{\xi^2}{\cos^2 c} + \frac{\eta^2}{\cos^2 c - 1} = 1$$

(ver la p. 303, Ejercicio 8).

5. De 8.1, Ejercicio 3b, se sabe que la aplicación transforma círculos en círculos. Como los dos puntos son fijos, los círculos que pasan por ellos se transforman en círculos de la misma familia, tanto en la transformación como en su inversa. Dado que la transformación es conforme, lo mismo se cumple para la familia ortogonal de círculos.

6. Hágase $z = x + iy$, $\zeta = 1/z = \xi + i\eta$. Por lo tanto,

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

y se ve que la inversión puede considerarse como la composición, $gf(z)$, de $1/z$ y una reflexión con respecto al eje x, $g(\zeta) = \bar{\zeta}$. Puesto que la reflexión es conforme —con la inversión del sentido de los ángulos— y $1/z$ es analítica, la inversión es conforme. La reflexión aplica círculos en círculos, y $1/z$, una transformación lineal general (ver el Ejercicio 5), hace

lo mismo; por lo tanto, la inversión también. El jacobiano de la inversión es el producto de los jacobianos de la reflexión y de $1/z$; de aquí que, para la inversión, el jacobiano es

$$-|f'(z)|^2 = -\frac{1}{|z|^2} = \frac{-1}{(x^2+y^2)^2}.$$

7. $|\zeta|^2 = \zeta\bar{\zeta} = \dfrac{\alpha\bar{\alpha}z\bar{z} + \beta\bar{\beta} + (\alpha\beta z + \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{z})}{\beta\bar{\beta}z\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} + (\alpha\beta z + \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{z})}$

Ahora bien, para $\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1$, la diferencia entre el numerador y el denominador es

$$z\bar{z} - 1;$$

de modo que el numerador es mayor que el denominador para $|z| > 1$, y menor para $|z| < 1$. Si $\beta\bar{\beta} - \alpha\bar{\alpha} = 1$, se tiene el caso inverso.

8. Primero transfórmese, poniendo $\zeta = az + b$, en el círculo unitario; a continuación, aplíquese la transformación

$$\zeta' = i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}.$$

9. Usese $\zeta_i - \zeta_j = \dfrac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(z_i - z_j)}{(\gamma z_i + \delta)(\gamma z_j + \delta)}$.

Ejercicios 8.3 (p. 877)

1. (a) Escríbase el integrando en la forma

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{3}{z+1}\right).$$

El primer término en el paréntesis es analítico en la vecindad de $z = -1$; por lo tanto, su integral a lo largo de una pequeña circunferencia con centro en -1 es 0. De modo semejante, la integral del segundo término alrededor de un pequeño círculo con centro en 1 es 0. Para evaluar la integral en el círculo con centro en 1, hágase $z = re^{i\theta}$; resulta πi. De manera semejante, para el pequeño círculo alrededor de -1, la integral es $3\pi i$.

(b) Tómese una trayectoria que encierre a 1 en un cierto sentido el triple de veces que las que encierra a -1 en el otro; por ejemplo, (ver la Fig. 8.12).

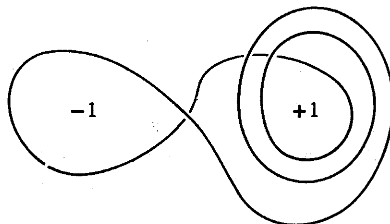


Figura 8.2

2. $$\alpha^z\alpha^\zeta = \exp[z(\log\alpha + 2n\pi i)]\exp[\zeta(\log\alpha + 2m\pi i)],$$

mientras que

$$\alpha^{z+\zeta} = \exp[(z+\zeta)(\log\alpha + 2k\pi i)].$$

Por tanto, la adición de los exponentes es válida, siempre que en todo el proceso se use la misma rama del logaritmo; es decir, $n = m = k$. Nótese que esto es lo mejor que se puede hacer, excepto en casos muy especiales, porque si el teorema de la adición es válido, entonces

$$k(z+\zeta) = nz + m\zeta + p,$$

donde P es algún entero. Si z y ζ son linealmente independientes, cuando se consideran como vectores de dos componentes, y $n \neq m$, las componentes de $z = a + ib$ y de $\zeta = \alpha + i\beta$ están restringidas por

$$\frac{(n-m)(a\beta - \alpha b)}{\beta + b} = p,$$

un entero, y si $n = m \neq k$, entonces $\beta + b = 0$. Por lo general, ninguna de las condiciones se satisface.

Para la segunda ley,

$$\begin{aligned} z^\alpha\zeta^\alpha &= \exp[\alpha(\log z + 2n\pi i)]\exp[\alpha(\log\zeta + 2m\pi i)] \\ &= \exp\{\alpha[\log z + \log\zeta + 2(n+m)\pi i]\}, \end{aligned}$$

mientras que

$$(z\zeta)^\alpha = \exp\{\alpha[\log(z\zeta) + 2k\pi i]\}.$$

Aquí, incluso no es necesario que se cumpla la igualdad si $k = n + m$ porque si $z = re^{i\theta}$ y $\zeta = \rho e^{i\phi}$, las condiciones $-\pi < \theta \leqq \pi$, $-\pi < \phi \leqq \pi$ no hacen que $\theta + \phi$ satisfaga las mismas desigualdades.

Para la tercera ley,

$$\begin{aligned} (\alpha^z)^\zeta = e^{\zeta\log\alpha^z} &= \exp\{\zeta[z(\log\alpha + 2n\pi i) + 2m\pi i]\} \\ &= \exp(z\zeta\log\alpha + 2z\zeta n\pi i + 2\zeta m\pi i). \end{aligned}$$

De modo semejante,

$$(\alpha^\zeta)^z = \exp(z\zeta\log\alpha + 2z\zeta p\pi i + 2zq\pi i)$$

y

$$\alpha^{z\zeta} = \exp(z\zeta\log\alpha + 2z\zeta r\pi i),$$

donde m, n, p, q, r son enteros arbitrarios. Por lo tanto, en general, es de esperar que se cumpla la igualdad sólo si $m = q = 0$ y $n = p = r$.

Lo más que se puede decir es que se pueden elegir ramas de las funciones multiformes de modo tal que se cumplan las leyes de los exponentes, pero debe tenerse cuidado en seleccionarlas adecuadamente.

3. (a) Los valores de i^i son $\exp[(2n - \frac{1}{2})\pi]$, para n entero.

(b) Hágase $\zeta = \xi + i\eta$, $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leqq \pi$ y $a = \log r = \log|z|$. Entonces,

$$z^{\zeta} = \exp[a\xi - (\theta + 2k\pi)\eta] \exp\{i[a\eta + \xi(\theta + 2k\pi)]\}.$$

La condición es que $a\eta + \xi(\theta + 2k\pi)$ sea un múltiplo entero de π para cada entero k elegido. Haciendo $k = 0, 1$, se obtiene la condición $\xi = j/2$, donde j es cualquier entero: por lo tanto, para $a \neq 0$ $(r \neq 1)$,

$$\eta = (l\pi - \frac{1}{2}j\theta)\Big/a,$$

donde l puede ser cualquier entero. Así, para cualquier z que no esté sobre el círculo unitario existe un exponente $\zeta(j, l)$ que corresponde a cada pareja de enteros, j, l, tal que todos los valores de z^{ζ} son reales. Si $a = 0$, la condición dada anteriormente para η se remplaza por la condición $\xi\theta = p\pi$, donde p puede ser cualquier entero, y ahora η es arbitrario. Si $p \neq 0$, se ve que $\theta = 2\pi p/j$ debe ser un múltiplo racional de 2π. si $p = 0$, ξ puede ser cero y entonces θ es arbitrario.

(c) Sí. Hágase $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, donde $y = \eta = 0$. Si $x > 0$, la solución de la parte (b) da $\xi = j_2$, donde j es cualquier entero. Si $x < 0$, la parte (b) sólo proporciona valores enteros de $\xi = n$.

4. Para $z = x + iy$, es evidente que puede derivarse bajo el signo integral con respecto a x y a y, ya que estas derivadas son continuas con respecto a los parámetros y la convergencia de las integrales de las derivadas en el límite inferior $t = 0$ es uniforme para $x > \varepsilon > 0$. Dado que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen para el integrando, entonces deben cumplirse para la integral. Integrando por partes se llega a la ecuación funcional.

5. Aplíquese el teorema dado en el Volumen I, p. 525, para demostrar que la serie es absolutamente convergente.

6. (a) El valor de la integral sobre la pequeña desviación circular tiende a cero a medida que el círculo se hace más pequeño. Si se pone $z = e^{i\theta}$ sobre el círculo unitario y $z = x$, $z = iy$, respectivamente, sobre los ejes, el teorema de Cauchy da

$$0 = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{x}\right)^m x^{n-1}\, dx + i\int_0^{\pi/2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^m e^{in\theta}\, d\theta - i\int_0^1 \left(iy + \frac{1}{iy}\right)^m (iy)^{n-1}\, dy$$

$$= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{x}\right)^m x^{n-1}\, dx + i \cdot 2^m \int_0^{\pi/2} \cos^m\theta\, e^{in\theta}\, d\theta - e^{i\pi(n-m)/2}\int_0^1 \left(-y + \frac{1}{y}\right)^m y^{n-1}\, dy;$$

igualando las partes imaginarias de esta ecuación se obtiene

$$2^m \int_0^{\pi/2} \cos^m\theta \cos n\theta \, d\theta = \operatorname{sen}\frac{\pi(n-m)}{2} \int_0^1 \left(-y+\frac{1}{y}\right)^m y^{n-1}\, dy$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi(n-m)}{2}\int_0^1 (1-\eta)^m\, \eta^{(n-m-2)/2}\, d\eta$$
$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(n-m)\right) B\left(m+1, \frac{n-m}{2}\right)$$

(ver la p. 508).

(b) Usese la relación

$$\left(\operatorname{sen}\frac{(n-m)\pi}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right) = \frac{\pi}{\Gamma[1-(n-m)/2]}$$

(ver la p. 508)

Ejercicios 8.4 (p. 805)

1. El integrando tiene una derivada continua con respecto a z; como consecuencia, se puede derivar bajo el signo integral. Véase la Sección 1.8b.
2. Fácilmente se ve que

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\frac{z^n}{\zeta^n}\, d\zeta$$

es una función analítica de z. Derivando bajo el signo integral y aplicando la regla de Leibnitz (ver el Volumen I, p. 203), se encuentra que $h^{(\mu)}(z)$ es

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}\nu!\, n\cdot(n-1)\cdots(n-\mu+\nu+1)\int \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}}\frac{z^{n-\mu+\nu}}{\zeta^n}\, d\zeta$$
$$= \frac{\mu!}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{n}{\mu-\nu}\int \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}}\frac{z^{n-\mu+\nu}}{\zeta^n}\, d\zeta.$$

Sólo los términos con $\mu - \nu \leqq n$ son diferentes de cero, pues de lo contrario $\binom{n}{\mu-\nu}$ se anularía. Por otra parte para $\mu - \nu < n$, se anula un término con $z = 0$; si $\mu < n$, no existen otros términos, de modo que $h^{(\mu)}(0) = 0$. Si $\mu \geqq n$, sólo queda el término con $\mu - \nu = n$, de modo que

$$h^{(\mu)}(0) = \frac{\mu!}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta = f^{(\mu)}(0).$$

3. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, están dadas las derivadas parciales v_x y v_y de v; existe una función v con estas derivadas, ya que se satisface la condición de integrabilidad $u_{xx} + u_{yy} = 0$ [ver las fórmulas (75a, b). p. 104); v está determinada de modo único, aparte de una constante aditiva c, y está dada por la integral de línea

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (v_y\, dy + v_x\, dx) + c.$$

También, de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se concluye que v es una función de potencial.

4. En $z = 1$, πi; en $z = -1$, $3\pi i$ (Sección 8.3, Ejercicio 1).
5. Elíjase un círculo de radio R y centro en 0, con $R = |\zeta|$ tan grande que $R > 2|z|$. Entonces,

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\right| = \frac{|z|}{|\zeta|^2|1 - z/\zeta|} < \frac{2|z|}{R^2}.$$

Como consecuencia, para la integral, obténgase la cota

$$|f(z) - f(0)| \leqq 2M|z|/R.$$

Pásese hacia el límite conforme R tiende al ∞.

6. $$|a_\nu| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t^{\nu+1}}dt\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{\nu+1}}2\pi\rho,$$

donde C es el círculo de radio ρ con centro en el origen.

7. Por hipótesis, $|\alpha_n| > 0$. Por consiguiente,

(i) $$|P(z)| = |z|^n\left|\alpha_n + \frac{\alpha_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{\alpha_0}{z^n}\right|$$
$$> \frac{1}{2}|z|^n|\alpha_n|,$$

siempre que se tome

$$|z| > \max\left\{1, 2\,\frac{|\alpha_{n-1}| + \cdots + |\alpha_0|}{|\alpha_n|}\right\};$$

porque, entonces,

$$\left|\alpha_n + \frac{\alpha_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{\alpha_0}{z^n}\right| \geqq |\alpha_n| - \left\{\frac{|\alpha_{n-1}|}{|z|} + \cdots + \frac{|\alpha_0|}{|z^n|}\right\}$$
$$\geqq |\alpha_n| - \frac{|\alpha_{n-1}| + \cdots + |\alpha_0|}{|z|} > \frac{|\alpha_n|}{2}.$$

Ahora bien, como $P(z)$ no tiene raíces, $f(z)$ está definida en todo punto. Pero, como $|z| > 1$,

$$|f(z)| < \frac{2}{|\alpha_n|\,|z|^n} < \frac{2}{|\alpha_n|}.$$

En consecuencia, $f(z)$ es acotada y, por lo tanto, constante. De la primera de las desigualdades anteriores se concluye que $f(z) = 0$, lo cual contradice a $f(z)\,P(z) = 1$.

8. (a) — (b) El residuo de f'/f en α es $2\pi iI$. Hágase $f(z) = (z - \alpha)^p\,\phi(z)$, donde ϕ es analítica, $\phi(\alpha) \neq 0$, y p representa ya sea el orden n del cero, o bien, $-m$ para el polo, para las partes (a) y (b), respectivamente. Entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{p\phi(z) + (z - \alpha)\,\phi'(z}{(z - \alpha)\,\phi(z)}.$$

Entonces la fórmula de la integral de Cauchy indica que I es el valor de $[p\phi(z) + (z - \alpha)]\, \phi'(z)/\phi(z)$ cuando $z = \alpha$; eso es P.

(c) Aplíquese el teorema de los residuos (p. 887).

9. (a) Por el Ejercicio 8, el número de raíces de la ecuación $P(z) + \theta Q(z) = 0$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{P'(z) + \theta Q'(z)}{P(z) + \theta Q(z)}\, dz.$$

El denominador es diferente de cero para todo θ tal que $0 \leqq \theta \leqq 1$ en cualquier punto de C; por lo tanto, la integral como un todo es una función continua de θ. Como su valor siempre es un entero, es constante y, en consecuencia, es el mismo para $\theta = 0$ y $\theta = 1$.

(b) Si

$$|a| < r^4 - \frac{1}{r},$$

entonces $r > 1$; de modo que la ecuación $z^5 + 1 = 0$ tiene cinco raíces en el interior del círculo $|z| = r$; si se pone $P(z) = z^5 + 1$, $Q(z) = az$, sobre el círculo $|z| = r$, se tiene

$$|Q(z)| = |a|r < r^5 - 1 < |z^5 + 1| = |P(z)|.$$

10. Por la cota inferior (i) encontrada en el Ejercicio 7 para $|P(z)|$, ninguna raíz puede estar fuera o sobre una circunferencia suficientemente grande centrada en 0. Aplicando la técnica de estimación que se usó en (i) del Ejercicio 7, se encuentra que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z} + R(z),$$

donde el residuo $R(z)$ satisface $|R(z)| < M/|z|^2$ fuera de un círculo de radio r suficientemente grande. Tómese r tan grande que todas las raíces de P estén en su interior. Aplicando el resultado del Ejercicio 8(c) se obtiene, para el número de raíces, la integral alrededor del círculo de radio r

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = n + \frac{1}{2\pi i}\int R(z)\, dz.$$

Ya que

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int R(z)\, dz\right| < \frac{M}{r},$$

la integral del residuo tiende a cero conforme $r \to \infty$.

11. (a) Sígase el método de solución para el Ejercicio 8(a).

(b) Si las raíces son $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j$, si los polos se localizan en $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, y si sus multiplicidades son $n_1, n_2, \ldots, n_j$ y $m_1, m_2, \ldots, m_k$, respectivamente, la integral tiene el valor

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \cdots + n_j\alpha_j - m_1\beta_1 - m_2\beta_2 - \cdots - m_k\beta_k.$$

12. Puesto que $f(z) = e^z$ es analítica en todo punto, ya que $f'(z)/f(z) = 1$, y

dado que, por consiguiente, la integral I del Ejercicio 8(a) debe anularse sobre todo círculo, no importa qué tan grande, $f(z)$ no puede tener raíces.

Ejercicios 8.5 (p. 897)

1. (a) Expresando las funciones en la vecindad de α por

$$f(z) = a_0 + a_1(z - \alpha) + \cdots + a_{n-1}(z - \alpha)^{n-1} + \cdots$$

y

$$g(z) = (z - \alpha)^{-n}[c_{-n} + c_{-n+1}(z - \alpha) + \cdots + c_{-1}(z - \alpha)^{n-1} + \cdots],$$

se obtiene el residuo

$$2\pi i \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu c_{-\nu-1}.$$

(b) En la solución anterior, úsese $c_k = 0$ para $k > -n$ y $a_{n-1} = f^{(n-1)}(\alpha)/(n-1)!$.

2. Hágase

$$f(z) = (z - \alpha)^2\phi(z) = (y - \alpha)^2 \left[\frac{f''(\alpha)}{2} + \frac{f'''(\alpha)}{6}(z - \alpha) + \cdots\right]$$

y determínese el coeficiente de primer orden en el desarrollo de $1/\phi(z)$.

3. (a) $\pi/\sqrt{2}$.

(b) Usese el resultado del Ejercicio 2 para los residuos en $e^{i\pi/4}$ y $e^{3i\pi/4}$, para obtener $3\pi/4\sqrt{2}$. Aquí, para $f(z) = (1 + x^4)^2, f''(z) = 24x^2(1 + x^4) + 32x^6$, $f'''(z) = 48x(1 + x^4) + 9\cdot 32x^5$.

(c) El integrando tiene polos simples en los puntos $z_k = \omega^{2k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$, donde $\omega = e^{i\pi/2n}$ es la raíz $(4n)$—ésima principal de la unidad. Para $k \leq n$, los polos están en el semiplano superior. Así, por la fórmula (8.21b), la integral es igual a

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{2m}}{2nz_k^{2n-1}} = -\frac{\pi i}{n} \sum_{k=1}^{n} z_k^{2m+1},$$

donde se ha usado $z_k^{2n} = -1$. Introduciendo la expresión para z_k en esta última suma, se obtiene I en la forma de una serie geométrica, y a continuación se suma para obtener el resultado

$$I = -\frac{\pi i}{n\omega^{2m+1}} \sum_{k=1}^{n} [\omega^{4m+2}]^k = -\frac{\pi i\omega^{2m+1}}{n} \frac{1-(\omega^{4m+2})^n}{1 - \omega^{4m+2}}$$
$$= \frac{\pi}{n} \frac{2i}{\omega^{2m+1} - \omega^{-(2m+1)}} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen}[(2m + 1/2n)\pi]}.$$

4. El primer miembro de la fórmula es la suma de los residuos de la función $z^k/f(z)$ dividida entre $2\pi i$ y, por lo tanto, es igual a

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{z^k}{f(z)}\,dz$$

alrededor de un círculo que encierra a todas las raíces α_ν. Pero esta integral tiende a cero conforme el radio del círculo tiende al infinito (permaneciendo el centro fijo).

5. Debido a que x cos x es impar y x sen x es par, la integral es igual a

$$\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+c^2}\,dx.$$

El residuo de $ze^{iz}/2i(z^2+c^2)$ en el semiplano superior es $\frac{1}{2}\pi e^{-|c|}$. Tómese $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ e intégrese sobre la trayectoria cerrada, C, que va desde $-r$ hasta r a lo largo del eje x y sobre el semicírculo $|z| = r$ en el semiplano superior. Sólo es necesario probar que la parte de la integral que se calcula sobre el semicírculo tiende a cero al tomar límites con $r \to \infty$. Para la integral sobre el semicírculo $0 \leqq \theta \leqq \pi$, se encuentra

$$J = \int_0^{\pi}\frac{r^2e^{i\theta}e^{-r\operatorname{sen}\theta}\,e^{ir\cos\theta}}{r^2e^{2i\theta}+c^2}\,d\theta.$$

Elíjase r tan grande que $|r^2e^{2i\theta}+c^2| > \frac{1}{2}r^2$; por ejemplo, elíjase $r^2 > 2c^2$. Se concluye que

$$|J| < 4\int_0^{\pi/2} e^{-r\operatorname{sen}\theta}\,d\theta < 4\int_0^{\pi/2} e^{-2r\theta/\pi}\,d\theta < \frac{2\pi}{r}.$$

Ejercicios misceláneos 8 (p. 902)

1. $(z_1 - z_3)/(z_2 - z_3)$ debe ser real.
2. Sea arg z el argumento de $z = re^{i\theta}$; es decir, $\arg z = \theta + 2n\pi$. El ángulo dirigido que va del segmento $\overrightarrow{\alpha\beta}$ al segmento $\overrightarrow{\alpha\gamma}$ es

$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} + 2p\pi,$$

donde p es un entero. La ecuación dada nos dice que

$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = -\arg\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta} + 2n\pi.$$

Por lo tanto, tomando el segmento que une a α y β como base del triángulo, se ve que los ángulos que van de la base hacia los lados son iguales y de signo opuesto. Recíprocamente, la igualdad de los ángulos de la base conduce a la ecuación dada.

3. $$\Delta = \frac{(z_1-z_3)/(z_2-z_3)}{(z_1-z_4)/(z_2-z_4)}$$

debe ser real, porque si C es el círculo que pasa por z_1, z_2, z_3, éste puede transformarse, por medio de una transformación lineal $\zeta = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$, en el eje real (ver la Sección 8.2, Ejercicio 8). Por lo expuesto en la Sección 8.2, Ejercicio 9, Δ no cambia. Entonces, una condición necesaria para que la imagen de z_4 se encuentre sobre el mismo círculo

que las imágenes de z_1, z_2, z_3, es que dicha imagen sea real, lo cual es equivalente a pedir que Δ sea real.

4. La igualdad que debe probarse es

$$\sqrt{|z_1 - z_2|\,|z_3 - z_4|} + \sqrt{|z_2 - z_3|\,|z_1 - z_4|} = \sqrt{|z_1 - z_3|\,|z_2 - z_4|}$$

o bien,

$$1 + \sqrt{\left|\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)}\right|} = \sqrt{\left|\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)}\right|}$$

Ahora bien, las expresiones subradicales son invariantes bajo una transformación lineal (ver la Sección 8.2, Ejercicio 8, 9). Si por medio de una transformación lineal apropiada se transforma el círculo en el eje real, sólo se tiene que probar la relación $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$ para cuatro puntos sobre una recta, lo cual es trivial.

5. $\zeta = e^{iz}$ toma todos los valores, excepto $\zeta = 0$, como se ve fácilmente por la relación $e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$. Ahora ζ tiene que elegirse de modo que

$$c = \cos z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right);$$

esta ecuación cuadrática siempre tiene una solución,

$$\zeta = c \pm \sqrt{c^2 - 1},$$

y esta solución no es cero, de modo que existe un z correspondiente.

6. Ver el Ejercicio 5. Si $\zeta = e^{iz}$, entonces

$$\tan z = \frac{1}{i}\,\frac{\zeta - (1/\zeta)}{\zeta + (1/\zeta)} = c$$

o bien,

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 + ic}{1 - ic}};$$

existe un $\zeta \neq 0$ finito sólo cuando $c \neq \pm i$; de donde $\tan z = c$ sólo tiene una solución si c no es $+i$ ni $-i$.

7. Si $z = x + iy$, $\cos z$ es real si $x = \pi n$ ó $y = 0$, y $\operatorname{sen} z = 0$ si $x = \pi n + \pi/2$ o $y = 0$ (donde n es un entero).

8. (a) $r = 1$ (para $|z| > 1$, los términos por separado tienden hacia ∞; para $|z| < 1$, compárese con la serie geométrica).
   (b) $r = 0$.
   (c) $r = 1$.

9. (a) Intégrese $e^{iz}/(1 + z^4)$ sobre el semicírculo superior:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}e^{-\sqrt{2}/2}\left(\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

   (b) Intégrese $z^2 e^{iz}/(1 + z^4)$ sobre el semicírculo superior:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}e^{-\sqrt{2}/2}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(c) Intégrese $e^{iz}/(q^2 + z^2)$ sobre el semicírculo superior:

$$\frac{\pi}{2q} e^{-q}.$$

(d) Intégrese $x^{\alpha-1}/[(x + 1)(x + 2)]$ sobre una región limitada por un círculo grande alrededor del origen y elimínense los puntos a lo largo del eje real positivo:

$$\frac{\pi(2^{\alpha-1} - 1)}{\operatorname{sen} \pi\alpha}.$$

10. (a) $+2\pi i$ en $z = 2n\pi$, $-2\pi i$ en $z = (2n + 1)\pi$.
(b) $+2\pi i$ en $z = 2n\pi + 3\pi/2$, $-2\pi i$ en $z = 2n\pi + \pi/2$.
(c) Usese la ecuación funcional $\Gamma(z) = \Gamma(z + \nu + 1)/z(z + 1) \cdots (z + \nu)$;

$$\frac{(-1)^n}{n!} 2\pi i \text{ at } z = -n.$$

(d) $2\pi i$ en $z = n\pi i$.

11.
$$|\operatorname{senh}(x + iy)|^2 = \left(\frac{e^{x+iy} - e^{-x-iy}}{2}\right)\left(\frac{e^{x-iy} - e^{-x+iy}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(\cosh 2x - \cos 2y)$$
$$\geqq \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1).$$

Intégrese a lo largo de la frontera de un cuadrado con lados $x = \pm \pi(n + \frac{1}{2})$ y $y = \pm (n + \frac{1}{2})$, donde n es un entero. La integral tiende a cero conforme $n \to \infty$, por tanto, la suma de los residuos tiende a cero.

12. Escríbase

$$\frac{\cot \pi t}{t - z} = \frac{\cot \pi t}{t} + \frac{z \cot \pi t}{t(t - z)};$$

$\cot \pi t$ es acotada sobre el cuadrado C_n, y las integrales de $(\cot \pi t)/t$ sobre lados opuestos del cuadrado casi se cancelan entre sí; por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \frac{\cot \pi t}{t - z} dt = \lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \frac{z \cot \pi t}{t(t - z)} dt = 0.$$

Si los residuos de polos opuestos se reúnen, la suma de los residuos converge y se obtiene

$$\cot \pi x = \frac{2x}{\pi}\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2 - 1^2} + \frac{1}{x^2 - 2^2} + \cdots\right)$$

(ver el Volumen I, p. 602).

13.
$$\frac{1}{1 + t} = 1 - t + t^2 - + \cdots \pm t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1 + t}.$$

Por lo tanto,

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots \pm \frac{z^n}{n} + R_n,$$

donde

$$R_n = (-1)^n \int_0^z \frac{t^n}{1+t}\,dt.$$

Si se hace $z = e^{i\theta}$, y la recta desde 0 hasta $e^{i\theta}$ se toma como trayectoria de integración, se tiene para $e^{i\theta} \neq -1$.

$$|R_n| = \left|\int_0^1 \frac{t^n}{1+e^{i\theta}t}\,dt\right| \leqq \frac{1}{m}\int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{m(n+1)},$$

donde m denota el mínimo de $|1+e^{i\theta}t|$, para $0 \leqq t \leqq 1$. De aquí que, si $z = e^{i\theta} \neq -1$, R_n tiende a cero.

14. Si $x \neq 0$ y si C' es un contorno en la región en que f es regular, y contiene a y pero no a 0, entonces, por lo expuesto en la p. 882,

$$\frac{d^n}{dy^n}\frac{yf(y)}{(y-a)^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C'} \frac{tf(t)}{(t+a)^{n+1}(t-y)^{n+1}}\,dt.$$

Si se pone $a = y = \sqrt{x}$, la última integral se convierte en

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_{C'} \frac{tf(t)}{(t^2-x)^{n+1}}\,dt.$$

Si entonces se hace la sustitución $t^2 = \tau$, la integral queda

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(\sqrt{\tau})}{(\tau-x)^{n+1}}\,d\tau,$$

donde C es un contorno que contiene a x pero no a 0; la integral es igual a

$$\frac{1}{2}\frac{d^n}{dx^n} f(\sqrt{x}).$$

15. (a)

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2\nu-1)^z} - \frac{1}{(2\nu)^z}\right);$$

ahora bien,

$$\frac{1}{(2\nu-1)^z} - \frac{1}{(2\nu)^z} = z\int_{2\nu-1}^{2\nu} \frac{1}{y^{z+1}}\,dy \leqq \frac{|z|}{|(2\nu-1)^{z+1}|} = \frac{|z|}{(2\nu-1)^{1+x}},$$

y la serie $\sum_{\nu} 1/(2^\nu - 1)^{1+x}$ es absolutamente convergente para $x > 0$.

(b)
$$(1-2^{1-z})\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \cdots - \frac{2}{2^z} - \frac{2}{4^z} - \frac{2}{6^z} - \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \cdots = f(z).$$

(c)
$$\lim_{z\to 1}\,(z-1)\,\zeta(z) = f(1)\cdot\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{1-2^{1-z}} = \frac{f(1)}{g'(1)} = 1,$$

donde

$$g(z) = 1 - 2^{1-z}.$$

Lista de fechas biográficas

Abel, Niels Henrik (1802 — 1829)
Amaler, Jakob (1823 — 1912)
Arquímedes (287 — 212 A.C.)
Bernoulli, Jakob (1654 — 1705)
Bernoulli, John (1667 — 1748)
Bessel, Friedrich Wilhelm (1784 — 1846)
Birkhoff, George David (1884 — 1944)
Bohr, Harald (1887 — 1951)
Bolzano, Bernhard (1781 — 1848)
Borel, Felix Edouard Emile (1871 — 1956)
Brower, Luitzen Egbertus Jan (1881 — 1966)
Cauchy, Augustin (1789 — 1857)
Cavalieri, Francesco Bonaventura (1598 — 1647)
Chebyshev, Pafnuti Lvovich (1821 — 1894)
Clairaut, Alexis Claude (1713 — 1765)
Cramer, Gabriel (1704 — 1752)
Coulomb, Charles Augustin de (1736 — 1806)
De Moivre Abraham (1667 — 1754)
Descartes, (Cartesius) René (1596 — 1650)
Dirac, Paul Adrien Maurice (1902 —)
Dirichlet, Gustav Lejeune (1805 — 1859)
Du Bois Reymond, Paul (1831 — 1889)
Euler, Leonhard (1707 — 1783)
Fermat, Pierre de (1601 — 1665)
Fourier, Joseph (1768 — 1830)
Frenet, Fréderic-Jean (1816 — 1900)
Fréchet, Maurice René (1878 —)
Fresnel, Augustin Jean (1788 — 1827)
Gauss, Carl Friedrich (1777 — 1855)
Gram, Jörgen Pederson (1850 — 1916)
Green, George (1793 — 1841)
Guldin, Paul (1577 — 1643)
Hamilton, Sir William Roan (1805 — 1865)

Heine, Heinrich Eduard (1821 — 1881)
Helmholtz, Hermann Ludwing Ferdinand von (1821 — 1894)
Hermite, Charles (1811 — 1901)
Herón (de Alejandría) (siglo III, d. C.)
Hölder, Otto (1860 — 1937)
Holditch, Hamnet (1800 — 1867)
Huygens, Christian (1629 — 1695)
Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804 — 1851)
Kepler, Johannes (1571 — 1630)
Lagrange, Joseph Louis (1736 — 1813)
Laplace, Pierre Simon (1749 — 1827)
Lebesgue, Henri (1875 — 1941)
Legendre, Adrien-Marie (1752 — 1833)
Leibnitz, Gottfried Wilhelm von (1646 — 1716)
Lipschitz, Rudolf Otto (1832 — 1903)
Lissajous, Jules Antoine (1822 — 1880)
Maxwell, James Clerk (1831 — 1879)
Möbius, August Ferdinand (1790 — 1868)
Mollerup, Peter Johannes (1872 — 1937)
Morera, Giacinto (1856 — 1909)
Morse, Marston Harold (1892 —)
Newton, Isaac (1642 — 1727)
Parseval-Deschenes, Marc Antoine (N? — 1836)
Plateau, Joseph Antoine Ferdinand (1801 — 1883)
Poincaré, Henri (1854 — 1912)
Poisson, Siméon Denis (1781 — 1840)
Riccati, Jacobo Francesco (1676 — 1754)
Riemann, Bernhard (1826 — 1866)
Schuler, Maximilian Joseph Johannes Eduard (1882 —)
Schwarz, Hermann Amandus (1843 — 1921)
Steiner, Jacob (1796 — 1863)
Stokes, George Gabriel (1819 — 1903)
Taylor, Brook (1685 — 1731)
Wallis, John (1616 — 1703)
Weierstrass, Karl (1815 — 1897)
Wronski, (Hoene), Jozef Maria (1778 — 1853)

Indice

J

L

T

U

V

—o0o—

NOTAS

NOTAS